

1A CC3 Mécanique du point (2h)

Mercredi 15 janvier 2025

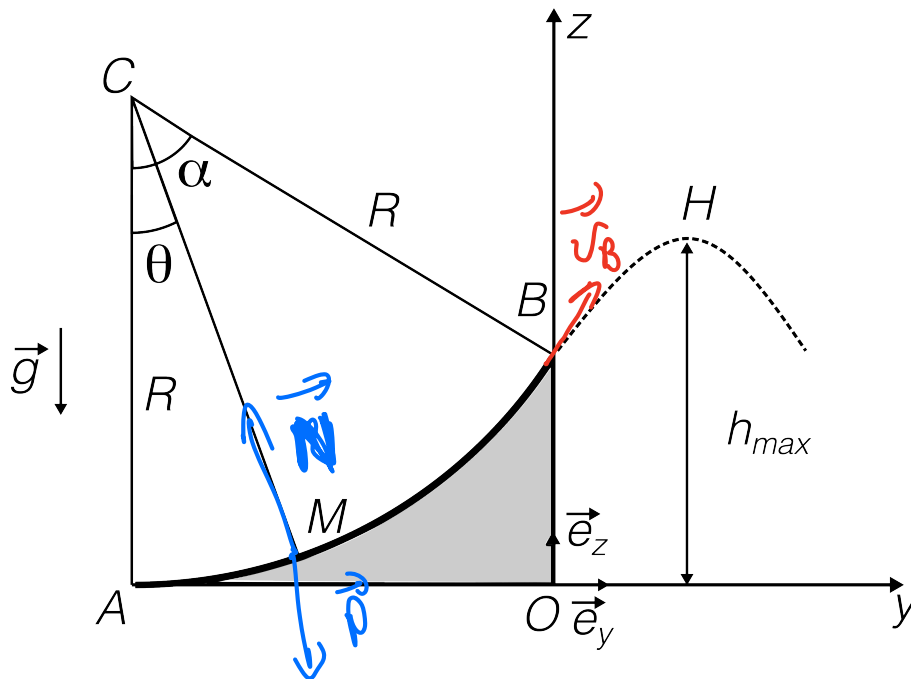
- Aucun document n'est admis. Une calculatrice est autorisée.
- Pensez à simplifier au maximum vos résultats.
- Vous serez évalués sur les acquis de l'apprentissage suivants :

MP : Résoudre un problème, calculer et analyser le résultat en mécanique du point.

Saut depuis un tremplin (8,5 points)

Une masse ponctuelle m dont la position est définie par le point M glisse sans frottement sur un tremplin en forme d'arc de cercle de centre C et de rayon R . La masse part du point A ($\theta = 0$) avec une vitesse horizontale de norme v_0 . La position du point M sur le tremplin est repérée par l'angle θ . On rappelle que l'énergie potentielle associée à son poids, sera définie par $E_p(z) = mgz$. Le tremplin se termine au point B (d'angle α). Au-delà du point B la masse m n'est soumise qu'à son propre poids, sa trajectoire va passer par une hauteur maximale (h_{max}) dont on souhaite déterminer la valeur.

Pour les applications numériques, nous prendrons $R = 10$ m, $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ et $\alpha = 60^\circ$.



On étudie d'abord le mouvement de la masse m sur le tremplin.

1. Représenter les forces subies par la masse m par des vecteurs au point M sur la figure précédente. (0,5 pt)

0,25 + 0,25

2. Justifier que l'énergie mécanique de la masse m est conservée au cours de son mouvement sur le tremplin. (0,5 pt)

$\vec{N}$ ne travaille pas car $\vec{N} \perp d\vec{P}$ 0,25
 $\vec{P}$ est une force conservative 0,25

3. Exprimer z_M en fonction de R et θ . (0,5 pt)

$$z_n = R(1 - \cos \theta) \quad 0,5$$

4. En vous aidant des questions précédentes, et de la définition de $E_p(z) = mgz$ dont dérive le poids, montrer que l'expression de la norme du vecteur vitesse du point M est $v_M = \sqrt{v_0^2 - 2gR(1 - \cos(\theta))}$. (1 pt)

$$\frac{1}{2} m v_n^2 + mg z_n = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad \text{Théorème} \quad 0,5$$

$$v_n^2 = v_0^2 - 2gR(1 - \cos \theta)$$

$$v_n = \sqrt{v_0^2 - 2gR(1 - \cos \theta)} \quad 0,5$$

5. Quelle est la norme de la vitesse initiale minimale $v_{0,min}$ que doit avoir la masse m pour atteindre B? Faire l'application numérique. (1 pt)

$$\text{Au point B avec } v_B = 0 \quad mg z_B = \frac{1}{2} m v_{0,min}^2$$

$$v_{0,min} = \sqrt{2g z_B} = \sqrt{2gR(1 - \cos \alpha)} \quad 0,5$$

$$\text{A.N.: } 9,9 \text{ m.s}^{-1} \quad 0,25$$

6. Pour la suite de l'exercice on suppose que $v_0 > v_{0,min}$. Représenter $\vec{v}_B$ sur la figure puis écrire son expression dans la base $(\vec{e}_y, \vec{e}_z)$ en fonction de θ et en notant v_B sa norme. (0,5 pt)

$$\vec{v}_B = \begin{pmatrix} v_B \cos \alpha \\ v_B \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{v_0^2 - 2gR(1 - \cos \alpha)} \cos \alpha \\ \sqrt{v_0^2 - 2gR(1 - \cos \alpha)} \sin \alpha \end{pmatrix} \quad 0,25$$

7. En appliquant le PFD, dans le repère $(O, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, à la masse m lors de sa chute libre, établir l'évolution temporelle des composantes du vecteurs vitesse $v_y(t)$ et $v_z(t)$ puis les équations horaires du mouvement $y(t)$ et $z(t)$, en fonction de g , v_B , α . On prendra comme origine du temps $t = 0$ l'instant où la masse passe au point B et quitte le tremplin. (2 pt)

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) = 0 \\ \ddot{z}(t) = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y}(t) = v_B \cos \alpha \\ \dot{z}(t) = -gt + v_B \sin \alpha \end{cases} \quad 0,5 \quad 0,5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(t) = v_0 \cos \alpha + y_B \\ z(t) = -\frac{g}{2} t^2 + v_0 \sin \alpha + z_B \end{cases} \quad \text{--- 1}$$

8. Que peut-on dire de la direction du vecteur vitesse en H ? En déduire son expression littérale. (0,5 pt)

en H la vitesse est selon (Oy) $v_H = v_0 \cos \alpha$ / 0,25

9. Quelle est l'expression de la hauteur h_{max} du point H en fonction de v_0 , g , R et α ? Donner sa valeur numérique en prenant $v_0 = 13,9 \text{ m.s}^{-1}$. (1,5 pt)

En ce point vitesse est le B et H / 0,25

$$\frac{1}{2} m v_B^2 + m g z_B = \frac{1}{2} m v_H^2 + m g z_H \Rightarrow z_H = \frac{1}{2g} (v_B^2 - v_H^2) + z_B$$

$$z_H = \frac{1}{2g} (v_0^2 \sin^2 \alpha) + z_B$$

$$z_H = \frac{\sin^2 \alpha}{2g} [v_0^2 - 2gR(1 - \cos \alpha)] + R(1 - \cos \alpha) \quad \text{--- 0,5}$$

N.N: 0,6 m / 0,25

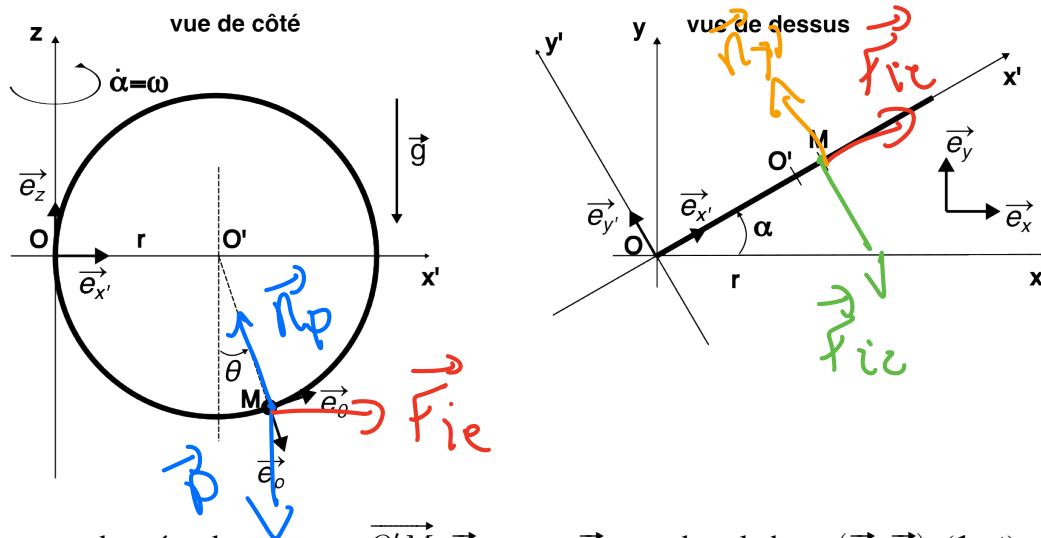
10. Que vaut la norme de la vitesse de la masse m lorsqu'elle touche le sol à nouveau? (0,5 pt)

$$v_I = v_D = v_0 \quad \text{--- 0,5}$$

Anneau coulissant sur un cerceau en rotation (11,5 points)

Un petit anneau de masse m , assimilable à un point matériel M , est astreint à se déplacer sans frottement sur un cerceau de rayon r de centre O' , situé dans un plan vertical, tournant autour de l'axe vertical (Oz) à la vitesse angulaire constante ω . Le référentiel $\mathcal{R} (O, x, y, z, t)$ est considéré galiléen, le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au cerceau est matérialisé par (O', x', y', z) est donc un référentiel tournant à la vitesse angulaire $\dot{\alpha} = \omega$. On désigne par θ l'angle que fait $(O'M)$ avec la verticale ascendante. On rappelle les définitions des accélérations d'entraînement et de Coriolis :

$$\vec{a}_e = \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} + \frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}), \quad \vec{a}_c = 2\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$$



1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{O'M}$, $\vec{v}_{M/R'}$ et $\vec{a}_{M/R'}$ dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$. (1 pt)

$$\begin{aligned} \vec{O'M} &= r \vec{e}_\rho & \vec{v}_{M/R'} &= r \dot{\theta} \vec{e}_\theta & \vec{a}_{M/R'} &= \begin{pmatrix} -r \ddot{\theta} \\ r \ddot{\theta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

0,25 0,25 0,5

2. Exprimer $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$ en fonction de $\vec{e}_{x'}$, $\vec{e}_z$ et θ . (0,5 pt)

$$\begin{aligned} \vec{e}_\rho &= \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} & \vec{e}_\theta &= \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

0,25 0,25

3. Exprimer le vecteur rotation $\vec{\omega}_{R'/R}$ dans la base $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_z)$. (0,5 pt)

$$\vec{\omega}_{R'/R} = \omega \vec{e}_z$$

0,5

4. Déterminer les expressions des vecteurs $\overrightarrow{OO'}$, $\vec{v}_{O'/R}$ et $\vec{a}_{O'/R}$ dans la base $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_z)$. (0,5 pt)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OO'} &= r \vec{e}_{x'} & \vec{v}_{O'/R} &= r \frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} = r \vec{\omega} \wedge \vec{e}_{x'} = r \omega \vec{e}_{y'} & \vec{a}_{O'/R} &= r \omega \frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} = -r \omega^2 \vec{e}_{x'} \end{aligned}$$

0,25 0,25

5. En utilisant les réponses des 4 questions précédentes, calculer l'accélération d'entraînement $\vec{a}_e$ dans la base $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_z)$ et montrer qu'elle s'écrit $\vec{a}_e = -r\omega^2(1 + \sin\theta)\vec{e}_{x'}$. (1 pt)

$$\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega \\ 0 & \omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r \sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r\omega \sin\theta \\ \omega & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -r\omega^2 \sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a}_e = \vec{a}_0' + (\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r})$$

$$= -r\omega^2(1 + \sin\theta)\vec{e}_{x'} \quad 0,25$$

6. Calculer l'accélération de Coriolis et en déduire qu'elle ne possède qu'une composante selon $\vec{e}_{y'}$ que vous exprimerez en fonction de r, ω, θ . (1 pt)

$$\vec{a}_c = 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta} \\ 0 & \omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r \cos\theta \\ 0 \\ r \dot{\theta} \sin\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2r\omega \dot{\theta} \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(1)

7. Représenter toutes les forces agissant sur l'anneau dans les vues de côté et de dessus, on notera $\vec{F}_{ie}$, $\vec{F}_{ic}$ les forces d'inertie d'entraînement et d'inertie de Coriolis respectivement. (0,5 pt)

8. Redonner l'expression du déplacement élémentaire $d\vec{l} = d(\vec{O'M})$ dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$, en fonction de r et θ . (0,5 pt)

$$d\vec{l} = r d\theta \vec{e}_\theta \quad 0,5$$

9. Exprimer le vecteur $\vec{P}$ dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$. (0,5 pt)

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} m g \cos\theta \\ -m g \sin\theta \end{pmatrix} \quad 0,25$$

10. Calculer le travail infinitésimal $\delta W = \vec{P} \cdot d\vec{l}$, pour exprimer l'énergie potentielle $\mathcal{E}_{p_g}(\theta)$ dont dérive le poids en fonction de m, g, r, θ . On prendra $\mathcal{E}_{p_g}(\theta = 0) = 0$. (1 pt)

$$\delta W = -m g \sin\theta r d\theta = -d\mathcal{E}_{p_g} \quad \frac{d\mathcal{E}_{p_g}}{d\theta} = m g r \sin\theta$$

$$\mathcal{E}_{p_g} = -m g r \cos\theta + Cte \quad \mathcal{E}_{p_g}(0) = -m g r + Cte = 0$$

$$Cte = m g r \quad \mathcal{E}_{p_g}(\theta) = m g r (1 - \cos\theta) \quad 0,25$$

11. Exprimer le vecteur $\vec{F}_{ie}$ dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$, puis calculer le travail élémentaire de $\vec{F}_{ie}$ auquel on peut associer une énergie potentielle $\mathcal{E}_{pie}$ pour montrer que $\frac{d\mathcal{E}_{pie}}{d\theta} = -mr^2\omega^2(1 + \sin\theta)\cos\theta$. (1,5 pt)

$$\delta W = \vec{F}_{ie} \cdot d\vec{P} = mr\omega^2(1 + \sin\theta)\omega\theta d\theta = -d\mathcal{E}_{pie}$$

$$\frac{d\mathcal{E}_{pie}}{d\theta} = -mr\omega^2(1 + \sin\theta)\cos\theta$$

0,75 0,75
0,5

12. Justifier que $\vec{R}$ et $\vec{F}_{ie}$ ne travaillent pas et en déduire que l'énergie mécanique est conservée au cours du mouvement de m . (0,5 pt)

$$\vec{R} \perp d\vec{P}$$

$$\vec{F}_{ie} \perp d\vec{P}$$

0,16
0,25

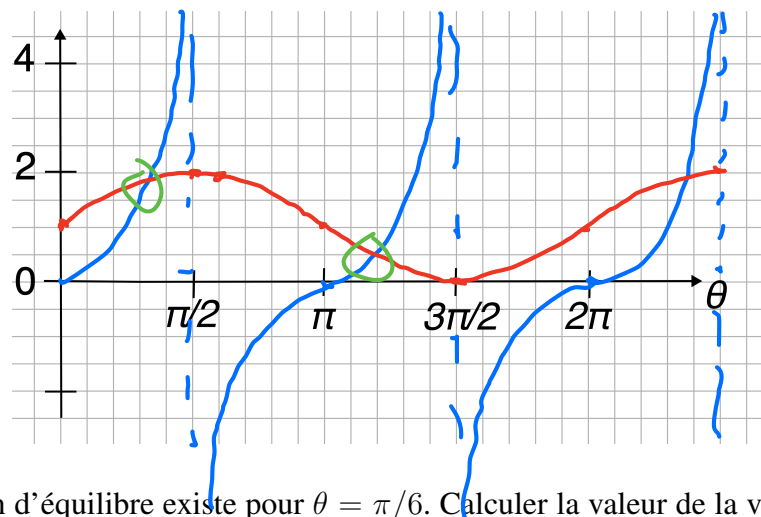
13. Il devient alors possible de déterminer les positions d'équilibre en calculant $\frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta} = 0$, avec $\mathcal{E}_p$ l'énergie potentielle totale du système. Montrer qu'on obtient l'équation suivante : $r\omega^2(1 + \sin\theta) = g \tan\theta$. (0,5 pt)

$$mgr \sin\theta - mr\omega^2(1 + \sin\theta)\cos\theta = 0$$

$$r\omega^2(1 + \sin\theta) = g \tan\theta$$

0,25
0,25

14. En supposant que $r\omega^2 = g$, tracer l'allure des fonctions $(1 + \sin\theta)$ et $\tan\theta$ et montrer qu'il existe deux positions d'équilibre de l'anneau dans $[0; 2\pi]$. (1,5 pt)



- $\tan\theta$ 0,5
- $(1 + \sin\theta)$ 0,6
0,5 pour les points d'intersection

15. On désire qu'une position d'équilibre existe pour $\theta = \pi/6$. Calculer la valeur de la vitesse angulaire de rotation correspondante en tours/min. (0,5 pt)

$$\omega = 2,73 \text{ rad/s} \quad 26 \text{ tours/min}$$

0,5