

1A CC3 Mécanique du point (2h)

Mercredi 15 janvier 2025

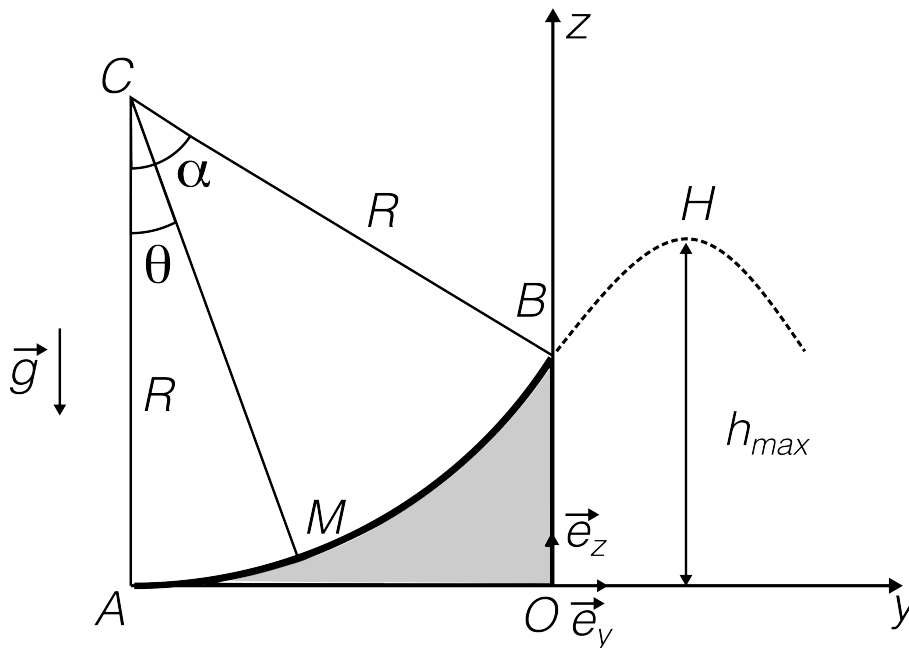
- Aucun document n'est admis. Une calculatrice est autorisée.
- Pensez à simplifier au maximum vos résultats.
- Vous serez évalués sur les acquis de l'apprentissage suivants :

MP : Résoudre un problème, calculer et analyser le résultat en mécanique du point.

Saut depuis un tremplin (8,5 points)

Une masse ponctuelle m dont la position est définie par le point M glisse sans frottement sur un tremplin en forme d'arc de cercle de centre C et de rayon R . La masse part du point A ($\theta = 0$) avec une vitesse horizontale de norme v_0 . La position du point M sur le tremplin est repérée par l'angle θ . On rappelle que l'énergie potentielle associée à son poids, sera définie par $E_p(z) = mgz$. Le tremplin se termine au point B (d'angle α). Au-delà du point B la masse m n'est soumise qu'à son propre poids, sa trajectoire va passer par une hauteur maximale (h_{max}) dont on souhaite déterminer la valeur.

Pour les applications numériques, nous prendrons $R = 10$ m, $g = 9,81$ m.s⁻² et $\alpha = 60^\circ$.



On étudie d'abord le mouvement de la masse m sur le tremplin.

1. Représenter les forces subies par la masse m par des vecteurs au point M sur la figure précédente. **(0,5 pt)**
2. Justifier que l'énergie mécanique de la masse m est conservée au cours de son mouvement sur le tremplin. **(0,5 pt)**

3. Exprimer z_M en fonction de R et θ . **(0,5 pt)**

4. En vous aidant des questions précédentes, et de la définition de $E_p(z) = mgz$ dont dérive le poids, montrer que l'expression de la norme du vecteur vitesse du point M est $v_M = \sqrt{v_0^2 - 2gR(1 - \cos(\theta))}$. **(1 pt)**

5. Quelle est la norme de la vitesse initiale minimale $v_{0,min}$ que doit avoir la masse m pour atteindre B ? Faire l'application numérique. **(1 pt)**

6. Pour la suite de l'exercice on suppose que $v_0 > v_{0,min}$. Représenter $\vec{v}_B$ sur la figure puis écrire son expression dans la base $(\vec{e}_y, \vec{e}_z)$ en fonction de α et en notant v_B sa norme. **(0,5 pt)**

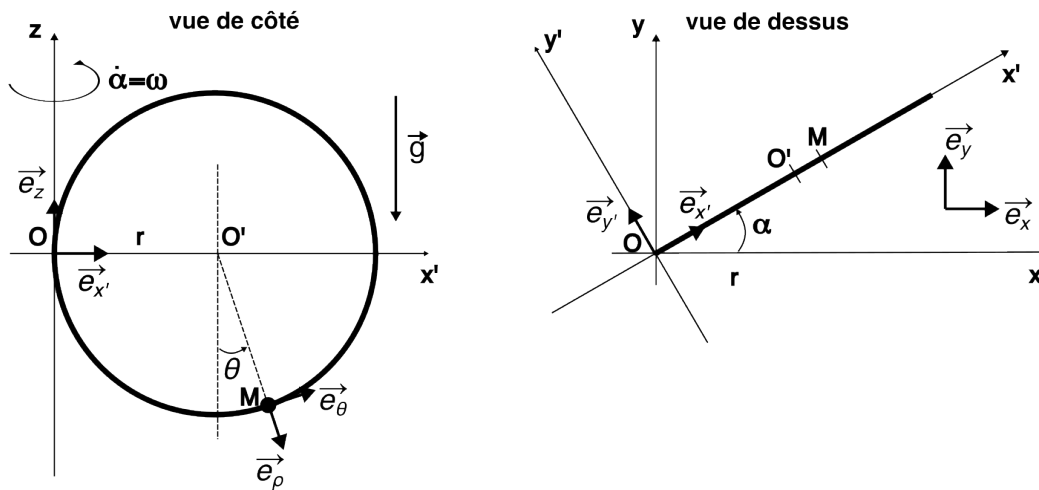
7. En appliquant le PFD, dans le repère $(O, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, à la masse m lors de sa chute libre, établir l'évolution temporelle des composantes du vecteurs vitesse $v_y(t)$ et $v_z(t)$ puis les équations horaires du mouvement $y(t)$ et $z(t)$, en fonction de g , v_B , α . On prendra comme origine du temps $t = 0$ l'instant où la masse passe au point B et quitte le tremplin. **(2 pt)**

8. Que peut-on dire de la direction du vecteur vitesse en H ? En déduire son expression littérale. **(0,5 pt)**
9. Quelle est l'expression de la hauteur h_{max} du point H en fonction de v_0 , g , R et α ? Donner sa valeur numérique en prenant $v_0 = 13,9 \text{ m.s}^{-1}$. **(1,5 pt)**
10. Que vaut la norme de la vitesse de la masse m lorsqu'elle touche le sol à nouveau ? **(0,5 pt)**

Anneau couissant sur un cerceau en rotation (11,5 points)

Un petit anneau de masse m , assimilable à un point matériel M , est astreint à se déplacer sans frottement sur un cerceau de rayon r de centre O' , situé dans un plan vertical, tournant autour de l'axe vertical (Oz) à la vitesse angulaire constante ω . Le référentiel $\mathcal{R}$ (O, x, y, z, t) est considéré galiléen, le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au cerceau est matérialisé par (O', x', y', z) est donc un référentiel tournant à la vitesse angulaire $\dot{\alpha} = \omega$. On désigne par θ l'angle que fait $(O'M)$ avec la verticale ascendante. On rappelle les définitions des accélérations d'entraînement et de Coriolis :

$$\vec{a}_e = \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} + \frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} \right), \quad \vec{a}_c = 2\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$$



1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{O'M}$, $\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$ et $\vec{a}_{M/\mathcal{R}'}$ dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$. **(1 pt)**

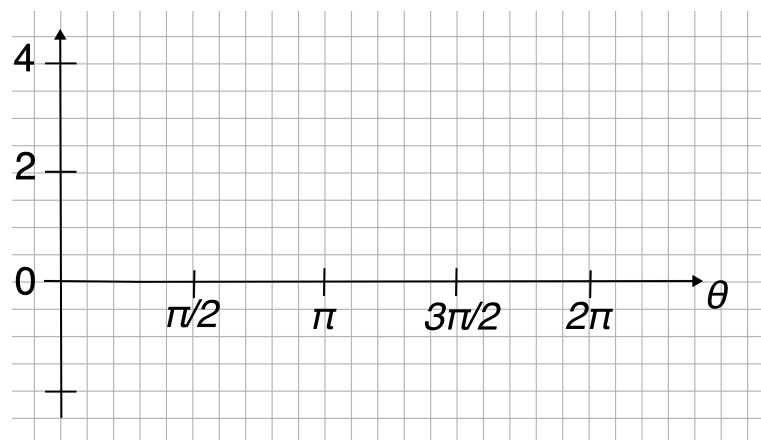
2. Exprimer $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$ en fonction de $\vec{e}_{x'}$, $\vec{e}_z$ et θ . **(0,5 pt)**

3. Exprimer le vecteur rotation $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ dans la base $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_z)$. **(0,5 pt)**

4. Déterminer les expressions des vecteurs $\overrightarrow{OO'}$, $\vec{v}_{O'/\mathcal{R}}$ et $\vec{a}_{O'/\mathcal{R}}$ dans la base $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_z)$. **(0,5 pt)**

5. En utilisant les réponses des 4 questions précédentes, calculer l'accélération d'entraînement $\vec{a}_e$ dans la base $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_z)$ et montrer qu'elle s'écrit $\vec{a}_e = -r\omega^2 (1 + \sin \theta) \vec{e}_{x'}$. **(1 pt)**
6. Calculer l'accélération de Coriolis et en déduire qu'elle ne possède qu'une composante selon $\vec{e}_{y'}$ que vous exprimerez en fonction de r, ω, θ . **(1 pt)**
7. Représenter toutes les forces agissant sur l'anneau dans les vues de côté et de dessus, on notera $\vec{F}_{ie}, \vec{F}_{ic}$ les forces d'inertie d'entraînement et d'inertie de Coriolis respectivement. **(0,5 pt)**
8. Redonner l'expression du déplacement élémentaire $\vec{dl} = d(\overrightarrow{O'M})$ dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$, en fonction de r et θ . **(0,5 pt)**
9. Exprimer le vecteur $\vec{P}$ dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$. **(0,5 pt)**
10. Calculer le travail infinitésimal $\delta W = \vec{P} \cdot \vec{dl}$, pour exprimer l'énergie potentielle $\mathcal{E}_{p_g}(\theta)$ dont dérive le poids en fonction de m, g, r, θ . On prendra $\mathcal{E}_{p_g}(\theta = 0) = 0$. **(1 pt)**

11. Exprimer le vecteur $\vec{F}_{ie}$ dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$, puis calculer le travail élémentaire de $\vec{F}_{ie}$ auquel on peut associer une énergie potentielle $\mathcal{E}_{pie}$ pour montrer que $\frac{d\mathcal{E}_{pie}}{d\theta} = -mr^2\omega^2(1 + \sin\theta)\cos\theta$. **(1,5 pt)**
12. Justifier que $\vec{R}$ et $\vec{F}_{ic}$ ne travaillent pas et en déduire que l'énergie mécanique est conservée au cours du mouvement de m . **(0,5 pt)**
13. Il devient alors possible de déterminer les positions d'équilibre en calculant $\frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta} = 0$, avec $\mathcal{E}_p$ l'énergie potentielle totale du système. Montrer qu'on obtient l'équation suivante : $r\omega^2(1 + \sin\theta) = g \tan\theta$. **(0,5 pt)**
14. En supposant que $r\omega^2 = g$, tracer l'allure des fonctions $(1 + \sin\theta)$ et $\tan\theta$ et montrer qu'il existe deux positions d'équilibre de l'anneau dans $[0; 2\pi]$. **(1,5 pt)**



15. On désire qu'une position d'équilibre existe pour $\theta = \pi/6$. Calculer la valeur de la vitesse angulaire de rotation correspondante en tours/min. **(0,5 pt)**