INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Remise à Niveau

2e année

Polycopié de _____

Page Moodle



Auteur : Huang Lorick

Bureau GMM 122

LHUANG@INSA-TOULOUSE.FR

POLYCOPIÉ DE INSA DE TOULOUSE

Version du 3 septembre 2026

Table des matières

1 Équivalents 5
1.1 Comparaison de fonctions 6
1.2 Définition 9
1.3 Premières propriétés 9
1.4 Opérations sur les équivalents 10
1.5 Application aux calculs de limites 13
1.6 Exercices 14

2 Développements limités 17
2.1 Définitions et premières propriétés 17
2.2 Formule de Taylor et Premiers exemples 21
2.3 Opérations sur les développements limités 25
2.3.1 Addition et multiplication par une constante 26
2.3.2 Produit 26
2.3.3 Composition 28
2.3.4 Quotient 29
2.3.5 Intégration 31
2.3.6 Dérivation 32
2.4 Développements limités généralisés 33
2.5 Applications 34
2.5.1 Calcul de limites 34
2.5.2 Tangente et position relative d'une courbe 34
2.5.3 Branches infinies et asymptotes 36
2.6 Exercices 37

3 Déterminants 41
3.1 Rappels sur les espaces vectoriels et applications linéaires 41
3.1.1 Espaces vectoriels. 41
3.1.2 Une base pour décrire les vecteurs. 44
3.1.3 Application linéaire 46

3.2 Déterminant de deux vecteurs en dimension 2 47
3.3 Déterminant de trois vecteurs en dimension 3 48
3.4 Déterminant de n vecteurs en dimension n 51
3.5 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n 51
3.6 Développement d'un déterminant suivant une ligne ou une colonne 52
3.7 Exercices 57

4 Réduction des endomorphismes 59
4.1 Valeurs propres, vecteurs propres 59
4.2 Recherche des valeurs propres et des vecteurs propres 63
4.3 Caractérisation des endomorphismes diagonalisables 66
4.4 Exemple complet de diagonalisation 67
4.5 Cas d'une matrice diagonalisable 67
4.5.1 Exemple où u n'est pas diagonalisable 69
4.5.2 Ce n'est pas une question de polynôme caractéristique 70
4.6 Applications 71
4.6.1 Lien avec les équations différentielles 71
4.6.2 Solution par l'algèbre $\ddot{x}(t) - 3\dot{x}(t) - 10x(t) = 0$ 72
4.6.3 Un système en trois dimension 74
4.6.4 Etude d'une suite récurrente 77
4.7 Exercices 78

5 Annexes 81
5.1 Formule de Taylor 81
5.2 Récapitulatif des développements limités des fonctions usuelles en 0 81
5.3 Kit de survie - Déterminant 82
5.4 Rappel sur le pivot de Gauss 85
5.5 Formule de changement de base et exemples 87

1. Équivalents

Dans cette section, a désigne soit un nombre réel, soit $+\infty$ ou $-\infty$. On s'intéresse à des fonctions qui sont définies « près de » a, mais pas forcément en a. Autrement dit, elles sont définies sur un intervalle ouvert contenant a, ou juste à droite (vers a^+), ou juste à gauche (vers a^-), même si la valeur de la fonction en a n'est pas connue ou n'existe pas. On veut comprendre comment la fonction se comporte quand on se rapproche de a.

Définition 1.0.1 — Voisinage.

— On dit qu'un ensemble $V \subset \mathbb{R}$ est un **voisinage d'un réel** a s'il contient un intervalle ouvert centré en a. Cela signifie qu'il existe $\ell > 0$ tel que :

$$]a-\ell, a+\ell[\subset V.$$

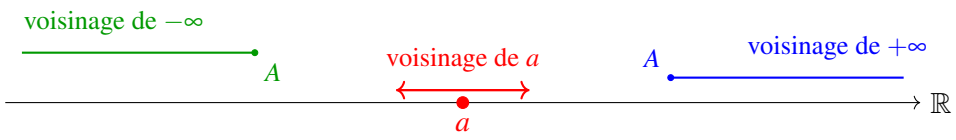
Autrement dit, V contient tous les réels « assez proches de a ».

— On dit que V est un **voisinage de** $+\infty$ s'il contient un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ pour un certain $A \in \mathbb{R}$. Cela signifie que V contient tous les réels « suffisamment grands ».

— On dit que V est un **voisinage de** $-\infty$ s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty, A[\subset V$. Cela signifie que V contient tous les réels « suffisamment petits ».

À retenir

Un voisinage contient tous les réels « assez proches » du point considéré (ou « assez grands » ou « assez petits » pour les infinis).



Point considéré	Ensemble V	Voisinage ? Pourquoi ?
$a = 1$	$]0.5, 1.5[$	Oui, intervalle centré en 1
$a = 1$	$]0, 2[\setminus\{1\}$	Non, car V ne contient pas 1
$+\infty$	$]1000, +\infty[\cup \{0\}$	Oui, contient $]A, +\infty[$
$-\infty$	$]-\infty, 0[$	Oui, contient $]-\infty, A[$

1.1 Comparaison de fonctions

Définition 1.1.1 On dit que f est **négligeable devant** g au voisinage d'un point a (ou en a), s'il vérifie la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists V \in \mathscr{V}(a),\ \forall x \in V, \quad |f(x)| \leq \varepsilon\, |g(x)|.$$

Autrement dit, f devient *arbitrairement petit par rapport à* g quand x est suffisamment proche de a. On note :

$$f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x)) \quad \text{ou} \quad f = \underset{a}{o}(g).$$

Remarque Cela revient à dire qu'il existe une fonction $\varepsilon(x)$ telle que :

$$f(x) = g(x)\,\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Proposition 1.1.1 — caractérisation pratique. Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage de a (sauf peut-être en a), et supposons que $g(x) \neq 0$ quand x est proche de a (sauf peut-être en a). Alors :

À retenir

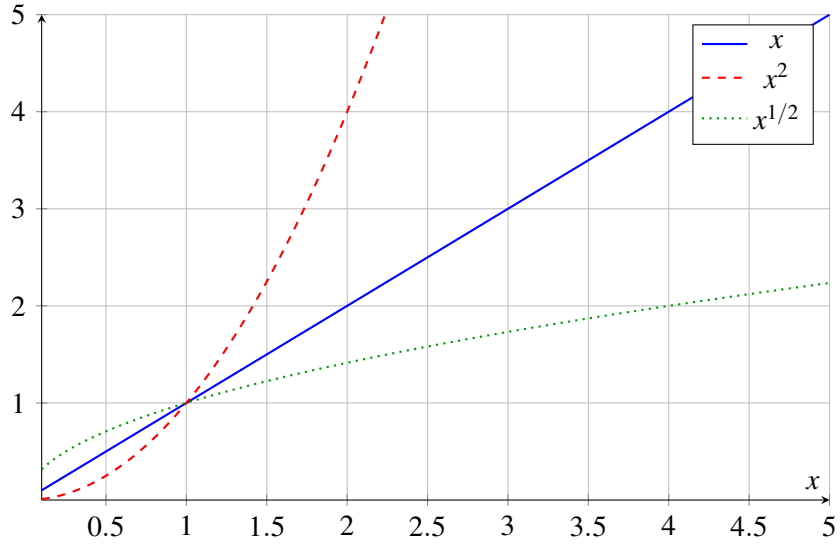
$$f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x)) \iff \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

■ **Exemple 1.1** Les relations classiques suivantes sont à connaitre :

1. $x^\alpha = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^\beta\right)$ si et seulement si $\alpha < \beta$.
2. $x^\alpha = \underset{x\to 0}{o}\left(x^\beta\right)$ si et seulement si $\alpha > \beta$.
3. $f(x) = \underset{x\to a}{o}(1)$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

■

$x^\alpha = o(x^\beta)$ si $\alpha < \beta$ quand $x \to +\infty$



En utilisant les caractérisations ci-dessus, on obtient les résultats suivants.

Proposition 1.1.2 Soient f, g, h, φ et ψ des fonctions définies dans un voisinage de a, sauf peut-être en a. On suppose que g, h et ψ ne s'annulent pas dans un voisinage de a, sauf peut-être en a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Si $f = \underset{a}{o}(h)$ et si $g = \underset{a}{o}(h)$ alors $\lambda f + g = \underset{a}{o}(h)$.
2. Si $f = \underset{a}{o}(g)$ alors $fh = \underset{a}{o}(gh)$.
3. Si $f = \underset{a}{o}(g)$ et $\varphi = \underset{a}{o}(\psi)$ alors $f\varphi = \underset{a}{o}(g\psi)$.

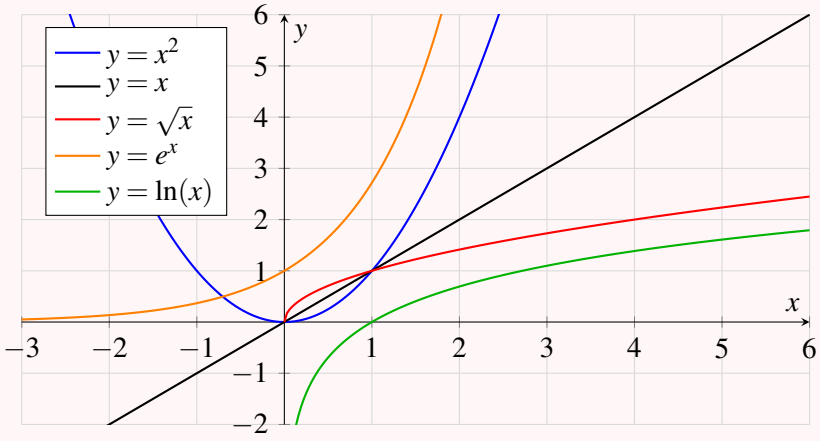
Les résultats suivants, appelés "croissances comparées", comparent les croissances des fonctions puissances, logarithme et exponentielle. Ils sont souvent utilisés en pratique.

Proposition 1.1.3 Soit $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$.

1. $(\ln x)^\beta = \underset{x\to+\infty}{o}(x^\alpha)$.
2. $x^\beta = \underset{x\to+\infty}{o}(e^{\alpha x})$.
3. $|\ln x|^\beta = \underset{x\to 0^+}{o}\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$.

À retenir

À l'infini, e^x croit plus vite que x^2 qui croit plus vite que $\sqrt{x}$ qui croit plus vite que $\ln(x)$.



Démonstration. Montrons tout d'abord que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Pour cela, une étude de la fonction $x \mapsto \ln x - 2\sqrt{x}$ permet d'obtenir facilement que pour tout $x \geq 1$, $\ln x \leq 2\sqrt{x}$. On en déduit que $0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$ et donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Soit $\alpha > 0$. Pour tout $x \geq 1$, on pose $t = x^\alpha$, et on a $\frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{\ln t^{1/\alpha}}{t} = \frac{\ln t}{\alpha t}$. Comme t tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, on obtient $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ en utilisant ce qui précède.

Ensuite, pour tout $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = \left(\frac{\ln x}{x^{\alpha/\beta}}\right)^\beta \to 0$ quand $x \to +\infty$. (Si $\beta \leq 0$, le résultat est immédiat.)

Pour démontrer le deuxième point, on pose $y = e^x$. Alors $\frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} = \frac{(\ln y)^\beta}{y^\alpha}$. Comme y tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, on obtient le résultat cherché.

Pour le dernier point on se ramène au premier en posant $y = 1/x$. ■

Remarque De ce résultat, découlent en particulier les majorations suivantes : pour $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$,

1. pour tout x dans un voisinage de $+\infty$, $(\ln x)^\beta \leq x^\alpha$,
2. pour tout x dans un voisinage de $+\infty$, $x^\beta \leq e^{\alpha x}$,
3. pour tout x dans un voisinage de 0^+, $|\ln x|^\beta \leq \dfrac{1}{x^\alpha}$.

Exercice 1.1

1. Parmi les fonctions suivantes, laquelle a la croissance la plus rapide lorsque $x \to +\infty$?
   - ☐ $\ln x$
   - ☐ x^{100}
   - ☐ e^x
   - ☐ x^x
2. Quelles affirmations sont vraies ?
   - ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = +\infty$
   - ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ pour tout entier n
   - ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = +\infty$
   - ☐ $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0$
3. On prend $f(x) = x^3$ et $g(x) = e^{2x}$. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$?
   - ☐ 0
   - ☐ $+\infty$
   - ☐ 1
   - ☐ La limite n'existe pas
4. Soit $\alpha > 0$. Quelle est la bonne écriture de la relation de négligeabilité entre x^α et e^x quand $x \to +\infty$?
   - ☐ $x^\alpha = o(e^x)$
   - ☐ $e^x = o(x^\alpha)$
   - ☐ $x^\alpha \sim e^x$
   - ☐ $x^\alpha \gg e^x$
5. Parmi les limites suivantes, laquelle est correcte ?
   - ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$
   - ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{n!} = 0$ pour tout entier n
   - ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^x}{e^{x^2}} = +\infty$
   - ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^{1/2}} = 0$
6. Vrai ou Faux : si $f(x) = o(\ln(x))$ quand $x \to +\infty$, alors, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
   - ☐ Vrai
   - ☐ Faux

■

1.2 Définition

Définition 1.2.1 On dit que f est **équivalente à** g au voisinage de a et on note $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ s'il existe une fonction ε et $V \in \mathscr{V}(a)$ tels que

$$\forall x \in V, \quad f(x) = g(x)(1+\varepsilon(x)), \quad \text{avec } \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Remarque Avec les notations précédentes, on peut écrire :

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \text{ si et seulement si } f(x) - g(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x)).$$

Proposition 1.2.1 En supposant que f et g ne s'annulent pas dans un voisinage de a, sauf peut-être en a, on a la caractérisation suivante :

À retenir

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \text{ si et seulement si } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

■ **Exemple 1.2 — Équivalent d'un polynôme.** Soit

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_p x^p$$

avec $a_n \neq 0$ et $p < \ldots < n$. Alors, lorsque $x \to +\infty$, on a :

$$f(x) \sim a_n x^n.$$

Autrement dit, un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré.

Preuve. On factorise $f(x)$ par x^n :

$$f(x) = x^n \left(a_n + a_{n-1}x^{-1} + a_{n-2}x^{-2} + \ldots + a_p x^{p-n}\right).$$

On en déduit :

$$\frac{f(x)}{a_n x^n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}x^{-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n}x^{-2} + \ldots + \frac{a_p}{a_n}x^{p-n}.$$

Or tous les termes avec x^k pour $k < 0$ tendent vers 0 lorsque $x \to +\infty$, donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{a_n x^n} = 1,$$

ce qui signifie que $f(x) \sim a_n x^n$ lorsque $x \to +\infty$. ■

1.3 Premières propriétés

Proposition 1.3.1 Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour toutes fonctions f, g et h, la relation $\underset{a}{\sim}$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $f(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$.
2. $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Rightarrow g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$.
3. $\left(f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \text{ et } g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)\right) \Rightarrow f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$.

Remarque $f(x) \underset{x\to a}{\sim} 0$ si et seulement si $\exists V \in \mathscr{V}(a), \forall x \in V,\ f(x) = 0$. Hormis ce cas particulier, un équivalent n'est jamais nul.

Quitte à supposer que les fonctions que l'on considère n'ont que des zéros isolés, nous nous placerons dans un intervalle où les fonctions ne s'annulent pas, sauf peut-être en a.

■ **Exemple 1.3** La fonction $x \mapsto x^2 - 1$ a des zéros isolés, mais la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$ non. ■

Proposition 1.3.2
1. Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$. On a $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell \iff \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.
2. $f \underset{a}{\sim} g \implies \left(\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell\right)$.
3. $f \underset{a}{\sim} g \implies f$ et g sont de même signe au voisinage de a.

Démonstration.

(1) Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$. On a
$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\ell} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \ell.$$

(2) On a $f(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} g(x) \to 1 \cdot \ell = \ell$.

(3) Supposons par exemple $g(x) > 0$ pour $|x-a| \le \alpha$, avec $\alpha > 0$ (les autres cas sont similaires). Il existe une fonction ε définie au voisinage de a telle que
$$f(x) = g(x) + g(x)\varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0.$$
Il existe $0 < \eta < \alpha$ tel que si $|x-a| \le \eta$, alors $|\varepsilon(x)| \le 1/2$. Ainsi, pour $|x-a| \le \eta$, on a $f(x) \ge g(x) - \frac{g(x)}{2} = \frac{g(x)}{2} > 0$. D'où le résultat.

■

Remarque La réciproque du point (2) est fausse : deux fonctions qui ont la même limite ne sont pas forcément équivalentes. Il suffit de considérer les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x$ au voisinage de 0 pour s'en convaincre.

Proposition 1.3.3 Soient f, g définies dans un voisinage de a, sauf peut-être en a, et ne s'annulant pas dans un voisinage de a, sauf peut-être en a. On suppose que $f(x) = \underset{x\to a}{o}\big(g(x)\big)$. Alors,
$$f(x) + g(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x).$$

Démonstration. Il suffit d'écrire $(f+g) - g = f = \underset{a}{o}(g)$, donc $f + g \underset{a}{\sim} g$. ■

1.4 Opérations sur les équivalents

Voici la liste des opérations usuelles « compatibles » avec les équivalents.

Proposition 1.4.1 On considère des fonctions définie dans un voisinage de a, sauf peut-être en a, et ne s'annulant pas dans un voisinage de a, sauf peut-être en a. Alors, on a les propriétés suivantes :
1. Produit : si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\varphi \underset{a}{\sim} \psi$, alors $f\varphi \underset{a}{\sim} g\psi$.
2. Quotient : si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\varphi \underset{a}{\sim} \psi$, alors $\dfrac{f}{\varphi} \underset{a}{\sim} \dfrac{g}{\psi}$.
3. Composition à droite : si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = a$, alors $f(\varphi(x)) \underset{x\to x_0}{\sim} g(\varphi(x))$.

Démonstration. (1) On a $\dfrac{f(x)\varphi(x)}{g(x)\psi(x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)} \cdot \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} \to 1 \cdot 1 = 1$.

(2) Idem.

(3) Comme $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = a$, on a $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(\varphi(x))}{g(\varphi(x))} = \lim\limits_{y\to a} \dfrac{f(y)}{g(y)} = 1$ par composition.

■

En revanche, les opérations suivantes ne sont pas compatibles en général :

- l'addition :

$$f \underset{a}{\sim} g \text{ et } \varphi \underset{a}{\sim} \psi \quad \not\Rightarrow \quad f+\varphi \underset{a}{\sim} g+\psi.$$

- la composition à gauche :

$$f \underset{a}{\sim} g \quad \not\Rightarrow \quad \varphi(f(x)) \underset{a}{\sim} \varphi(g(x)).$$

Exercice 1.2

1. Soient $f(x) = x^2+1$ et $g(x) = -x^2-x$. Donner un équivalent de f, de g et de $f+g$ au voisinage de $+\infty$.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.
   En déduire un équivalent au voisinage de 0 des fonctions :
   — $x \mapsto \ln(1+x)$,
   — $x \mapsto \ln(1-x)$,
   — $x \mapsto \ln(1-x^2)$.
3. Soient $f(x) = x^2+x$ et $g(x) = x^2$. A-t-on $f \sim_{+\infty} g$? A-t-on $e^f \sim_{+\infty} e^g$?

■

Dans certains cas particuliers, la composition à gauche est possible. Le cas de l'addition sera traité dans le paragraphe sur les développements limités.

Proposition 1.4.2 Soient f, g définies dans un voisinage de a, sauf peut-être en a, et ne s'annulant pas dans un voisinage de a, sauf peut-être en a. On suppose que $f \sim_a g$. Alors :

1. Valeur absolue : $|f| \sim_a |g|$.
2. Puissance : pour tout $\alpha > 0$, si g est strictement positive au voisinage de a, alors $f^\alpha \sim_a g^\alpha$. En particulier, $\sqrt{f} \sim_a \sqrt{g}$.
3. Logarithme, sous conditions :
   (a) Si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in [0, +\infty]$ et si $\ell \neq 1$, alors $\ln f(x) \sim_{x\to a} \ln g(x)$.
   (b) Si $\lim_{x\to a} f(x) = 1$, alors $\ln f(x) \sim_{x\to a} (f(x) - 1)$.
4. Exponentielle, sous conditions : si $\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = 0$, alors $e^{f(x)} \sim_{x\to a} e^{g(x)}$.

Démonstration. Les propriétés *1.* et *2.* s'obtiennent par continuité des fonctions $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto x^\alpha$ en 1.

Pour *3(a)* : on écrit

$$\frac{\ln f(x)}{\ln g(x)} - 1 = \frac{\ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\ln g(x)}.$$

Comme $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$, alors $\ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) \to 0$ et $\ln g(x) \to \ln \ell \neq 0$, donc $\ln f(x) \sim_a \ln g(x)$.

Pour *3(b)* : on écrit $f(x) = 1 + (f(x) - 1)$, avec $f(x) - 1 \to 0$, donc $\ln f(x) = \ln(1 + (f(x) - 1)) \sim_{x\to a} f(x) - 1$.

Pour *4* : $\dfrac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = e^{f(x)-g(x)} \to e^0 = 1$, donc $e^f \sim_a e^g$. ■

Exercice 1.3 Soit $f(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$. Donner un équivalent de f et de $\ln f$ au voisinage de $+\infty$. ■

1.5 Application aux calculs de limites

Les équivalents sont un outil qui peut être utile pour calculer des limites a priori indéterminées.

■ **Exemple 1.4** On considère $f(x) = \dfrac{(1+x^2)\tan x}{\sin(2x)}$, au voisinage de $a = 0$. On a les équivalents suivants : $1+x^2 \underset{0}{\sim} 1$, $\tan x \underset{0}{\sim} x$ et $\sin(2x) \underset{0}{\sim} 2x$. Donc $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1\cdot x}{2x} = \dfrac{1}{2}$,et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$. ■

Exercice 1.4 Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers a dans les différents cas suivants.

1. $f(x) = \dfrac{e^{\sin\frac{1}{x}} - 1}{x}$, $a = +\infty$.

2. $f(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\ln x}$, $a = 1$.

■

1.6 Exercices

Exercice 1.5 Donner un équivalent des fonctions suivantes en 0 (0^+ pour k) et en $+\infty$:

1) $f : x \mapsto x^3 + \cos^2(x)$, 2) $g : x \mapsto x^2 + \sin^2(x)$, 3) $h : x \mapsto e^{2x} - x^{3/2}$,

4) $j : x \mapsto j(x) = b + (b+2)x^2 + (b-1)x^3$, avec $b \in \mathbb{R}$, 5) $k : x \mapsto \ln(x) - \sqrt{x}$,

Pour j, discuter suivant le paramètre b.

Exercice 1.6 Déterminer, lorsqu'elle existe, la limite en a des fonctions suivantes définies pour tout réel x :

1) $f_1(x) = \dfrac{\tan(x)(e^x-1)}{(\sin x)^3}$, $a = 0$,

2) $f_2(x) = \dfrac{\ln(1-x^3)}{x^2 - x^2\cos x}$, $a = 0$,

3) $f_3(x) = \dfrac{\ln(x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$, $a = 1$,

4) $f_4(x) = \dfrac{(2-x^2+x^3)\sqrt{e^{\sinh x}-1}}{(\arctan x)^2}$, $a = 0^+$,

5) $f_5(x) = \dfrac{\ln(x) - \ln(x+1)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$, $a = +\infty$,

6) $f_6(x) = (\pi - 2x)\tan x$, $a = \frac{\pi}{2}$,

7) $f_7(x) = x\left(3^{\frac{1}{x}} - 1\right)$, $a = +\infty$.

Exercice 1.7 Donner un équivalent des fonctions suivantes en 0 (0^+ pour k) et en $+\infty$:

1) $f : x \mapsto x^3 + \cos^2(x)$, 2) $g : x \mapsto x^2 + \sin^2(x)$, 3) $h : x \mapsto e^{2x} - x^{3/2}$,

4) $j : x \mapsto b + (b+2)x^2 + (b-1)x^3$, $b \in \mathbb{R}$, 5) $k : x \mapsto \ln(x) - \sqrt{x}$.

Pour j, discuter suivant le paramètre b.

Exercice 1.8 Déterminer, lorsqu'elle existe, la limite en a des fonctions suivantes définies pour tout réel x par :

1) $f_1(x) = \dfrac{\tan(x)(e^x-1)}{(\sin x)^3}$, $a = 0$,

2) $f_2(x) = \dfrac{\ln(1-x^3)}{x^2 - x^2\cos x}$, $a = 0$,

3) $f_3(x) = \dfrac{\ln x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$, $a = 1$,

4) $f_4(x) = \dfrac{(2-x^2+x^3)\sqrt{e^{\sinh x}-1}}{(\arctan x)^2}$, $a = 0^+$,

5) $f_5(x) = \dfrac{\ln x - \ln(x+1)}{\sin(1/x)}$, $a = +\infty$,

6) $f_6(x) = (\pi - 2x)\tan x$, $a = \frac{\pi}{2}$,

7) $f_7(x) = x(3^{1/x} - 1)$, $a = +\infty$.

Exercice 1.9 Donner un équivalent en 0^+ des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto e^{3x} - e^{x^3}$,
2. $g : x \mapsto \ln(\sin x)$,
3. $h : x \mapsto \ln(\cos x)$,
4. $w : x \mapsto \ln\left(\frac{\sin x}{x^2 \cos x}\right)$.

Exercice 1.10 Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{\sqrt{x}}$,
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{x}$, avec $a \in \mathbb{R}_+^*$,
3. $\lim\limits_{x\to 0} (\cosh x)^{1/x^\beta}$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.11 Les trois questions sont indépendantes.

1. Donner un équivalent de la fonction

$$x \mapsto -x + \frac{10}{x} + 2x^2 + \frac{1}{x^3}$$

en 0 et en $+\infty$.

2. Déterminer, si elle existe, la limite en 0 de

$$x \mapsto \frac{(x^2+x)(e^{\sin x}-1)}{\ln(\cos x)}.$$

3. Déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de

$$x \mapsto \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{5x}.$$

Exercice 1.12 **Pour s'entraîner**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\sin(\sqrt{x}) & \text{si } x > 0, \\ -\sqrt{-x}\sinh(\sqrt{-x}) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{D}_f$.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_f$.
3. Étude en 0 :
   (a) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f ce prolongement.
   (b) Étudier la dérivabilité de f en 0 et éventuellement la continuité de f'.

2. Développements limités

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, ni vide ni réduit à un point, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On cherche à comparer f à une fonction polynômiale dans un voisinage de a.

2.1 Définitions et premières propriétés

Définition 2.1.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un **développement limité à l'ordre n en a (DL$_n$ en a)** s'il existe un polynôme à coefficients réels P_n de degré au plus n et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in I$,

$$f(x) = P_n(x-a) + (x-a)^n \varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0,$$

c'est-à-dire

$$f(x) = P_n(x-a) + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^n\right).$$

On définit également la notion de **développement limité à l'ordre n en $\pm\infty$**. On suppose que $\pm\infty$ est une borne de I. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en $\pm\infty$ s'il existe un polynôme à coefficients réels P_n de degré au plus n et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in I$,

$$f(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x}\right)^n \varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to \pm\infty} \varepsilon(x) = 0,$$

c'est-à-dire

$$f(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) + \underset{x \to \pm\infty}{o}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^n\right).$$

À retenir

L'ordre d'un développement limité se lit sur le reste.

■ **Exemple 2.1**

1. $f(x) = 2x + \underset{x \to 0}{o}(x^7)$ est un DL$_7$ de f en 0.
2. $g(x) = x^4 + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$ est un DL$_2$ de g en 0. En effet, $x^4 = \underset{x \to 0}{o}(x^2)$, donc $g(x) = \underset{x \to 0}{o}(x^2)$.
3. $k(x) = 1 + 2(x-3) - (x-3)^4 + \underset{x \to 3}{o}\left((x-3)^4\right)$ est un DL$_4$ de k en 3.
4. $\varphi(x) = 2 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^5} + \underset{x \to -\infty}{o}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^6\right)$ est un DL$_6$ de φ en $-\infty$.

■

Lorsqu'une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$, avec $a \in \mathbb{R}$, admet un développement limité en a, alors, selon l'ordre de ce développement limité, on peut déduire des propriétés de régularité de la fonction.

On peut étendre la définition aux fonctions définies seulement sur $I \setminus \{a\}$. Supposons que f admet un DL_0 en a, c'est-à-dire

$$f(x) = a_0 + \underset{x\to a}{o}(1).$$

En faisant tendre x vers a, on obtient $\lim_{x\to a} f(x) = a_0$. Ainsi, on peut prolonger f par continuité en a en posant $f(a) = a_0$. Dans la suite, on supposera donc que f est définie et continue en a. On supposera également que la fonction ε qui apparaît dans le développement limité est continue en a (avec $\varepsilon(a) = 0$).

Supposons maintenant que f est continue en a et admet un développement limité à l'ordre 1 en a, de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \underset{x\to a}{o}(x-a).$$

On a vu que $a_0 = f(a)$. On obtient donc

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = a_1 + \underset{x\to a}{o}(1) \xrightarrow[x\to a]{} a_1.$$

La fonction f est donc dérivable en a, avec $f'(a) = a_1$.

Réciproquement, si f est dérivable en a, alors

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} f'(a),$$

d'où

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{x\to a}{o}(x-a),$$

et f admet un DL_1 en a.

On en déduit le résultat suivant :

Proposition 2.1.1 Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$, avec $a \in I$.

1. f admet un DL_0 en a si et seulement si f est continue en a.
2. f admet un DL_1 en a si et seulement si f est dérivable en a.

Remarque De la première propriété, on déduit par exemple que la fonction ln n'admet pas de DL en 0, ou encore que la fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de DL en 0, et ce, à aucun ordre.
Attention. Cette propriété ne se généralise pas pour $n \geq 2$.

■ **Exemple 2.2 — DL sans dérivabilité de second ordre.** Soit la fonction

$$f : I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Alors, f admet un DL_2 en 0 mais que f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Développement limité d'ordre 2 en 0.
Pour $x \neq 0$, on a $|f(x)| = |x^3 \sin(1/x)| \leq |x|^3$, donc $f(x) = o(x^2)$ quand $x \to 0$.
Ainsi, f admet un développement limité d'ordre 2 en 0, puisque :

$$f(x) = 0 + 0x + 0x^2 + o(x^2).$$

Dérivabilité en 0.
Pour $x \neq 0$, on a :

$$f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

On calcule la dérivée en 0 :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Donc f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$. Finalement, on a montré :

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Non dérivabilité de f' en 0.
On étudie :

$$\frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \frac{f'(x)}{x} = 3x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Le terme $3x\sin(1/x)$ tend vers 0, mais $\cos(1/x)$ n'a pas de limite (oscillations). Donc la limite de ce quotient n'existe pas et f' n'est pas dérivable en 0.

■

Remarque Ainsi, dès qu'une fonction f admet un DL_n en a, on peut prolonger f par continuité en a. Dans la suite, on supposera donc que f est définie et continue en a. On supposera également que la fonction ε qui apparaît dans le DL est continue en a, avec

$$\varepsilon(a) = \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Théorème 2.1.2 Si f admet un DL_n en a alors le couple (P_n, ε) est unique. Le polynôme P_n s'appelle la **partie principale** de f d'ordre n en a, on la note $P_n(f)$.

Démonstration. Supposons qu'il existe P_n, Q_n deux polynômes de degré $\leq n$ et $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ deux fonctions tels que

$$\begin{cases} f(x) = P_n(x-a) + (x-a)^n \varepsilon_1(x), & \lim_{x\to a} \varepsilon_1(x) = 0, \\ f(x) = Q_n(x-a) + (x-a)^n \varepsilon_2(x), & \lim_{x\to a} \varepsilon_2(x) = 0. \end{cases}$$

Par l'absurde, supposons $P_n \neq Q_n$ et posons

$$P_n(x) - Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k.$$

Comme $P_n - Q_n$ n'est pas le polynôme nul, il existe un plus petit indice

$$p = \min\{k \mid c_k \neq 0\}.$$

On a donc

$$P_n(x) - Q_n(x) = \sum_{k=p}^{n} c_k x^k,$$

et pour tout $x \in I$,

$$\sum_{k=p}^{n} c_k(x-a)^k = (x-a)^n\big(\varepsilon_2(x)-\varepsilon_1(x)\big).$$

En simplifiant par $(x-a)^p$ pour $x \neq a$, on obtient

$$\sum_{k=p}^{n} c_k(x-a)^{k-p} = (x-a)^{n-p}\big(\varepsilon_2(x)-\varepsilon_1(x)\big).$$

En faisant tendre x vers a, le membre de droite tend vers 0 car $\varepsilon_i(x) \to 0$. Le membre de gauche tend alors vers c_p. On a donc $c_p = 0$, ce qui contredit la définition de p.

Ainsi, on conclut que $P_n = Q_n$. Il s'ensuit que $\varepsilon_1(x) = \varepsilon_2(x)$ pour tout $x \neq a$, et comme $\varepsilon_1(a) = \varepsilon_2(a) = 0$, on a $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. ■

Définition 2.1.2 Soit une fonction f admettant un DL_n en a de partie principale $P_n(f)$. On appelle **valuation** de f et on note $val(f)$, la valuation de $P_n(f)$, c'est-à-dire la plus petite puissance de x apparaissant dans le polynôme $P_n(f)$.

■ **Exemple 2.3** Soit $f(x) = -x+x^2+o_{x\to 0}(x^3)$. Alors, la partie principale est $-x+x^2$, l'ordre est 3 et la valuation est 1.

■

Exercice 2.1 La fonction $f_1(x) = \sin(x)$ admet le DL $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$. Quelle est la valuation de la fonction $f_1(x)$?

- ☐ A) 0
- ☐ B) 1
- ☐ C) 2
- ☐ D) 3

Soit $f(x) = e^x - 1 - x$. On considère son développement limité à l'ordre 3 en 0. Quelle est sa partie principale ?

- ☐ A) $x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$
- ☐ B) $\frac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$
- ☐ C) $x + \dfrac{x^2}{2}$
- ☐ D) $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$

On donne le DL à l'ordre 3 de $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.

On donne $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^7)$. Quel est l'ordre de ce développement limité ?

- ☐ A) 0
- ☐ B) 6
- ☐ C) 7
- ☐ D) 8

■

Proposition 2.1.3 Soit I un intervalle symétrique par rapport à l'origine, $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que f admet un DL_n en 0, $n \geq 0$.

1. f admet un DL_p en 0, pour tout entier $p < n$.
2. Si f est paire, alors $P_n(f)$ ne comporte que des puissances paires.
3. Si f est impaire, alors $P_n(f)$ ne comporte que des puissances impaires.

Démonstration. On écrit

$$f(x) = P_n(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

Pour *1.*, pour tous entiers p et k tels que $p < n$ et $p+1 \leq k \leq n$, on a

$$x^k = \underset{x\to 0}{o}(x^p),$$

donc

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + \underset{x\to 0}{o}(x^p).$$

Pour *2.* (le cas impair est similaire), supposons que f est paire, donc

$$f(x) = f(-x) \quad \forall x \in I.$$

On a aussi

$$f(x) = P_n(-x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

Par unicité du développement limité, on obtient

$$P_n(x) = P_n(-x) \quad \forall x \in I,$$

ce qui implique que P_n ne comporte que des puissances paires. ■

2.2 Formule de Taylor et Premiers exemples

Les développements limités suivants s'obtiennent directement.
Soit f une fonction polynomiale de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p, \quad \text{avec } p \in \mathbb{N},\ a_p \neq 0.$$

Alors f admet un DL en 0 à tout ordre. En effet, si $n \geq p$, on prend comme partie principale

$$P_n(f)(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p,$$

qui est un polynôme de degré $\leq n$ et le reste est nul. Si $n < p$, alors

$$x^n \left(a_{n+1} x + \ldots + a_p x^{p-n}\right) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

et on peut donc écrire

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

Finalement, on a

$$\text{si } n \geq p, \quad f \text{ est égale à son } \mathrm{DL}_n \text{ en } 0,$$

et si

$$n < p, \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

Pour tout $x \in]-1,1[$,

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x},$$

avec

$$\frac{x^{n+1}}{1-x} = \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

On en déduit

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n),$$

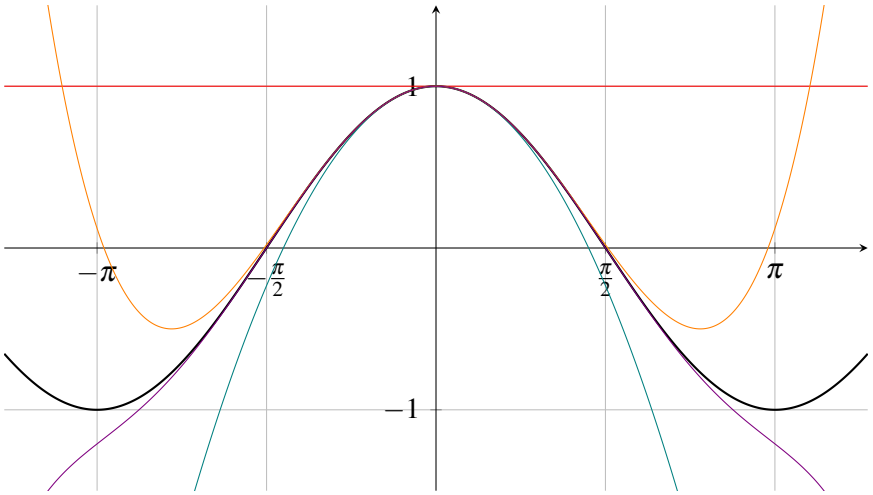
et de même,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

La formule de Taylor-Young, que nous rappelons ici, donne une condition suffisante d'existence.

Théorème 2.2.1 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in I$. Alors, f admet un DL_n en a de la forme

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\big((x-a)^n\big).$$



Démonstration. Nous allons donner une intuition de la preuve inspirée de la vidéo de 3blue1brown : `https://youtu.be/3d6DsjIBzJ4?si=ThF1y-kMzTCWQ4vW`

Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$, et $a \in I$. Nous cherchons à comprendre un développement limité comme une **approximation de f par un polynôme**.

— Un polynôme de degré 0 est une constante. Quelle constante approche f le mieux au voisinage de a ? C'est clair qu'il faut prendre $f(a)$. Et si f est **continue**, alors, $f(x) \to f(a)$ quand $x \to a$. On peut écrire :

$$f(x) = f(a) + \underbrace{f(x) - f(a)}_{=o(1)}.$$

Donc la partie principale est $f(a)$ et me reste est $f(x) - f(a)$.

— Un polynôme de degré 1 est une droite, donc d'équation $mx + p$. Il s'agit de déterminer m et p de sorte que la droite d'équation $y = mx + p$ approche f le mieux au voisinage de a. Quitte à changer la paramétrisation de la droite, cherchons une droite de la forme $y = m(x-a) + p$. Ceci nous facilitera le calcul suivant. Si cette droite doit approcher f autour de a, alors, on doit avoir :

$$f(x) \approx m(x-a) + p \text{ ce qui donne en } a : f(a) = p.$$

Maintenant, si f est dérivable, notez qu'on peut alors déterminer m en dérivant la relation précédente :

$$f'(x) \approx m \text{ ce qui donne en } a : f'(a) = m.$$

On a donc trouvé l'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, qui est l'équation de la tangente en a. On peut maintenant écrire :

$$f(x) = f'(a)(x-a) + f(a) + \Big(f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)\Big),$$

puisque

$$\frac{f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0.$$

— On peut continuer comme ça, un polynôme du second degré est une parabole, d'équation $y = \alpha(x-a)^2 + \beta(x-a) + \gamma$, et nous cherchons encore à déterminer les coefficients. Si cette parabole doit approcher f en a, en faisant tendre x vers a dans l'équation de la parabole, on voit qu'il faut prendre $\gamma = f(a)$. Si on dérive l'équation de la parabole, on trouve :

$$y = 2\alpha(x-a) + \beta.$$

Et si cette droite doit approcher f' en a, on doit avoir $f'(a) = \beta$. Enfin, on peut dériver une seconde fois pour avoir l'équation

$$y = 2\alpha,$$

qui doit approcher f'' en a, donc on doit bien prendre $\alpha = \frac{f''(a)}{2}$. On écrit alors

$$f(x) = \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + f'(a)(x-a) + f(a) + \varepsilon(x-a),$$

avec $\varepsilon(x-a) = f(x) - (\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + f'(a)(x-a) + f(a))$. Pour vérifier rigoureusement que $\varepsilon(x-a)$ est bien $o((x-a)^2)$, il faudrait utiliser la formule des accroissements finis.

■

Exercice 2.2 — (Hors programme). On rappelle la formule des accroissements finis (parfois connue sous le nom de théorème fondamental de l'analyse) :

$$F(b)-F(a)=\int_0^1 F'(\lambda b+(1-\lambda)a)(b-a)d\lambda.$$

Prouver par récurrence la formule suivante :

$$F(x+h)=F(x)+F'(x)h+\cdots+\frac{F^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}h^{(n-1)}+\int_0^1 F^{(n)}(x+\lambda h)h^{(n)}\frac{(1-\lambda)^{n-1}}{(n-1)!}d\lambda.$$

■

Pour les fonctions dont les dérivées successives sont simples à calculer, cette formule permet d'obtenir rapidement leur développement limité. Sinon, on utilisera les théorèmes d'opérations que nous verrons dans le paragraphe suivant.

■ Exemple 2.4

1. La fonction exponentielle, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, admet un DL à tout ordre en 0. Par la formule de Taylor-Young, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\underset{x\to0}{o}(x^n),$$

et

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^n}{n!}+\underset{x\to0}{o}(x^n).$$

2. Les fonctions cosinus et sinus, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, admettent un DL à tout ordre en 0. Par la formule de Taylor-Young, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\underset{x\to0}{o}(x^{2n+1}),$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\underset{x\to0}{o}(x^{2n+2}).$$

Notez bien que pour la fonction cosinus, on a un DL à l'ordre $2n+1$ qui ne comporte que des puissances paires, tandis que pour la fonction sinus, le DL à l'ordre $2n+2$ ne comporte que des puissances impaires.

3. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. La fonction $f_\alpha : x\mapsto(1+x)^\alpha$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, admet un DL à tout ordre en 0. Par la formule de Taylor-Young, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\underset{x\to0}{o}(x^n).$$

■

Exercice 2.3 Utiliser les développements limités précédent pour en déduire les DL à l'ordre 2 en 0 des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \sqrt{1+x} \quad \text{et} \quad x \mapsto \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

■

2.3 Opérations sur les développements limités

Avant de donner les résultats, faisons la remarque suivante. Lorsque l'on veut étudier une fonction f au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on peut se ramener à étudier une fonction auxiliaire en 0 par un changement de variable. Si $a \in \mathbb{R}$, on pose $h = x - a$. Alors $h \to 0$ lorsque $x \to a$, $f(x) = f(a+h)$ et on étudie la fonction $h \mapsto f(a+h)$ au voisinage de 0. Si $a = \pm\infty$, on pose $h = \frac{1}{x}$. Alors $h \to 0$ lorsque $x \to a$, $f(x) = f\left(\frac{1}{h}\right)$, et on étudie $h \mapsto f\left(\frac{1}{h}\right)$ au voisinage de 0.

Dans la suite, nous énoncerons les résultats pour des développements limités au voisinage de 0, ceux concernant d'autres points s'en déduisent par ces changements de variables.

2.3.1 Addition et multiplication par une constante

Théorème 2.3.1 Soit I un intervalle tel que $0 \in I$ ou 0 est une extrémité de I. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions admettant un DL_n en 0. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + \mu g$ admet un DL_n en 0 et

$$P_n(\lambda f + \mu g) = \lambda P_n(f) + \mu P_n(g).$$

Démonstration. On écrit

$$f(x) = P_n(f)(x) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right), \quad g(x) = P_n(g)(x) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right).$$

Par linéarité et propriété 1.1.2, on obtient

$$(\lambda f + \mu g)(x) = \left(\lambda P_n(f)(x) + \mu P_n(g)(x)\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right),$$

qui est un DL_n de $\lambda f + \mu g$ en 0. Par unicité, on a

$$P_n(\lambda f + \mu g) = \lambda P_n(f) + \mu P_n(g).$$

■

■ **Exemple 2.5** Les fonctions cosh et sinh, étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, admettent un DL à tout ordre en 0 donné pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right),$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right).$$

Notez bien que pour cosh, le DL à l'ordre $2n+1$ ne comporte que des puissances paires tandis que pour sinh, le DL à l'ordre $2n+2$ ne comporte que des puissances impaires. ■

2.3.2 Produit

Théorème 2.3.2 Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de 0 et $n \in \mathbb{N}$. Supposons que f et g admettent un DL_n en 0. Alors le produit fg admet un DL_n en 0 et $P_n(fg)$ s'obtient en tronquant à l'ordre n le polynôme $P_n(f) \cdot P_n(g)$.

Démonstration. Pour tout $x \in I$, on écrit

$$f(x) = P_n(f)(x) + x^n \varepsilon_1(x), \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0,$$

$$g(x) = P_n(g)(x) + x^n \varepsilon_2(x), \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= P_n(f)(x)P_n(g)(x) + x^n\left[P_n(f)(x)\varepsilon_2(x) + P_n(g)(x)\varepsilon_1(x) + x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)\right] \\ &= P_n(f)(x)P_n(g)(x) + x^n\varepsilon_3(x), \end{aligned}$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0$.

Le polynôme $Q_n = P_n(f)P_n(g)$ est de degré au plus $2n$, et s'écrit

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} c_k x^k.$$

On a alors

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + x^n \left[\sum_{k=n+1}^{2n} c_k x^{k-n} + \varepsilon_3(x) \right] = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + x^n \varepsilon_4(x),$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_4(x) = 0$.

Cette dernière expression est un DL_n de fg en 0. Par unicité,

$$P_n(fg)(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k.$$

■

■ **Exemple 2.6** Déterminons le DL_5 en 0 de la fonction

$$f : x \mapsto \ln(1+x)\big(\sinh x - \sin x\big).$$

Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$, donc elle admet un DL de tout ordre en 0.

On sait que

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x,$$

donc, en multipliant les DL, tous les termes du DL de

$$\sinh x - \sin x$$

seront multipliés au moins par x. Pour obtenir un DL_5 de f en 0, il suffit donc de partir d'un DL_4 de

$$\sinh x - \sin x.$$

On a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}\big(x^4\big), \quad \sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}\big(x^4\big),$$

donc

$$\sinh x - \sin x = \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}\big(x^4\big) \sim_{x\to 0} \frac{x^3}{3}.$$

Ainsi, pour obtenir un DL_5 de f en 0, il suffit de partir d'un DL_2 de $\ln(1+x)$. On a vu que

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\big(x^2\big).$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\big(x^2\big)\right)\left(\frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}\big(x^4\big)\right) \\ &= \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{6} + \underset{x\to 0}{o}\big(x^5\big). \end{aligned}$$

■

Exercice 2.4

1. Déterminer le DL_2 en 0 de $f : x \mapsto e^x\sqrt{1-x}$.
2. Déterminer le DL_5 en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{x(\operatorname{sh} x - \sin x)}{1+x}$.

■

2.3.3 Composition

Théorème 2.3.3 Soit I et J deux intervalles tels que $0 \in I$, $0 \in J$. Soit $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $f(0) = 0$ et que f et g admettent un DL_n en 0. Alors la composée $g \circ f$ admet un DL_n en 0 et $P_n(g \circ f)$ s'obtient en tronquant à l'ordre n le polynôme $P_n(g) \circ P_n(f)$.

Remarque Si $f(0) = a$ alors, pour obtenir le DL_n en 0 de $g \circ f$, il faut composer le DL_n de g en a avec le DL_n de f en 0.

Exercice 2.5

1. Déterminer le DL_4 en 0 de la fonction $x \mapsto e^{\sin x}$.
2. Déterminer le DL_4 en 0 de la fonction $x \mapsto e^{\cos x}$.

■

2.3.4 Quotient

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de 0 et $n \in \mathbb{N}$. Supposons que f et g admettent un DL_n en 0. La fonction f/g admet-elle un DL en 0 et à quel ordre ?

Premier cas : $val(g) = 0$. Cela signifie que $g(0) \neq 0$.

Comme g ne s'annule pas en 0, f/g est définie dans un voisinage de 0 et on peut alors écrire

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(0)} \times \frac{1}{1+h(x)} \quad \text{où} \quad h(x) = \frac{g(x)-g(0)}{g(0)} \xrightarrow[x\to 0]{} 0,$$

puis en composant le DL à l'ordre n de h avec celui de $T \mapsto \frac{1}{1+T}$ et en multipliant par le DL à l'ordre n de f, on obtient

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{g(0)} \left(P_n(f)(x)\right) \left(1 - P_n(h)(x) + (P_n(h)(x))^2 - (P_n(h)(x))^3 + \cdots + (-1)^n (P_n(h)(x))^n\right) + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

Second cas : $val(g) \neq 0$. Cela signifie que $g(0) = 0$.
Pour savoir si f/g admet un DL en 0, il faut comparer les valuations de f et g.

— Si $val(f) \geq val(g) = p$, on simplifie par x^p pour se ramener au cas précédent et on obtient un DL à l'ordre $n-p$ de f/g.
— Si $val(f) < val(g)$ alors la limite en 0 de f/g est infinie donc f/g n'admet pas de DL en 0.

■ **Exemple 2.7** Déterminons le DL_5 de tan en 0.
On a $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ avec

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \underset{x\to 0}{o}(x^5),$$

et

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \underset{x\to 0}{o}(x^5).$$

Posons

$$u = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \xrightarrow[x\to 0]{} 0,$$

avec $u \sim -x^2/2$ quand $x \to 0$, donc $o_{u\to 0}(u^2) = o_{x\to 0}(x^4)$ et $x\, o_{u\to 0}(u^2) = o_{x\to 0}(x^5)$.
On écrit alors

$$\begin{aligned}
\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)(1 - u + u^2) + \underset{x\to 0}{o}(x^5) \\
&= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^2\right) + \underset{x\to 0}{o}(x^5) \\
&= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^4}{4}\right) + \underset{x\to 0}{o}(x^5) \\
&= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{24}\right) + \underset{x\to 0}{o}(x^5) \\
&= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \underset{x\to 0}{o}(x^5).
\end{aligned}$$

■

À retenir

Pour obtenir le DL en a d'un quotient, on cherche toujours à se ramener à une fonction du type

$$x \mapsto \frac{1}{1+u(x)}, \text{ avec } u(a) = 0,$$

et on compose avec le DL de

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - \ldots + (-1)^n u^n + \underset{u\to 0}{o}(u^n).$$

Exercice 2.6 Les fonctions

$$x \mapsto \frac{e^x - 1 - x}{\cos x - 1} \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{e^x}{\cos x - 1}$$

admettent-elles un DL en 0 ? Si oui, le donner à l'ordre 2. ■

2.3.5 Intégration

Théorème 2.3.4 Soit I un intervalle tel que $0 \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $n \in \mathbb{N}$. Supposons que f admet un DL_n en 0 du type

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

Alors toute primitive F de f sur I admet un DL_{n+1} en 0 de la forme

$$F(x) = F(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1}).$$

NB : La constante d'intégration de la fonction en 0 est nécessairement $F(0)$ par continuité.

■ **Exemple 2.8**

1. La fonction $F : x \mapsto \ln(1+x)$ étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$, elle admet un DL à tout ordre en 0. De plus, pour tout $x \in]-1,+\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F'(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

En intégrant ce DL, on obtient

$$\ln(1+x) = \ln(1+0) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1}),$$

soit plus simplement

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1}).$$

2. La fonction Arctan est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, donc elle admet un DL à tout ordre en 0. De plus, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1}).$$

En intégrant ce DL, on obtient

$$\text{Arctan}x = \text{Arctan}(0) + x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2}),$$

soit

$$\text{Arctan}x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2}).$$

■

2.3.6 Dérivation

À retenir

En général, il est interdit de dériver un DL.

Il se peut que f admette un DL_n en a mais que f' n'admette pas de DL_{n-1} en a. Par exemple, considérons la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On a $f(x) = x + o_{x\to 0}(x)$, donc f admet un DL_1 en 0. De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec

$$f'(x) = 1 + 2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

La dérivée f' n'admet donc pas de limite en 0, d'où f' n'admet pas de DL_0 en 0.

Cependant, si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, $n \geq 1$, alors f' est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ sur I et d'après la formule de Taylor-Young, f' admet un DL_{n-1} en a de la forme

$$f'(x) = f'(a) + f''(a)(x-a) + \ldots + \frac{(f')^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^{n-1}\right).$$

Autrement dit,

$$f'(x) = \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right)' + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^{n-1}\right).$$

Dans ce cas, on peut donc dériver le DL_n de f pour obtenir le DL_{n-1} de f' en a. Cette remarque est intéressante seulement si le DL_n de f en a n'a pas été obtenu à l'aide de la formule de Taylor-Young, c'est-à-dire en calculant les dérivées successives de f (qui sont aussi celles de f') en a.

2.4 Développements limités généralisés

Toutes les fonctions n'admettent pas de développement limité en tout point. On cherche donc à étendre la gamme des fonctions auxquelles on cherche à comparer une fonction donnée.

Définition 2.4.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un **développement limité généralisé à l'ordre n en a (DLG_n en a)** s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \mapsto (x-a)^p f(x)$ admette un DL_{n+p} en a :

$$(x-a)^p f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_p(x-a)^p + a_{p+1}(x-a)^{p+1} + \ldots + a_{n+p}(x-a)^{n+p} + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^{n+p}\right)$$

et

$$f(x) = \frac{a_0}{(x-a)^p} + \frac{a_1}{(x-a)^{p-1}} + \ldots + a_p + a_{p+1}(x-a) + \ldots + a_{n+p}(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

On définit également la notion de **développement limité généralisé à l'ordre n en $\pm\infty$**. On dit que f admet un DLG_n en $\pm\infty$ s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x^p}$ admette un DL_{n+p} en $\pm\infty$. On obtient alors

$$f(x) = a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \ldots + a_p + \frac{a_{p+1}}{x} + \ldots + \frac{a_{n+p}}{x^n} + \underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^n\right).$$

■ **Exemple 2.9** On considère

$f : x \mapsto x e^{\frac{2x}{x^2-1}}$ au voisinage de $\pm\infty$.

On cherche un développement limité généralisé à l'ordre 2 en $\pm\infty$ de f. Traitons d'abord l'exposant. On a

$$\frac{2x}{x^2-1} = \frac{2}{x}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{x}\left(1 + \frac{1}{x^2} + \underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{2}{x} + \frac{2}{x^3} + \underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Notez que cet exposant tends vers 0 lorsque x tends vers l'infini. On doit donc considérer un DL de l'exponentielle en 0. On utilise ensuite le DL d'exponentielle en 0.

$$\begin{aligned} e^{\frac{2x}{x^2-1}} &= 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{2}\frac{4}{x^2} + \frac{1}{6}\frac{8}{x^3} + \underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right) \\ &= 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{10}{3x^3} + \underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right) \end{aligned}$$

On obtient donc

$$f(x) = x + 2 + \frac{2}{x} + \frac{10}{3x^2} + \underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

■

2.5 Applications

2.5.1 Calcul de limites

Comme les équivalents, les développements limités peuvent être utiles pour calculer les limites de formes indéterminées, quand les équivalents ne suffisent pas pour conclure.

Proposition 2.5.1 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I, $a \in I$. Si f admet un DL_n en a et si $val(f) = p$ alors

$$f(x) = a_p(x-a)^p + a_{p+1}(x-a)^{p+1} + \ldots + a_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

avec $a_p \neq 0$ et

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} a_p(x-a)^p.$$

■ **Exemple 2.10** Etudier l'existence de la limite en 0 de $x \mapsto \dfrac{\ln(1+\sin x)-\tan x}{\sin x - \tan x}$.

On a $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$ et $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$, donc

$$\sin x - \tan x = -\frac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{2}$$

et $\ln(1+\sin x) = \ln\left(1 + x - \dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) = x - \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$, donc

$$\ln(1+\sin x) - \tan x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

Ainsi,

$$\frac{\ln(1+\sin x)-\tan x}{\sin x - \tan x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^2/2}{-x^3/2} = \frac{1}{x}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin x)-\tan x}{\sin x - \tan x}$ n'existe pas, mais $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+\sin x)-\tan x}{\sin x - \tan x} = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\ln(1+\sin x)-\tan x}{\sin x - \tan x} = -\infty$. ■

Remarque Comme on ne peut en général pas additionner les équivalents, pour obtenir l'équivalent d'une somme, il suffit d'écrire le DL. **Un équivalent de la somme est alors le premier terme non nul du DL.**

À retenir

On ne somme pas les équivalents, mais on peut sommer les DLs.

2.5.2 Tangente et position relative d'une courbe

Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre $n \geq 2$ en 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

On rappelle que l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 est alors donnée par :

$$y = f(0) + f'(0)x = a_0 + a_1x.$$

Pour étudier la position de la courbe par rapport à sa tangente, on examine le signe de

$$f(x) - (a_0 + a_1 x) \text{ au voisinage de } 0.$$

■ **Exemple 2.11** Soit $f(x) = e^{\sin x}$. Déterminons l'équation de sa tangente en 0 et la position relative de la courbe par rapport à cette tangente.

On commence par développer :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5),$$

puis

$$f(x) = e^{\sin x} = e^{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

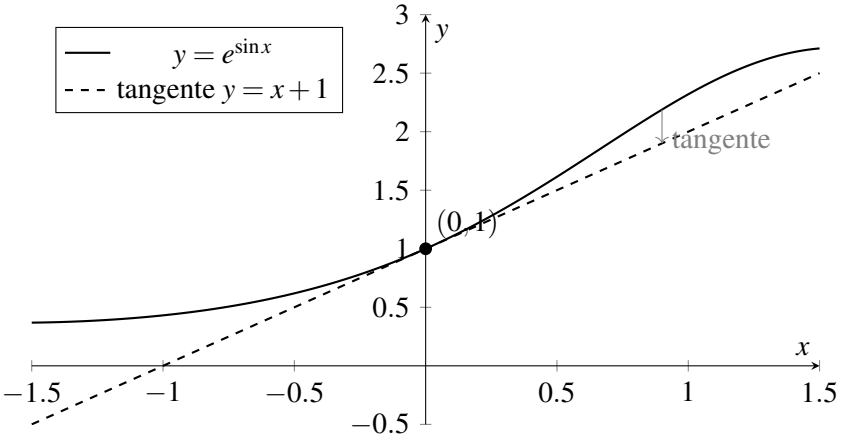
On en déduit :

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad \text{donc la tangente en 0 a pour équation } y = 1 + x.$$

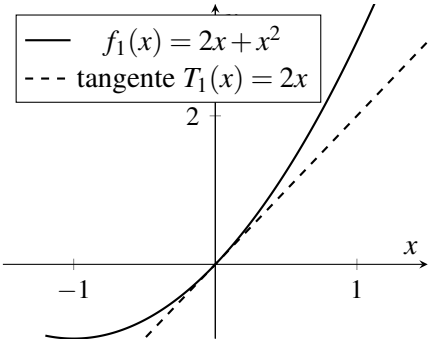
La position relative est donnée par :

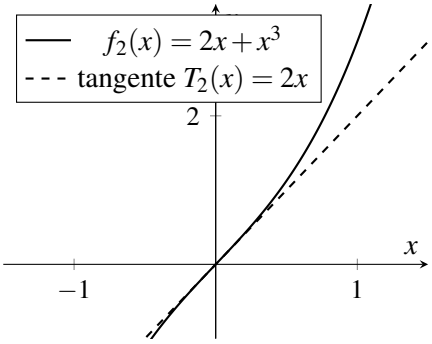
$$f(x) - (1 + x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

ce qui montre que la courbe est au-dessus de sa tangente pour x proche de 0. ■



Remarque La courbe peut aussi traverser sa tangente, si le terme dominant change de signe.





2.5.3 Branches infinies et asymptotes

Dans la suite, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f :

$$\mathscr{C}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathscr{D}_f\}.$$

Définition 2.5.1 On dit que $\mathscr{C}_f$ admet une **branche infinie** lorsque l'une des deux coordonnées x ou $y = f(x)$ tend vers $\pm\infty$.

Pour étudier la forme de ces branches, on cherche souvent à comparer $\mathscr{C}_f$ à une courbe plus simple au voisinage de l'infini : une asymptote.

Définition 2.5.2 — Asymptote et Position relative. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a (fini ou infini). On dit que $\mathscr{C}_f$ admet $\mathscr{C}_g$ pour **asymptote** au voisinage de a si :

$$\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = 0.$$

— Si $f(x) - g(x) \geq 0$ au voisinage de a, alors $\mathscr{C}_f$ est **au-dessus** de $\mathscr{C}_g$.
— Si $f(x) - g(x) \leq 0$ au voisinage de a, alors $\mathscr{C}_f$ est **en dessous** de $\mathscr{C}_g$.

Remarque

— Si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, la droite $x = a$ est une **asymptote verticale**.
— Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$, la droite $y = b$ est une **asymptote horizontale**.
— Si f admet un développement limité généralisé à l'infini :

$$f(x) = a_0x^p + a_1x^{p-1} + \cdots + a_p + \frac{a_{p+1}}{x} + \cdots + \frac{a_{p+n}}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right),$$

alors la courbe $\mathscr{C}_f$ admet pour asymptote celle de la fonction polynomiale :

$$g(x) = a_0x^p + a_1x^{p-1} + \cdots + a_p.$$

À retenir

La position relative de f par rapport à g est donnée par le signe du terme dominant dans $f(x) - g(x)$. Si $a_{p+1} \neq 0$, ce terme est $\frac{a_{p+1}}{x}$.

■ **Exemple 2.12** Déterminer les asymptotes (s'il y en a) de la courbe représentative de

$$f(x) = xe^{\frac{2x}{x^2-1}}$$

au voisinage de $\pm\infty$.

À l'aide d'un développement asymptotique vu précédemment :

$$f(x) = x + 2 + \frac{2}{x} + \frac{10}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

donc

$$f(x) - (x+2) \sim \frac{2}{x} \to 0.$$

La droite d'équation $y = x + 2$ est donc une **asymptote oblique** à la courbe au voisinage de $\pm\infty$.

Comme $\frac{2}{x} > 0$ pour $x \to +\infty$ et < 0 pour $x \to -\infty$, on a :
— $\mathscr{C}_f$ est **au-dessus** de son asymptote pour $x \to +\infty$,
— $\mathscr{C}_f$ est **en dessous** pour $x \to -\infty$.

■

2.6 Exercices

Exercice 2.7 — Test d'assimilation. Sauf mention contraire, n est un entier naturel.

1. Soit f une fonction. Donner la forme du développement limité de f à l'ordre n en a dans les cas suivants :
   (a) $a = 0$
   (b) $a \in \mathbb{R}^*$
   (c) $a = \pm\infty$
2. Soit f une fonction vérifiant au voisinage de 0 :
$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$
Que peut-on dire de la continuité, de la dérivabilité, et de l'existence de la dérivée seconde de f en 0 ?
3. Quelles sont les opérations autorisées lors de la manipulation des développements limités ?
4. Soient f et g deux fonctions telles que
$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n), \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$
   (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. À quel ordre maximal peut-on obtenir un DL de $\lambda f + g$? Le donner.
   (b) Supposons $a_0 \neq 0$ et $b_0 \neq 0$. Même question pour le produit fg.
   (c) Supposons $a_0 = a_1 = b_0 = b_1 = b_2 = 0$. Même question pour fg.
   (d) Supposons $b_0 \neq 0$. Le quotient f/g admet-il un DL en 0 ? Si oui, à quel ordre maximal ? Expliquer comment le calculer.
5. Soient
$$f(x) = 2x^3 + x^4 - x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^5), \quad g(x) = x^2 + 2x^3 - 5x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4).$$
   (a) À quel ordre maximum peut-on calculer le DL de $h(x) = f(x)/g(x)$ au voisinage de 0 ?
   (b) Donner ce DL.
6. Soient
$$f(x) = 3x - 2x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2), \quad g(x) = x^2 - x^3 - x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^5).$$
   (a) À quel ordre maximum peut-on calculer le DL de $h(x) = f(x)g(x)$ au voisinage de 0 ?
   (b) Donner ce DL.
7. (a) Donner le DL en 0 des trois fonctions usuelles à partir desquelles on peut retrouver tous les DL classiques.
   (b) Expliquer comment retrouver les autres DL à partir de ceux-ci.
8. Soient
$$f(x) = 1 + 2x - 3x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2), \quad g(x) = 2 + 3(x-1) + 4(x-1)^2 + \underset{x\to 1}{o}((x-1)^2).$$
   (a) Donner l'équation de la tangente de f en 0 et sa position relative à la courbe.
   (b) Même question pour g en 1.
9. Écrire un développement limité généralisé en $a = 0$ à l'ordre n. Même question en $a = \pm\infty$.
10. Soit
$$f(x) = 2x^2 + 3x - 1 + \frac{5}{x} + \underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$
Donner l'équation de l'asymptote de f en $\pm\infty$ ainsi que sa position relative par rapport à la courbe.

11. Quel lien existe-t-il entre le développement limité en 0 d'une fonction f et un équivalent de f en 0 ?
12. Calculer les limites suivantes :
    (a) $f(x) = x\left(e^{\frac{x}{x^2+1}} - 1\right)$, $x \to +\infty$
    (b) $f(x) = \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^x - 1$, $x \to +\infty$
    (c) $f(x) = \frac{(1-\sin x)\tan x}{\sin(2x)}$, $x \to \pi/2$
    (d) $f(x) = \frac{e^{\arcsin x} - e^{\sin x}}{e^{\arctan x} - e^{\tan x}}$, $x \to 0$
13. Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $f(x) = \frac{1-\cos x}{2+\sin x}$.
14. Calculer le DL à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $f(x) = e^{\sqrt{1+x^2}}$.
15. Calculer le DL à l'ordre 2 au voisinage de 2 de $g(x) = e^x \ln(x-1)$.
16. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et

$$f(x) = \sqrt{x^4 + ax^2 + 1} - b\sqrt{x^4 - 2}.$$

    (a) À quelle condition sur b la courbe de f admet-elle une asymptote affine au voisinage de $+\infty$?
    (b) Pour cette valeur de b, donner l'équation de l'asymptote en $+\infty$ et déterminer, en fonction de a, la position relative de la courbe de f et de son asymptote.

Exercice 2.8 Soit g une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $g'(a) = 0$ et $g^{(3)}(a) \neq 0$.

1. Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 de g au voisinage de a.
2. En déduire un équivalent en a de $g(x) - g(a)$.

Exercice 2.9 Écrire les développements limités à l'ordre n au voisinage de a des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = 2x^3 + 4x + 1$, $a = 1$, $n = 0, 1, 3, 5$,
2. $f_2(x) = \frac{\sinh x - x}{x^3}$, $a = 0$, $n = 2, 3$,
3. $f_3(x) = \frac{1}{\cos x}$, $a = 0$, $n = 4$,
4. $f_4(x) = \frac{x}{\sin x}$, $a = 0$, $n = 2$,
5. $f_5(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, $a = 1$, $n = 3$,
6. $f_6(x) = \sqrt{1 + \sin x}$, $a = 0$, $n = 2$,
7. $f_7(x) = \sqrt{1 + \cosh x}$, $a = 0$, $n = 4$,
8. $f_8(x) = (1+2x)^{1/x}$, $a = 0$, $n = 2$,
9. $f_9(x) = \cos(e^x)$, $a = 0$, $n = 3$.

Exercice 2.10 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant le développement limité au voisinage de 1 :

$$f(x) = 1 + 2(x-1) - 4(x-1)^2 + o\big((x-1)^2\big).$$

1. Quelle est l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 ?
2. Quelle est la position relative de la courbe et de sa tangente au voisinage de 1 ?
3. Tracer l'allure de la courbe au voisinage de 1.

Exercice 2.11 Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de 0, avec développements limités :

$$f(x) = 2x + 3x^3 + o(x^3), \quad g(x) = x^2 - x^4 + o(x^5).$$

1. À quel ordre peut-on écrire le développement limité du produit $h = fg$ en 0 ?

2. Écrire ce développement limité.

Exercice 2.12 Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x+\ln(\cos x)}{x^4}$,
2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh x - x\cosh x}{x(1+x-e^x)}$,
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x - e\right)$,
4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\arcsin x}-e^{\sin x}}{e^{\arctan x}-e^{\tan x}}$.

Exercice 2.13

1. Écrire les développements limités en 1 à l'ordre 3 de :

$$f(x)=\sqrt{x}, \quad g(x)=e^{\sqrt{x}}.$$

2. Donner le développement limité à l'ordre 3 en tout point $x_0 \in (0,\pi)$ de

$$h(x)=\ln(\sin x).$$

En déduire le développement limité à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 2.14

1. Donner le développement généralisé en $+\infty$ à l'ordre 3 de

$$f(x)=\frac{x^3+2}{x-1}.$$

En déduire les branches infinies de la courbe de f.

2. Donner le développement généralisé en 0 à l'ordre 2 de

$$g(x)=\frac{\cos x}{\ln(1+x)}.$$

En déduire l'équation d'une asymptote à la courbe de g en 0 ainsi que la position relative des deux courbes.

Exercice 2.15 Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$ où

$$f(x)=\sqrt{x^4-x^3+x-1}-(x+1)\sqrt{x^2+1}.$$

Exercice 2.16 **Pour s'entraîner**

1. Soient $a,b,c \in \mathbb{R}$.
   (a) Calculer le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction

$$f_1(x)=\cos x+\sin x-a-b\ln(1+x)+c\sin^2 x.$$

   (b) Déterminer selon les valeurs de a,b,c la limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{f_1(x)}{x^2}.$$

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en $+\infty$ de

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^4+x+1}}{x^2}.$$

3. Étudier les branches infinies de la courbe définie par

$$g(x) = \frac{x}{1+e^{1/x}}.$$

(On écrira le développement limité à l'ordre 3 en $+\infty$ de $x \mapsto \frac{1}{1+e^{1/x}}$.)

Exercice 2.17 **Pour aller plus loin**

Déterminer les réels a, b tels que la fonction

$$f(x) = \sin x - \frac{x+ax^3}{1+bx^2}$$

soit au voisinage de 0 un infiniment petit d'ordre maximal. Donner dans ce cas un équivalent de f en 0.

3. Déterminants

3.1 Rappels sur les espaces vectoriels et applications linéaires

3.1.1 Espaces vectoriels.

La notion de vecteur est beaucoup plus générale que celle d'une simple flèche dans le plan ou dans l'espace. Dans ce cours, on peut voir un vecteur comme n'importe quel objet que l'on peut additionner à un autre objet du même type et multiplier par un nombre. On peut ainsi dilater un vecteur en le multipliant par un scalaire, et combiner plusieurs vecteurs en les additionnant. Ces deux opérations sont à la base de la notion d'espace vectoriel.

▪ **Exemple 3.1** On sait faire le calcul suivant : $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. On sait également additionner les fonction $x \mapsto x^2 + 1$ et $x \mapsto \cos(x)$. Donc les fonctions sont aussi des vecteurs. ▪

Plus précisément, un *espace vectoriel réel* est un ensemble E sur lequel on peut définir une addition, et d'une multiplication par un scalaire réel, qui permet de multiplier un élément de E par un nombre réel. Ces opérations doivent vérifier un certain nombre de propriétés naturelles : l'addition est associative et commutative, il existe un vecteur nul 0_E, etc..

Définition 3.1.1 — Espace vectoriel. On appelle *espace vectoriel réel* un ensemble E muni de deux opérations :

— une *addition* qui, à deux éléments $u, v \in E$, associe un élément $u+v \in E$;
— une *multiplication par un scalaire* qui, à tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $u \in E$, associe un élément $\lambda u \in E$.

Ces opérations doivent vérifier les propriétés suivantes, pour tous $u, v, w \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

1. $(u+v)+w = u+(v+w)$ (associativité) ;
2. $u+v = v+u$ (commutativité) ;
3. il existe un élément $0_E \in E$ tel que $u+0_E = u$ (élément neutre) ;
4. pour tout $u \in E$, il existe $-u \in E$ tel que $u+(-u) = 0_E$ (opposé) ;
5. $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$;
6. $(\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u$;
7. $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$;
8. $1 \cdot u = u$.

▪ **Exemple 3.2 — Quelques espaces vectoriels usuels.** Les espaces vectoriels apparaissent dans de nombreux domaines des mathématiques. Parmi les exemples les plus courants, on trouve :

— Le premier exemple est $\mathbb{R}^2$. Ses éléments sont les couples (x, y), $x, y \in \mathbb{R}$, que l'on peut additionner et multiplier par un nombre : $(x,y)+(x',y') = (x+x', y+y')$, $\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$.
— Cet exemple généralise naturellement à $\mathbb{R}^n$, l'ensemble des vecteurs à n coordonnées réelles :

$(x_1,\dots,x_n)$, $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$.

— L'ensemble des polynômes à coefficients réels, $\mathbb{R}[X]$:

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n.$$

Plus généralement, l'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est également un espace vectoriel.

— L'ensemble des fonctions définies sur un ensemble A et à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$\mathscr{F}(A,\mathbb{R}) = \{f : A \to \mathbb{R}\}.$$

L'addition et la multiplication par un scalaire sont définies point par point :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

— L'ensemble $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[a,b]$, ainsi que l'ensemble $\mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ des fonctions continûment dérivables.

— L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices réelles à n lignes et p colonnes.

— L'ensemble des suites réelles

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(u_n)_{n\geq 0} : u_n \in \mathbb{R}\},$$

avec des opérations définies terme à terme.

— L'ensemble des solutions d'une équation différentielle *linéaire homogène*. Par exemple,

$$\left\{f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f'' + f = 0\right\}$$

est un espace vectoriel.

Dans tous ces exemples, les éléments de l'espace vectoriel sont de nature différente : vecteurs, polynômes, fonctions, matrices ou suites. La notion d'espace vectoriel permet de traiter ces différents objets dans un cadre mathématique commun. ∎

∎ **Exemple 3.3 — Un exemple moins standard.** Pourquoi introduire une notion aussi abstraite qu'un espace vectoriel ? Après tout, on pourrait penser qu'un vecteur est nécessairement un objet de la forme

$$(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

avec les opérations usuelles. L'exemple suivant montre que la notion d'espace vectoriel peut apparaître dans des contextes beaucoup moins évidents.

Considérons l'ensemble

$$E = (-1,1).$$

Pour $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, définissons les opérations

$$x \oplus y = \frac{x+y}{1+xy}$$

et

$$\alpha \odot x = \frac{(1+x)^\alpha - (1-x)^\alpha}{(1+x)^\alpha + (1-x)^\alpha}.$$

Bien que ces opérations soient très différentes de l'addition et de la multiplication usuelles des nombres réels, on peut vérifier qu'elles satisfont les axiomes d'un espace vectoriel. Ainsi, muni de ces deux opérations, l'ensemble $(-1,1)$ peut être considéré comme un espace vectoriel.

Cet exemple peut sembler artificiel au premier abord, mais ces formules apparaissent naturellement en relativité restreinte. Si l'on interprète x et y comme des vitesses exprimées dans une unité où la vitesse de la lumière vaut 1, la loi

$$x \oplus y = \frac{x+y}{1+xy}$$

correspond à la composition relativiste des vitesses. Elle garantit notamment que, si $|x| < 1$ et $|y| < 1$, alors la vitesse résultante reste également strictement inférieure à 1.

Cet exemple illustre ainsi l'intérêt de l'abstraction : des objets et des opérations qui semblent a priori très différents peuvent posséder la même structure mathématique. Une fois cette structure identifiée, les résultats généraux de l'algèbre linéaire peuvent être appliqués dans des contextes très variés. ∎

Vérifier directement que l'on a affaire à un espace vectoriel peut sembler fastidieux : il faudrait, en principe, vérifier l'ensemble des axiomes de la définition précédente. Cependant, lorsque l'on considère un sous-ensemble d'un espace vectoriel déjà connu, la situation est beaucoup plus simple. En effet, les propriétés algébriques de l'addition et de la multiplication par un scalaire sont déjà vérifiées dans l'espace vectoriel de départ. Il suffit alors essentiellement de vérifier que le sous-ensemble considéré est stable par *combinaison linéaire*.

Proposition 3.1.1 — Critère de sous-espace vectoriel. Soit E un espace vectoriel et soit $F \subset E$. Alors F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

$$F \neq \varnothing$$

et, pour tous $u, v \in F$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\lambda u + \mu v \in F.$$

Autrement dit, dès que l'on prend deux éléments de F et qu'on les combine linéairement, le résultat appartient encore à F.

En pratique, ce critère permet donc de vérifier qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel sans avoir à reprendre tous les axiomes de la définition d'un espace vectoriel.

Remarque [Combinaison linéaire] Soient $u_1, \dots, u_n$ des vecteurs d'un espace vectoriel E et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Toute expression de la forme

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n$$

est appelée une *combinaison linéaire* des vecteurs $u_1, \dots, u_n$.
Les nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont appelés les *coefficients* de la combinaison linéaire.

Définition 3.1.2 — Famille libre. Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. On dit que cette famille est *libre* si la seule combinaison linéaire des u_i qui est égale au vecteur nul est la combinaison triviale :

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Autrement dit, aucun des vecteurs de la famille ne peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres.

Définition 3.1.3 — Famille génératrice. Soit $(u_1,\dots,u_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. On dit que cette famille est *génératrice* de E si tout vecteur de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire des u_i :

$$\forall x \in E, \qquad \exists \lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R} \quad \text{tels que} \quad x = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n.$$

Autrement dit, les vecteurs $u_1,\dots,u_n$ permettent de construire tous les vecteurs de l'espace E par combinaison linéaire.

3.1.2 Une base pour décrire les vecteurs.

On arrive naturellement à la notion de *base* : une base est une famille de vecteurs qui permet de construire tous les vecteurs de l'espace par combinaison linéaire, de manière unique. Le choix d'une base permet ainsi de décrire chaque vecteur à l'aide de ses *coordonnées*.

Par exemple, considérons $\mathbb{R}^3$ et sa base canonique

$$\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3),$$

où

$$e_1 = (1,0,0), \qquad e_2 = (0,1,0), \qquad e_3 = (0,0,1).$$

Tout vecteur $x = (x_1,x_2,x_3)$ peut alors s'écrire de manière unique sous la forme

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3.$$

Les nombres x_1, x_2 et x_3 sont appelés les *coordonnées* de x dans la base $\mathscr{E}$. On note

$$[x]_{\mathscr{E}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Mais la base canonique n'est pas la seule base possible. Par exemple, considérons les vecteurs

$$u_1 = (1,1,0), \qquad u_2 = (1,0,1), \qquad u_3 = (0,1,1).$$

Ces trois vecteurs forment également une base de $\mathbb{R}^3$, que nous noterons

$$\mathscr{U} = (u_1, u_2, u_3).$$

Tout vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ peut donc également s'écrire, de manière unique, sous la forme

$$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3.$$

Les nombres α_1, α_2 et α_3 sont alors les coordonnées de x dans la base $\mathscr{U}$:

$$[x]_{\mathscr{U}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Pour comprendre comment déterminer ces nouvelles coordonnées, développons cette expression :

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(1,0,1) + \alpha_3(0,1,1) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3). \end{aligned}$$

Ainsi, si $x = (x_1, x_2, x_3)$, ses coordonnées dans la base $\mathscr{U}$ doivent vérifier

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = x_1, \\ \alpha_1 + \alpha_3 = x_2, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = x_3. \end{cases}$$

En résolvant ce système, on obtient

$$\alpha_1 = \frac{x_1 + x_2 - x_3}{2}, \qquad \alpha_2 = \frac{x_1 - x_2 + x_3}{2}, \qquad \alpha_3 = \frac{-x_1 + x_2 + x_3}{2}.$$

Prenons par exemple le vecteur $x = (2,4,6)$. Dans la base canonique, ses coordonnées sont simplement

$$[x]_{\mathscr{E}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Dans la base $\mathscr{U}$, les formules précédentes donnent

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = 2, \qquad \alpha_3 = 4.$$

Ainsi,

$$[x]_{\mathscr{U}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

ce qui signifie que

$$x = 0u_1 + 2u_2 + 4u_3.$$

En effet, $2u_2 + 4u_3 = 2(1,0,1) + 4(0,1,1) = (2,4,6)$. Le vecteur x est donc exactement le même dans les deux cas, mais ses coordonnées dépendent de la base utilisée. Passer d'une base à une autre revient à effectuer un *changement de coordonnées*.

Dans notre exemple, la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de la base $\mathscr{U}$ exprimés dans la base canonique est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle permet de passer des coordonnées dans la base $\mathscr{U}$ aux coordonnées dans la base canonique :

$$[x]_{\mathscr{E}} = P[x]_{\mathscr{U}}.$$

Dans l'autre sens, on utilise la matrice inverse :

$$[x]_{\mathscr{U}} = P^{-1}[x]_{\mathscr{E}},$$

où

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le choix d'une base n'est donc pas seulement une question de notation. Dans certains problèmes, une base particulière permet de simplifier considérablement les calculs. Par exemple, on cherchera souvent une base dans laquelle une matrice est diagonale, ou dans laquelle une application linéaire, une forme quadratique ou un système d'équations prend une forme particulièrement simple.

3.1.3 Application linéaire

Définition 3.1.4 — Application linéaire. Soient E et F deux espaces vectoriels. Une application

$$f : E \longrightarrow F$$

est dite *linéaire* si, pour tous $u, v \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

Autrement dit, une application linéaire préserve les combinaisons linéaires. En particulier,

$$f(u+v) = f(u) + f(v) \qquad \text{et} \qquad f(\lambda u) = \lambda f(u).$$

Lorsque E et F sont de dimension finie, une application linéaire peut être représentée par une matrice. L'idée est simple : il suffit de connaître l'image des vecteurs d'une base de E. Soit

$$\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$$

une base de E et

$$\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_p)$$

une base de F. Pour chaque vecteur e_j de la base de départ, on peut écrire

$$f(e_j) = a_{1j} f_1 + \cdots + a_{pj} f_p.$$

La matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

est appelée la *matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$*. La j-ième colonne contient donc les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{C}$.

Si $x \in E$ a pour coordonnées

$$[x]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

alors les coordonnées de son image sont obtenues par multiplication matricielle :

$$[f(x)]_{\mathscr{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f)\,[x]_{\mathscr{B}}.$$

Ainsi, *une fois les bases choisies, étudier une application linéaire revient à étudier une matrice*. Le choix des bases peut d'ailleurs permettre de trouver une matrice particulièrement simple, ce qui explique l'importance des changements de base. En section 5.5, vous trouverez un exemple détaillé de changement de base.

Théorème 3.1.2 — Théorème du rang. Soit

$$f : E \longrightarrow F$$

une application linéaire, où E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie. Alors

$$\dim(E) = \dim\big(\ker(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big).$$

Autrement dit,

$$\dim(E) = \dim\big(\ker(f)\big) + \mathrm{rang}(f),$$

où le *rang* de f est la dimension de son image.

Ce résultat permet de décomposer la dimension de l'espace de départ en deux parties : les directions qui sont « perdues » par l'application linéaire, c'est-à-dire les vecteurs du noyau, et les directions qui subsistent dans l'image.

Proposition 3.1.3 — Injectivité et noyau. Soit

$$f : E \longrightarrow F$$

une application linéaire. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$f \text{ est injective} \quad \Longleftrightarrow \quad \ker(f) = \{0_E\}.$$

En particulier, si E et F sont deux espaces vectoriels de même dimension finie, les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$f \text{ est inversible} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ est injective} \quad \Longleftrightarrow \quad \ker(f) = \{0_E\}.$$

Démonstration. Supposons tout d'abord que f soit injective. Soit $x \in \ker(f)$. Alors

$$f(x) = 0_F.$$

Or, comme f est linéaire, $f(0_E) = 0_F$. On a donc $f(x) = f(0_E)$. L'injectivité de f implique alors que $x = 0_E$. Ainsi,

$$\ker(f) = \{0_E\}.$$

Réciproquement, supposons que $\ker(f) = \{0_E\}$. Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Par linéarité,

$$f(x-y) = f(x) - f(y) = 0_F.$$

Ainsi, $x - y \in \ker(f)$. Comme le noyau est réduit à 0_E, on obtient

$$x - y = 0_E,$$

et donc $x = y$. L'application f est donc injective. Enfin, si E et F sont de même dimension finie, une application linéaire injective est également surjective. Ainsi, f est bijective et donc inversible. ■

3.2 Déterminant de deux vecteurs en dimension 2

Soit $\mathscr{E} = (e_1, e_2)$ une base de E, un espace vectoriel de dimension 2. Soient U et V deux vecteurs de E. On appelle **déterminant de U et V**, noté $\det(U,V)$, l'aire *orientée* du parallélogramme défini par les vecteurs U et V dans la base $\mathscr{E}$.

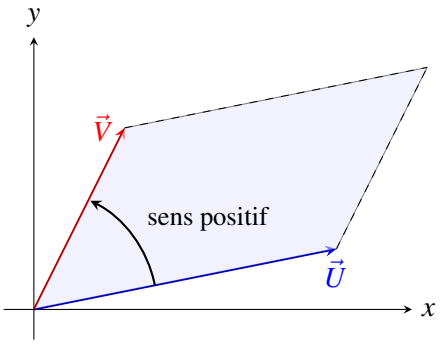


FIGURE 3.1 – Aire orientée du parallélogramme défini par les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$

Proposition 3.2.1 Soient U, V et W trois vecteurs de E.

1. $\det_{\mathscr{E}}(e_1, e_2) = 1$.
2. Le couple (U,V) est libre si et seulement si $\det_{\mathscr{E}}(U,V) \neq 0$.
3. Pour tous réels α et β, on a :
$$\det_{\mathscr{E}}(\alpha U, V) = \alpha \det_{\mathscr{E}}(U,V), \quad \det_{\mathscr{E}}(U, \beta V) = \beta \det_{\mathscr{E}}(U,V).$$
4. Linéarité :
$$\det_{\mathscr{E}}(U, V+W) = \det_{\mathscr{E}}(U,V) + \det_{\mathscr{E}}(U,W), \quad \det_{\mathscr{E}}(U+W, V) = \det_{\mathscr{E}}(U,V) + \det_{\mathscr{E}}(W,V).$$
5. Antisymétrie :
$$\det_{\mathscr{E}}(V,U) = -\det_{\mathscr{E}}(U,V).$$

■ **Exemple 3.4 — Présentation du calcul d'un déterminant 2×2.**

Soient $U = u_1 e_1 + u_2 e_2$ et $V = v_1 e_1 + v_2 e_2$. On va calculer $\det_{\mathscr{E}}(U,V)$ à l'aide de la bilinéarité :

$$\begin{aligned} \det_{\mathscr{E}}(U,V) &= \det_{\mathscr{E}}(u_1 e_1 + u_2 e_2, v_1 e_1 + v_2 e_2) \\ &= u_1 v_1 \det_{\mathscr{E}}(e_1, e_1) + u_1 v_2 \det_{\mathscr{E}}(e_1, e_2) + u_2 v_1 \det_{\mathscr{E}}(e_2, e_1) + v_1 v_1 \det_{\mathscr{E}}(e_2, e_2). \end{aligned}$$

L'aire des parallélogrammes e_1, e_1 et e_2, e_2 est nulle. De plus, en utilisant l'antisymétrie, on a $\det_{\mathscr{E}}(e_2, e_1) = -\det_{\mathscr{E}}(e_1, e_2)$. Enfin, par définition, $\det_{\mathscr{E}}(e_1, e_2) = 1$. Finalement, on a

$$\det_{\mathscr{E}}(U,V) = u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

■

À retenir

Si $U = u_1 e_1 + u_2 e_2 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $V = v_1 e_1 + v_2 e_2 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, alors

$$\det_{\mathscr{E}}(U,V) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

3.3 Déterminant de trois vecteurs en dimension 3

Soit $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un espace vectoriel E de dimension 3. Soient U, V et W trois vecteurs de E. On note $S(U,V,W)$ le volume "orienté" du parallélépipède défini par les vecteurs U, V et W.

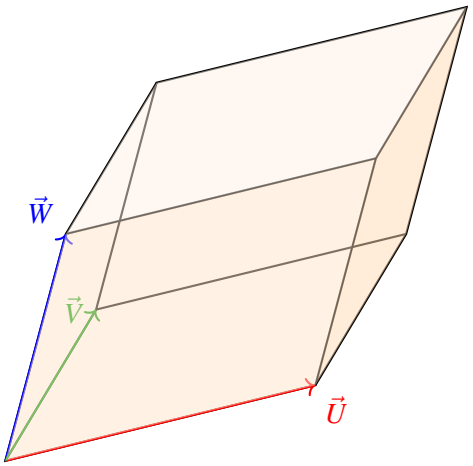


FIGURE 3.2 – Volume orienté du parallélépipède défini par les vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$

Proposition 3.3.1 Soit U,V et W trois vecteurs de E.

1. $\det_{\mathscr{E}}(e_1,e_2,e_3)=1$.
2. (U,V,W) est libre si et seulement si $\det_{\mathscr{E}}(U,V,W)\neq 0$.
3. $\det_{\mathscr{E}}$ est une forme 3-linéaire alternée.
4. $\det_{\mathscr{E}}(V,U,W)=-\det_{\mathscr{E}}(U,V,W)$ et $\det_{\mathscr{E}}(V,W,U)=\det_{\mathscr{E}}(U,V,W)$.

■ **Exemple 3.5 — Présentation du calcul d'un déterminant** 3×3**.** Posons

$$U=u_1e_1+u_2e_2+u_3e_3\,,\quad V=v_1e_1+v_2e_2+v_3e_3\,,\quad W=w_1e_1+w_2e_2+w_3e_3\,.$$

Montrons que

$$\det_{\mathscr{E}}(U,V,e_3)=\begin{vmatrix}u_1&v_1&0\\u_2&v_2&0\\u_3&v_3&1\end{vmatrix}=u_1v_2-u_2v_1\,.$$

On a

$$\begin{aligned}\det_{\mathscr{E}}(U,V,e_3)&=\det_{\mathscr{E}}(u_1e_1+u_2e_2+u_3e_3,V,e_3)\\&=u_1\det_{\mathscr{E}}(e_1,V,e_3)+u_2\det_{\mathscr{E}}(e_2,V,e_3)+u_3\det_{\mathscr{E}}(e_3,V,e_3)\,.\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\det_{\mathscr{E}}(e_1,V,e_3)&=\det_{\mathscr{E}}\left(e_1,v_1e_1+v_2e_2+v_3e_3,e_3\right)\\&=v_1\det_{\mathscr{E}}(e_1,e_1,e_3)+v_2\det_{\mathscr{E}}(e_1,e_2,e_3)+v_3\det_{\mathscr{E}}(e_1,e_3,e_3)\\&=v_2\,,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\det_{\mathscr{E}}(e_2,V,e_3)&=v_1\det_{\mathscr{E}}(e_2,e_1,e_3)+v_2\det_{\mathscr{E}}(e_2,e_2,e_3)+v_3\det_{\mathscr{E}}(e_2,e_3,e_3)\\&=-v_1\,.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\det_{\mathscr{E}}(U,V,e_3)=u_1v_2-u_2v_1\,.$$

De même, on montre que

$$\begin{vmatrix}u_1&0&w_1\\u_2&1&w_2\\u_3&0&w_3\end{vmatrix}=u_1w_3-u_3w_1\quad\text{et}\quad\begin{vmatrix}1&v_1&w_1\\0&v_2&w_2\\0&v_3&w_3\end{vmatrix}=v_2w_3-v_3w_2\,.$$

Au final, si on pose

$$U=u_1e_1+u_2e_2+u_3e_3\,,\quad V=v_1e_1+v_2e_2+v_3e_3\,,\quad W=w_1e_1+w_2e_2+w_3e_3\,,$$

alors

$$\det_{\mathscr{E}}(U,V,W)=\begin{vmatrix}u_1&v_1&w_1\\u_2&v_2&w_2\\u_3&v_3&w_3\end{vmatrix}=u_1v_2w_3+u_2v_3w_1+u_3v_1w_2-u_2v_1w_3-u_1v_3w_2-u_3v_2w_1\,.$$

■

Remarque On peut grouper les termes par rapport à la première colone :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} &= u_1v_2w_3 + u_2v_3w_1 + u_3v_1w_2 - u_2v_1w_3 - u_1v_3w_2 - u_3v_2w_1 \\ &= u_1(v_2w_3 - v_3w_2) - u_2(v_1w_3 - v_3w_1) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1) \\ &= u_1\begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - u_2\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_3\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

On peut également faire de même par rapport à la première ligne :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} &= u_1v_2w_3 + u_2v_3w_1 + u_3v_1w_2 - u_2v_1w_3 - u_1v_3w_2 - u_3v_2w_1 \\ &= u_1(v_2w_3 - v_3w_2) - v_1(u_2w_3 - u_3w_2) + w_1(u_2v_3 - u_3v_2) \\ &= u_1\begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - v_1\begin{vmatrix} u_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 \end{vmatrix} + w_1\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

À retenir

Le déterminant se calcule de façon récursive. On peut calculer un déterminant d'une matrice $n \times n$ à l'aide de n déterminants de taille $(n-1) \times (n-1)$.

Exercice 3.1

1. Quel est le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
   - ☐ 13
   - ☐ 11
   - ☐ 17
   - ☐ 7
2. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ a un déterminant égal à :
   - ☐ 1
   - ☐ 2
   - ☐ 0
   - ☐ -2
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Alors son déterminant vaut
   - ☐ 2
   - ☐ 8
   - ☐ 1
   - ☐ 4
4. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ a un déterminant nul.
   - ☐ Vrai
   - ☐ Faux

■

3.4 Déterminant de n vecteurs en dimension n

Soit $\mathscr{E} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E, un espace vectoriel de dimension n. Soit $V_1, V_2, \cdots, V_n$ n vecteurs de E. On démontre que l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est un espace vectoriel de dimension 1. On appelle **déterminant** et on note $\det_{\mathscr{E}}$ la forme n-linéaire alternée sur E qui prend la valeur 1 en $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$.

Proposition 3.4.1

1. $\det_{\mathscr{E}}$ est une forme n-linéaire alternée.
2. $\det_{\mathscr{E}}(e_1, e_2, \cdots, e_n) = 1$.
3. $(V_1, V_2, \cdots, V_n)$ est libre si et seulement si $\det_{\mathscr{E}}(V_1, V_2, \cdots, V_n) \neq 0$.
4. Si pour tout $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $V_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ avec tous les a_{ij} dans $\mathbb{R}$, alors

$$\det_{\mathscr{E}}(V_1, V_2, \cdots, V_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n},$$

où S_n est le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \cdots, n\}$.

3.5 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n

Définition 3.5.1 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$. On note a_{ij} ses coefficients. On appelle déterminant de la matrice A le scalaire défini par :

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} = \det_{\mathscr{E}}(C_1, C_2, \ldots, C_n), \tag{3.1}$$

où les C_i sont les colonnes de A. On note :

$$\text{pour } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \text{alors} \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \in \mathbb{R}.$$

Proposition 3.5.1 Le déterminant de A est une forme n-linéaire alternée par rapport aux colonnes de A. En conséquence :

1. Échanger deux colonnes de la matrice A change le signe du déterminant.
2. Ajouter à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes ne modifie pas le déterminant.
3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

Théorème 3.5.2 Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\det({}^t A) = \det A$.

Conséquence immédiate de ce théorème :

Proposition 3.5.3 Le déterminant de A est une forme n-linéaire par rapport aux lignes de A, donc :

1. Échanger deux lignes de la matrice A change le signe du déterminant.
2. Ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes ne modifie pas le déterminant.

■ **Exemple 3.6** On va calculer le déterminant de la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note les lignes :

$$L_1 = (1,\ 2,\ 3,\ 4), \quad L_2 = (1,\ 1,\ 1,\ 1), \quad L_3 = (0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

Et on remarque que $L_1 = L_2 + L_3$. On peut conclure que $\det A = 0$ par la proposition 3.4.1, puisqu'alors, les lignes forment une famille liée. Sinon, on peut faire un calcul explicite. Comme on ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant des combinaison linéaires des autres lignes, on fait l'opération

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3$$

ce qui donne

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

en utilisant la formule récursive discutée en remarque plus haut.

■

3.6 Développement d'un déterminant suivant une ligne ou une colonne

En utilisant la définition 3.5.1 et le caractère alterné du déterminant, on montre le résultat suivant :

Lemme 3.6.1 Soit A une matrice dont la colonne j ne contient que des 0 sauf un 1 situé sur la ligne i. Alors :

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & \mathbf{1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \det D_{ij}, \end{aligned}$$

où D_{ij} est la matrice obtenue à partir de A en supprimant la ligne i et la colonne j.

Proposition 3.6.2 — Développement suivant une colonne. Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in M_n(K)$. On a

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{ij} a_{ij},$$

où Δ_{ij} est le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en enlevant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Démonstration. On écrit la matrice A sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2j} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{ij} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

On considère la $j^{\text{ème}}$ colonne de A :

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_{1j} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_{2j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{nj} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque det est linéaire par rapport aux colonnes de A, on a

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & 0 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

En appliquant le lemme sur la colonne avec un seul 1 (ligne i, colonne j), on obtient

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}.$$

■

Proposition 3.6.3 — Développement suivant une ligne. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$. En développant suivant la ligne i, on obtient :

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{ij} a_{ij},$$

où Δ_{ij} est le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en enlevant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Exercice 3.2 Calculer de deux manières différentes le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 1-\lambda & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

■

Théorème 3.6.4 — Déterminant des matrices triangulaires supérieures. Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Corollaire 3.6.5 — Cas des matrices diagonales. Si

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

alors

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Théorème 3.6.6 Pour tous $A, B \in M_n(K)$, on a

$$\det(BA) = \det(AB) = (\det A) \times (\det B).$$

Attention : En général, on n'a pas

$$\det(A+B) = \det A + \det B.$$

Théorème 3.6.7 Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$.

$$A \text{ est inversible} \iff \det A \neq 0.$$

De plus, si A est inversible, alors

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Corollaire 3.6.8 Deux matrices semblables ont le même déterminant.

Démonstration. Si A et B sont semblables, il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$. Donc,

$$\det B = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \cdot \det A \cdot \det P = \det A,$$

car $\det(P^{-1}) \cdot \det P = 1$. ■

3.7 Exercices

Exercice 3.3 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $\det A$. La matrice A est-elle semblable à la matrice identité ?

2. Calculer
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix}.$$
3. Soit dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $v_1 = (1,1,-1,0)$, $v_2 = (-2,0,2,4)$, $v_3 = (4,7,0,1)$ et $v_4 = (1,1,1,1)$.
La famille $\mathscr{V} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^4$?
4. Sachant que $255 = 15 \times 17$, $357 = 21 \times 17$ et $527 = 31 \times 17$, montrer que le déterminant
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$
est divisible par 17.
5. Soit $A \in \mathscr{M}_{2n+1}(K)$ telle que ${}^tA = -A$. Calculer $\det A$.

Exercice 3.4 Soit $b \in \mathbb{R}$ et $\Delta_b = \det B_b$ où
$$B_b = \begin{pmatrix} -b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2-b & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2-b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2-b \end{pmatrix} \quad \text{et soit} \quad \delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$
Calculer Δ_b et δ. Donner une condition nécessaire et suffisante sur b pour que la matrice B_b soit inversible.

Exercice 3.5 On se place dans $\mathbb{R}^4$. On note $\mathscr{B}_c$ la base canonique. Soit
$$v_1 = (1,-1,0,2), \quad v_2 = (1,1,1,1), \quad v_3 = (0,1,2,3).$$
On pose $E = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.
1. Déterminer le rang de la famille (v_1, v_2, v_3).
2. Caractériser les vecteurs $v = (x,y,z,t)$ de E par un système d'équations liant x, y, z et t.

Exercice 3.6 Pour $m \in \mathbb{R}$, on note $f_m : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice relativement aux bases canoniques est
$$A_m = \begin{pmatrix} m & 2 & -1 & 3m \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
1. Montrer que $\text{rg}(f_m) \geq 2$.
2. (a) Calculer les déterminants
$$D_m = \begin{vmatrix} m & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_m = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3m \\ 0 & 1 & -4 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$
(b) En déduire qu'il existe $m_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\text{rg}(f_{m_0}) = 2$.
(c) Déterminer $Im(f_{m_0})$ et $Ker(f_{m_0})$.
3. On suppose $m = 0$. Déterminer $\text{rg}(f_0)$, $Im(f_0)$ et $Ker(f_0)$.

4. Réduction des endomorphismes

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $u \in L(E)$. Réduire un endomorphisme, c'est chercher une base de E dans laquelle la matrice de u est la plus « simple » possible. Le mieux que l'on puisse espérer est que cette matrice soit diagonale.

Définition 4.0.1 Un endomorphisme u de E est *diagonalisable* s'il existe une base $\mathscr{V} = (v_1, \dots, v_n)$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Supposons qu'une telle base existe, notée $\mathscr{V} = (v_1, \dots, v_n)$. Alors :

$$\mathrm{Mat}(u, \mathscr{V}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

4.1 Valeurs propres, vecteurs propres

Définition 4.1.1 On appelle valeur propre de u un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe un vecteur $v \in E$, non nul, vérifiant

$$u(v) = \lambda v.$$

Le vecteur v est appelé vecteur propre de u associé à la valeur propre λ.
On appelle spectre de u l'ensemble des valeurs propres de u, que l'on note

$$\mathrm{Spec}(u).$$

Proposition 4.1.1 Soit $\lambda \in K$. On définit le sous-espace

$$E_\lambda = \{v \in E \mid u(v) = \lambda v\} = \ker(u - \lambda \, \mathrm{id}_E).$$

Alors :
- E_λ est un sous-espace vectoriel de E.
- Si $\lambda \in \mathrm{Spec}(u)$, alors $E_\lambda \neq \{0\}$ et on l'appelle sous-espace propre associé à λ.
- Si $\lambda \notin \mathrm{Spec}(u)$, alors $E_\lambda = \{0\}$.

■ **Exemple 4.1** On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Pour trouver les valeurs propres, on calcule :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda Id_2) &= \begin{vmatrix} 7-\lambda & -12 \\ 4 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(-7-\lambda) + 4 \times 12 = \lambda^2 - 1 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + 1). \end{aligned}$$

Donc les valeurs propres sont -1 et 1. On cherche les sous espace propres en résolvant un système.

— Pour -1 :

$$(A+I)\vec{x} = 0 \iff \begin{cases} 8x - 12y = 0 \\ 4x - 6y = 0 \end{cases}$$

On fait la combinaison linéaire suivante : $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1$ pour éliminer x dans la deuxième équation :

$$\begin{cases} 8x - 12y = 0 \\ 4x - 6y - \frac{1}{2}(8x - 12y) = 0 - 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 8x - 12y = 0 \\ 4x - 6y - 4x + 6y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 8x - 12y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Il reste donc :

$$8x - 12y = 0 \iff x = \frac{3}{2}y, \text{ donc } E_{-1} = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

— Pour 1 :

$$(A-I)\vec{x} = 0 \iff \begin{cases} 6x - 12y = 0 \\ 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

On fait la combinaison linéaire suivante : $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{3}L_1$ pour éliminer x dans la deuxième équation :

$$\begin{cases} 6x - 12y = 0 \\ 4x - 8y - \frac{2}{3}(6x - 12y) = 0 - 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x - 12y = 0 \\ 4x - 8y - 4x + 8y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x - 12y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation disparaît, il reste donc :

$$6x - 12y = 0 \iff x = 2y, \text{ donc } E_1 = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

■

À retenir

Pour trouver les valeurs propres de A, on résout

$$\det(A - \lambda Id_n) = 0.$$

Pour chaque racines λ_i, on trouve les vecteurs propres en résolvant le système

$$A\vec{x} - \lambda_i \vec{x} = \vec{0}.$$

Exercice 4.1

1. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Quelles sont les valeurs propres de A ?
   - ☐ 3 et 2
   - ☐ 5 et -1
   - ☐ 0 et 1
   - ☐ 3 uniquement
2. Pour la même matrice A, quel est un vecteur propre associé à la valeur propre 3 ?
   - ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
   - ☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
   - ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   - ☐ $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
3. Si $\vec{v}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$, que peut-on en conclure sur la matrice A ?
   - ☐ A est inversible.
   - ☐ A n'est pas inversible.
   - ☐ $A = 0$.
   - ☐ A est symétrique.
4. Soit $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. quel est son polynôme caractéristique ?
   - ☐ $\lambda^2 - 7\lambda + 10$
   - ☐ $\lambda^2 + 7\lambda + 10$
   - ☐ $\lambda^2 - 5\lambda + 6$
   - ☐ $\lambda^2 - 3\lambda + 2$
5. Pour la matrice B ci dessus, ses vecteurs propres sont
   - ☐ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   - ☐ $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
   - ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
   - ☐ $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

■

Théorème 4.1.2 Soit $u \in L(E)$ avec $\text{Spec}(u) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p\}$, les λ_i étant deux à deux distincts.

u est diagonalisable $\iff$ il existe une base de E formée de vecteurs propres de u

$\iff$ $E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$.

Démonstration. u est diagonalisable est équivalent à il existe une base de E formée de vecteurs propres de u .

$\Rightarrow$: si u est diagonalisable, alors il existe une base $\mathscr{V} = (v_1, ..., v_n)$ de E telle que

$$\Delta = \text{mat}(u, \mathscr{V}) = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_n \end{pmatrix},$$

où $\beta_i \in \mathbb{R}$. Ainsi, pour tout i, v_i est un vecteur propre de u car $u(v_i) = \beta_i v_i$.

$\Leftarrow$: Soit $\mathscr{V} = (v_1, ..., v_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u. Ainsi, pour tout $i = 1..n$, on a $u(v_i) = \beta_i v_i$ avec $\beta_i \in \text{Spec}(u)$. On a alors

$$\Delta = \text{mat}(u, \mathscr{V}) = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_n \end{pmatrix}.$$

u est diagonalisable $\iff$ $E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$.

$\Rightarrow$: si u est diagonalisable, alors il existe une base $\mathscr{V}$ de E formée de vecteurs propres de u. Quitte à les renuméroter, on a

$$\mathscr{V} = (v_1^1, v_2^1, ..., v_{\alpha_1}^1, v_1^2, ..., v_{\alpha_2}^2, ..., v_1^p, ..., v_{\alpha_p}^p)$$

où v_j^i est un vecteur propre associé à λ_i.

Comme $\mathscr{V}$ est une base de E, alors pour tout $x \in E$, $\exists! x_j^i \in \mathbb{K}$ tel que

$$x = \underbrace{x_1^1 v_1^1 + x_2^1 v_2^1 + \cdots + x_{\alpha_1}^1 v_{\alpha_1}^1}_{y_1 \in E_{\lambda_1}} + \underbrace{x_1^2 v_1^2 + \cdots + x_{\alpha_2}^2 v_{\alpha_2}^2}_{y_2 \in E_{\lambda_2}} + \cdots + \underbrace{x_1^p v_1^p + \cdots + x_{\alpha_p}^p v_{\alpha_p}^p}_{y_p \in E_{\lambda_p}}.$$

Ainsi,

$$E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}.$$

■

À retenir

On rappelle que deux sous espaces vectoriels U et V de E sont en somme direct si et seulement si la concaténation de leur bases forme une base de E.

Théorème 4.1.3
Soit λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes de u. Alors

$$E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0_E\},$$

c'est-à-dire $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$.

On démontre de la même manière que si $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont p valeurs propres distinctes deux à deux alors

$$E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}.$$

Conséquences immédiates :

1. u possède au maximum n valeurs propres.
2. Si u possède n valeurs propres distinctes avec $n = \dim E$, alors u est diagonalisable.

4.2 Recherche des valeurs propres et des vecteurs propres

Théorème 4.2.1 $\lambda \in \mathrm{Spec}(u) \iff \det(u - \lambda \mathrm{Id}) = 0 \iff \det(A - \lambda I_n) = 0.$

Définition 4.2.1 — Polynôme caractéristique.
Soit $u \in L(E)$. Soit $A = \mathrm{mat}(u, \mathscr{E})$. On définit la fonction polynomiale $P_u(x)$ par

$$P_u(x) = \det(u - x\mathrm{Id}) = \det(A - xI_n).$$

Cette fonction est un polynôme de degré n (où $\dim E = n$), qui s'écrit sous la forme :

$$P_A(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} \mathrm{tr}(A) x^{n-1} + \cdots + \det(A),$$

où $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ désigne la trace de A.

Ce polynôme est appelé le polynôme caractéristique de A.

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$A - xI_n = \begin{pmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - x \end{pmatrix}.$$

Le déterminant s'écrit alors :

$$P_A(x) = \det(A - xI_n) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - x) + Q_{n-2}(x),$$

où Q_{n-2} est un polynôme de degré au plus $n-2$.

En développant le produit, on obtient :

$$P_A(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} x^{n-1} (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) + R_{n-2}(x),$$

avec $R_{n-2} \in \mathbb{R}_{n-2}[x]$. Le terme constant de P_A est donné par

$$P_A(0) = \det(A - 0 \cdot I_n) = \det(A).$$

On a donc la forme générale

$$P_A(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}\operatorname{tr}(A)x^{n-1} + \cdots + \det(A).$$

■

Exercice 4.2 Calculer et factoriser le polynôme caractéristique P_B de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

■

On obtient

$$P_B(x) = -x^3 - 3x^2 + 4 = (1-x)(x+2)^2.$$

Théorème 4.2.2 Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.
Par conséquent, si $u \in L(E)$, on définit le polynôme caractéristique de u par $P_u = P_A$, où A est la matrice de u dans une base quelconque de E.

Démonstration. En effet si $A' = P^{-1}AP$ alors :

$$\det(A' - xI_n) = \det(P^{-1}AP - xP^{-1}P) = \det(P^{-1})\det(A - xI_n)\det(P) = \det(A - xI_n).$$

■

ATTENTION : La réciproque est fausse en général.

En résumé, on a donc le :

Théorème 4.2.3 Les valeurs propres de u sont les racines dans $\mathbb{R}$ de P_u. Si P_u est scindé sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire toutes ses racines sont dans $\mathbb{R}$), alors, si $\dim E = n$, on a :

1. u a exactement n valeurs propres, distinctes ou non.
2. La somme des valeurs propres vaut $\mathrm{tr}(A)$.
3. Le produit des valeurs propres vaut $\det(A)$.

Définition 4.2.2 Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(u)$. On appelle multiplicité de la valeur propre λ l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine de P_u. On la note m_λ.

Théorème 4.2.4 Si λ est une valeur propre de u de multiplicité m_λ, alors

$$1 \leq \dim E_\lambda \leq m_\lambda.$$

Démonstration. $\lambda \in \mathrm{Spec}(u)$, donc $E_\lambda \neq \{0_E\}$ et $\dim E_\lambda \geq 1$.

Supposons que $\dim E_\lambda = m$ et considérons $(v_1, \cdots, v_m)$ une base de E_λ. Par le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $\{w_{m+1}, \cdots, w_n\}$ tels que $\mathscr{E}' = (v_1, \cdots, v_m, w_{m+1}, \cdots, w_n)$ soit une base de E.

La matrice de u dans cette base est :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{1m+1} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & b_{2m+1} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 0 & b_{m-1m+1} & \cdots & b_{m-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda & b_{mm+1} & \cdots & b_{mn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b_{m+1m+1} & \cdots & b_{m+1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b_{nm+1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Calculons P_u :

$$P_u(x) = \det(A - xI_n) = \begin{vmatrix} \lambda - x & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{1m+1} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \lambda - x & 0 & \cdots & 0 & b_{2m+1} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda - x & 0 & b_{m-1m+1} & \cdots & b_{m-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda - x & b_{mm+1} & \cdots & b_{mn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b_{m+1m+1} - x & \cdots & b_{m+1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b_{nm+1} & \cdots & b_{nn} - x \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - x)^m \begin{vmatrix} b_{m+1m+1} - x & \cdots & b_{m+1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{nm+1} & \cdots & b_{nn} - x \end{vmatrix}.$$

Nous savons que $(x-\lambda)^{m_\lambda}$ divise P_u puisque λ est une valeur propre de multiplicité m_λ donc $m \leq m_\lambda$.

Ainsi, $\dim E_\lambda = m \leq m_\lambda$. ■

Corollaire 4.2.5 Si λ est une valeur propre simple de u (i.e. $m_\lambda = 1$), alors $\dim E_\lambda = 1$.

4.3 Caractérisation des endomorphismes diagonalisables

Théorème 4.3.1 Soit $u \in L(E)$. On note m_λ la multiplicité de la valeur propre λ.

$$u \text{ est diagonalisable} \iff \begin{cases} P_u \text{ est scindé dans } \mathbb{R} \\ \forall \lambda \in \mathrm{Spec}(u), \dim E_\lambda = m_\lambda. \end{cases}$$

Corollaire 4.3.2 Si P_u possède n racines distinctes, alors u est diagonalisable.

Exercice 4.3 Soient $B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Les endomorphismes f_1 et f_2 de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement B_1 et B_2 sont-ils diagonalisables ? ■

4.4 Exemple complet de diagonalisation

4.5 Cas d'une matrice diagonalisable

On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 9 & -2 & -3 \\ 9 & 6 & -11 \end{bmatrix}.$$

On commence par calculer le polynôme caractéristique :

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 6 & -3 \\ 9 & -2-\lambda & -3 \\ 9 & 6 & -11-\lambda \end{vmatrix} = 256 - 12\lambda^2 - \lambda^3 = -(\lambda-4)(\lambda+8)^2$$

Pour tout $\lambda \in \{4, -8\}$, on définit :

$$E_\lambda = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\}$$

On cherche une base des sous espaces propres.

— Pour E_4, on résout :

$$\begin{bmatrix}1&6&-3\\9&-2&-3\\9&6&-11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x+6y-3z&=4x\\9x-2y-3z&=4y\\9x+6y-11z&=4z\end{cases}$$

En procédant par réduction de Gauss, on a :

$$\begin{cases}-3x+6y-3z&=0\\9x-6y-3z&=0\\9x+6y-15z&=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+2y-z&=0\\3x-2y-z&=0\\3x+2y-5z&=0\end{cases}$$

— On peut multiplier la première ligne par -1 pour mettre un 1 devant x et l'utiliser comme pivot.

$$\begin{cases}x-2y+z&=0\\4y-4z&=0\\8y-8z&=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y&=-z\\y&=z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2z&=-z\\y&=z\end{cases}$$

Finalement, on obtient $x=z, y=z$, donc :

$$E_4=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3,\ \begin{matrix}x&=z\\y&=z\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}z\\z\\z\end{bmatrix},z\in\mathbb{R}\right\}=\text{Vect}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

— Même procédure pour -8 :

$$\begin{bmatrix}1&6&-3\\9&-2&-3\\9&6&-11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=-8\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x+6y-3z&=-8x\\9x-2y-3z&=-8y\\9x+6y-11z&=-8z\end{cases}$$

On obtient l'équation :

$$9x+6y-3z=0\Leftrightarrow 3x+2y-z=0.$$

On choisit x et y libres, d'où $z=3x+2y$, et :

$$E_{-8}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\3x+2y\end{bmatrix},x,y\in\mathbb{R}\right\}=\text{Vect}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right\}.$$

Conclusion :

$$E_4=\text{Vect}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\},\quad E_{-8}=\text{Vect}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right\}.$$

On remarque que

$$\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&3&2\end{vmatrix}=-4\neq 0.$$

Ainsi, on a 3 vecteurs linéairement indépendants dans un espace de dimension 3, donc

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \text{ forme une base de } \mathbb{R}^3.$$

On peut maintenant changer de base :

$$P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}_c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad P_{\mathscr{B}_c\to\mathscr{B}} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

et on a la relation :

$$P_{\mathscr{B}_c\to\mathscr{B}} A P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}_c} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}.$$

4.5.1 Exemple où u n'est pas diagonalisable

On considère l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

— On calcule :

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 3 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -1+\lambda+\lambda^2-\lambda^3$$

— On factorise : $-1+\lambda+\lambda^2-\lambda^3 = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2$

— Ainsi, 1 et -1 sont valeurs propres, on cherche une base de chaque sous-espace propre.

— Pour E_1, on résout :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-z &= x \\ 2x+y-2z &= y \\ 3x-y-2z &= z \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} x-y-z &= 0 \\ 2x-2z &= 0 \\ 3x-y-3z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-z &= 0 \\ x &= z \\ 2y &= 0 \end{cases}$$

Ainsi,

$$E_1 = \text{Vect}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

— Pour E_{-1}, on résout :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-z &= -x \\ 2x+y-2z &= -y \\ 3x-y-2z &= -z \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} 3x-y-z &= 0 \\ 2x+2y-2z &= 0 \\ 3x-y-3z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z &= 0 \\ x+y &= z \end{cases}$$

Ainsi,

$$E_{-1} = \text{Vect}\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\right\}.$$

Ainsi, on a trouvé :

$$E_{-1} = \text{Vect}\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\right\}, \quad E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right\}.$$

Or, clairement :

$$E_{-1} \oplus E_1 \neq \mathbb{R}^3.$$

$$\text{Donc } A = \begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\2 & 1 & -2\\3 & -1 & -2\end{bmatrix} \text{ n'est pas diagonalisable.}$$

On peut tout de même "réduire" cette matrice.

Remarque Il existe un résultat général qui affirme que toute matrice est semblable à une matrice triangulaire.

Dans le cas de A, on a :

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\2 & 1 & -2\\3 & -1 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & -1\\2 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\2 & 0 & -1\\-1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

où

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & -1\\2 & 1 & 0\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\2 & 0 & -1\\-1 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

4.5.2 Ce n'est pas une question de polynôme caractéristique

Considérons la matrice

$$B = \begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

Alors, on a :

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & -2\\0 & 1-\lambda & -2\\0 & 0 & -1-\lambda\end{vmatrix} = -1+\lambda+\lambda^2-\lambda^3 = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2$$

Mais dans ce cas, on peut montrer que :

$$E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}, \quad E_{-1} = \text{Vect}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}.$$

On a alors clairement

$$\text{Vect}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\} \oplus \text{Vect}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\} = \mathbb{R}^3,$$

et il vient :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ainsi B est diagonalisable.

4.6 Applications

Remarque Calcul de A^m : Si A est diagonalisable, il existe une matrice diagonale D et une matrice de changement de base P telle que :

$$D = P^{-1}AP \quad \text{ou} \quad A = PDP^{-1}.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} A^m = (PDP^{-1})^m &= \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})}_{m \text{ fois}} \\ &= \underbrace{PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)\cdots(P^{-1}P)DP^{-1}}_{m \text{ fois}} \\ &= PD^mP^{-1}, \end{aligned}$$

avec $D^m = \mathrm{Diag}(\lambda_1^m, \lambda_2^m, \cdots, \lambda_n^m)$.

4.6.1 Lien avec les équations différentielles

Pour l'exercice, considérons l'équation :

$$\ddot{x}(t) - 3\dot{x}(t) - 10x(t) = 0.$$

On peut résoudre cette équation avec l'équation caractéristique :

$$r^2 - 3r - 10 = 0$$

qui a deux racines : $r_1 = -2$ et $r_2 = 5$. Ainsi, on obtient :

$$x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{5t},$$

où c_1 et c_2 sont déterminées par les conditions initiales. Comment prouve-t-on ce résultat ?

Théorème 4.6.1 — Rappel sur les EDO linéaires du second ordre. On considère une équation différentielle linéaire d'ordre 2 :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t), \quad a \neq 0.$$

La solution générale est de la forme

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t),$$

où y_p est une solution particulière et y_h est la solution de l'équation **homogène** :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, \quad a \neq 0.$$

Pour résoudre une équation différentielle du second ordre :
— On commence par résoudre l'équation **homogène** :

$$ay''(t)+by'(t)+cy(t)=0, \quad a\neq 0.$$

— On cherche des solutions de la forme $y(t)=e^{rt}$.
— On obtient le **polynôme caractéristique** :

$$P(r)=ar^2+br+c.$$

Théorème 4.6.2 La forme des solutions dépend des racines de $P(r)$.
— Cas 1 : deux racines réelles distinctes $r_1\neq r_2$

$$y_h(t)=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t}.$$

— Cas 2 : racine double $r_1=r_2=r$

$$y_h(t)=(C_1+C_2t)e^{rt}.$$

— Cas 3 : racines complexes $r=\alpha\pm i\beta$

$$y_h(t)=e^{\alpha t}\left(C_1\cos(\beta t)+C_2\sin(\beta t)\right).$$

Pour trouver une solution particulière à l'équation initiale

$$ay''(t)+by'(t)+cy(t)=f(t),$$

— Si $f(t)$ est un **polynôme de degré** n, on cherche f_p comme un polynôme de même degré.
— Si $f(t)$ est de type $\sin(\omega t)$ **ou** $\cos(\omega t)$, on essaie

$$y_p(t)=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t).$$

— Attention : si la fonction testée est déjà solution de l'équation homogène, on multiplie l'essai par t (ou t^2 si nécessaire).

4.6.2 Solution par l'algèbre $\ddot{x}(t)-3\dot{x}(t)-10x(t)=0$

En posant $X(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\ \dot{x}(t)\end{bmatrix}$, l'équation peut se réécrire :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \ddot{x}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 10 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ \dot{x}(t)\end{bmatrix}\Leftrightarrow \dot{X}(t)=AX(t),$$

Si l'équation était en une dimension, la solution serait évidemment :

$$X(t)=e^{tA}X(0).$$

Il se trouve que cette équation est encore valable, si l'on définit l'exponentielle par

$$e^{tA}=I_2+(tA)+\frac{1}{2}(tA)^2+\cdots+\frac{(tA)^n}{n!}+\cdots$$

Il nous faut donc calculer A^n. Pour cela, on cherche à diagonaliser A.

On calcule les valeurs propres :

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 10 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(3-\lambda) - 10 = \lambda^2 + 3\lambda - 10 = (\lambda - 5)(\lambda + 2).$$

On résout les systèmes :

$$\text{Pour } E_5 : \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 5x \\ 10x & +3y & = 5y \end{array} \right. \qquad \text{Pour } E_{-2} : \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -2x \\ 10x & +3y & = -2y \end{array} \right.$$

On trouve $E_{-2} = \text{Vect}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ et $E_5 = \text{Vect}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$, ce qui nous donne les matrices de changement de bases :

$$P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}_c} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad P_{\mathscr{B}_c \to \mathscr{B}} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

On trouve :

$$\begin{array}{rcl} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 3 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \times \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ & = & P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}_c} \Delta P^{-1}_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}_c}. \end{array}$$

où Δ est la matrice diagonale. Rappelons qu'on cherche à calculer l'exponentielle de matrice :

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$$

On remplace $A = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}_c} \Delta P^{-1}_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}_c}$:

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \left(P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}_c} \Delta P^{-1}_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}_c} \right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}_c} \Delta^k P^{-1}_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}_c},$$

On peut alors mettre en facteur les matrices de changement de base :

$$\begin{array}{rcl} e^{tA} & = & P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}_c} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \Delta^k \right) P^{-1}_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}_c}, \quad \text{où } \Delta^k = \begin{bmatrix} (-2)^k & 0 \\ 0 & 5^k \end{bmatrix} \\ & = & P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}_c} \begin{bmatrix} \Sigma_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} (-2)^k & 0 \\ 0 & \Sigma_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} 5^k \end{bmatrix} P^{-1}_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}_c} \end{array}$$

On obtient finalement :

$$\begin{array}{rcl} e^{tA} & = & \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix} \times \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ & = & \begin{bmatrix} \frac{5}{7} e^{-2t} + \frac{2}{7} e^{5t} & -\frac{1}{7} e^{-2t} + \frac{1}{7} e^{5t} \\ -\frac{10}{7} e^{-2t} + \frac{10}{7} e^{5t} & \frac{2}{7} e^{-2t} + \frac{5}{7} e^{5t} \end{bmatrix} \end{array}$$

Enfin, comme $\begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = X(t) = e^{tA} X(0) = e^{tA} \begin{bmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{bmatrix}$, on obtient la solution :

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & \left(\frac{5}{7} e^{-2t} + \frac{2}{7} e^{5t} \right) x(0) + \left(-\frac{1}{7} e^{-2t} + \frac{1}{7} e^{5t} \right) \dot{x}(0), \\ & = & e^{-2t} \left(\frac{5}{7} x(0) + \frac{1}{7} \dot{x}(0) \right) + e^{5t} \left(\frac{2}{7} x(0) + \frac{1}{7} \dot{x}(0) \right). \end{array}$$

Exercice 4.4 On veut résoudre $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0$.

1. Poser $Y(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$, et trouver A tel que $Y'(t) = AY(t)$.
2. Montrer que A n'est pas diagonalisable. Changer de base pour $\mathscr{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.
3. Montrer par récurrence que $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{bmatrix}$.
4. En déduire que
$$e^{tA} = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}_c} \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} 2^k & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} k2^{k-1} \\ 0 & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} 2^k \end{bmatrix} P^{-1}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}_c}.$$
5. Trouver la solution de l'EDO. Indication :
$$\begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} 2^k & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} k2^{k-1} \\ 0 & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} 2^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

■

Solution :

1. On trouve $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$.
2. On a $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}_c} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ et donc
$$P_{\mathscr{B}_c\to\mathscr{B}} = P^{-1}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}_c} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$
Dans la nouvelle base, on obtient :
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$
3. Direct.
4. Astuce habituelle.
5. On réindexe simplement la série : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} k2^{k-1} = t \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} k2^{k-1} = te^{2t}$.

■

4.6.3 Un système en trois dimension

On veut résoudre le système

$$(S) \begin{cases} x'(t) &= -x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) &= x(t) - y(t) + z(t) \\ z'(t) &= x(t) + y(t) - z(t) \end{cases}$$

où x, y et z sont des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soit $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit $\vec{u}$:

$$\vec{u}(t) = x(t)\, e_1 + y(t)\, e_2 + z(t)\, e_3$$

Comme les vecteurs de la base canonique ne dépendent pas du temps,

$$\vec{u}'(t) = x'(t)\, e_1 + y'(t)\, e_2 + z'(t)\, e_3.$$

On pose donc $X(t) = \mathrm{Mat}(\vec{u}(t), \mathscr{B}) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ ce qui donne $X'(t) = \mathrm{Mat}(\vec{u}'(t), \mathscr{B}) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix}$, et le système (S) s'écrit

$$X'(t) = BX(t) \quad \text{avec} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

On cherche à diagonaliser B.

— Le polynôme caractéristique de B est :

$$P_B(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = -(\lambda-1)(\lambda+2)^2,$$

où pour factoriser, on a remarqué que 1 est une racine de P_B. Ainsi, on cherche une base de E_1 et E_{-2}.

— Pour E_1, on résout :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+z &= x \\ x-y+z &= y \\ x+y-z &= z \end{cases}$$

On trouve $E_1 = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, on note $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

— Pour E_{-2}, on résout :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+z &= -2x \\ x-y+z &= -2y \\ x+y-z &= -2z \end{cases}$$

On trouve $E_{-2} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$, on note $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

On vérifie que $\mathscr{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base, On en déduit que B est diagonalisable et on calcule les matrices de changement de bases

$$P_{\mathscr{V} \to \mathscr{B}_c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}_{\mathscr{V} \to \mathscr{B}_c} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Et la relation suivante est vérifiée :

$$P^{-1}_{\mathscr{V} \to \mathscr{B}_c} B P_{\mathscr{V} \to \mathscr{B}_c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = D.$$

On exprime maintenant la solution $\vec{u}(t)$ dans la base $\mathscr{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$:

$$X_1(t) = \text{Mat}(\vec{u}(t), \mathscr{V}) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{bmatrix}, \forall t \in \mathbb{R},$$

On a encore $X_1'(t) = \text{Mat}(\vec{u}'(t), \mathscr{V}) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ y_1'(t) \\ z_1'(t) \end{bmatrix}$, Comme $P_{\mathscr{V}\to\mathscr{B}_c}$ est la matrice de passage de $\mathscr{V}$ vers $\mathscr{B}_c$, on a les relations :

$$X(t) = P_{\mathscr{V}\to\mathscr{B}_c} X_1(t), \;\; X'(t) = P_{\mathscr{V}\to\mathscr{B}_c} X_1'(t).$$

où $P_{\mathscr{V}\to\mathscr{B}_c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. Rappelons que $X(t)$ vérifie

$$X'(t) = BX(t) \quad \text{avec} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

En remplaçant $X(t) = P_{\mathscr{V}\to\mathscr{B}_c} X_1(t), \;\; X'(t) = P_{\mathscr{V}\to\mathscr{B}_c} X_1'(t)$, on obtient :

$$P_{\mathscr{V}\to\mathscr{B}_c} X_1'(t) = X'(t) = BX(t) = BP_{\mathscr{V}\to\mathscr{B}_c} X_1(t)$$

Ainsi, on obtient :

$$X_1'(t) = P_{\mathscr{V}\to\mathscr{B}_c}^{-1} BP_{\mathscr{V}\to\mathscr{B}_c} X_1(t) = DX_1(t), \quad \text{avec } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Résoudre le système différentiel :

$$\begin{array}{rcl} x'(t) & = & -x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) & = & x(t) - y(t) + z(t) \\ z'(t) & = & x(t) + y(t) - z(t) \end{array}$$

équivaut donc à résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & x_1(t) \\ y_1'(t) & = & -2y_1(t) \\ z_1'(t) & = & -2z_1(t) \end{array} \right.$$

avec la relation $X(t) = P_{\mathscr{V}\to\mathscr{B}_c} X_1(t)$. Mais le système pour X_1 est découplé, on sait le résoudre. On a :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1(t) & = & x_0 e^t \\ y_1(t) & = & y_0 e^{-2t} \\ z_1(t) & = & z_0 e^{-2t} \end{array} \right.$$

où x_0, y_0 et z_0 sont des constantes arbitraires. Les fonctions initiales x, y et z sont donc données par :

$$\begin{array}{rcl} X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 e^t \\ y_0 e^{-2t} \\ z_0 e^{-2t} \end{bmatrix} \\ & = & \begin{bmatrix} x_0 e^t + y_0 e^{-2t} \\ x_0 e^t + z_0 e^{-2t} \\ x_0 e^t - (y_0 + z_0) e^{-2t} \end{bmatrix}. \end{array}$$

4.6.4 Etude d'une suite récurrente

On cherche les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(u_0,v_0,w_0)\in\mathbb{R}^3$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$(S)\quad \begin{cases} u_{n+1} &= -u_n+v_n+w_n \\ v_{n+1} &= u_n-v_n+w_n \\ w_{n+1} &= u_n+v_n-w_n \end{cases}$$

On définit pour tout entier n la matrice colonne $X_n=\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et alors :

$$(S)\iff X_{n+1}=BX_n \quad \text{où} \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement par récurrence que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad X_n=B^nX_0.$$

Il faut donc calculer B^n. Or, B est diagonalisable et on trouve

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

telle que

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}=P^{-1}BP \quad \text{avec} \quad P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$B^m = P\begin{pmatrix} 1^m & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^m & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^m \end{pmatrix}P^{-1}$$

Si on revient à X_n, on trouve :

$$\begin{aligned} X_n=\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= P\begin{pmatrix} 1^m & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^m & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^m \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+(-1)^n2^{n+1} & 1+(-1)^{n+1}2^n & 1+(-1)^{n+1}2^n \\ 1+(-1)^{n+1}2^n & 1+(-1)^n2^{n+1} & 1+(-1)^{n+1}2^n \\ 1+(-1)^{n+1}2^n & 1+(-1)^{n+1}2^n & 1+(-1)^n2^{n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} u_0(1+(-1)^n2^{n+1})+(v_0+w_0)(1+(-1)^{n+1}2^n) \\ v_0(1+(-1)^n2^{n+1})+(u_0+w_0)(1+(-1)^{n+1}2^n) \\ w_0(1+(-1)^n2^{n+1})+(u_0+v_0)(1+(-1)^{n+1}2^n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On peut donc calculer toutes valeurs de la suite X_n.

4.7 Exercices

Exercice 4.5 Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{R}$? Si oui, préciser une matrice diagonale semblable et la matrice de passage associée.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour vérifier que l'on démarre bien :

$$\mathrm{Spec}(A_1) = \{1,-1\}, \quad \mathrm{Spec}(A_2) = \{1\}, \quad \mathrm{Spec}(A_3) = \{0,1,3\}, \quad \mathrm{Spec}(A_4) = \{0,i,-i\}.$$

Pour aller plus loin : diagonaliser A_4 dans $\mathbb{C}$.

Exercice 4.6 Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Note : on pourra se référer à l'exercice 4.2.

Exercice 4.7 On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}_c = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, le polynôme caractéristique de f est
$$P_f(t) = (t-1)^2(t+1)^2.$$
2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
3. Déterminer $\mathscr{V}$ une base de $E_1 \oplus E_{-1}$.
4. Compléter cette base pour obtenir une base $\mathscr{W}$ de $\mathbb{R}^4$.
5. Déterminer alors $B = \mathrm{Mat}(f, \mathscr{W})$. Donner la relation qui existe entre A et B.

Exercice 4.8 1. On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit f un endomorphisme tel que :
— $\mathrm{Spec}(f) = \{3,4\}$,
— $E_4 = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ avec $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (-1,0,1)$,
— $E_3 = \mathrm{Vect}(v_3)$ avec $v_3 = (-1,1,-1)$.
On note $\mathscr{V} = (v_1, v_2, v_3)$.
(a) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
(b) Déterminer le polynôme caractéristique P_f.
(c) Pourquoi $\mathscr{V}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? (Sans calcul)
(d) f est-il bijectif ? Justifier.

(e) Calculer $\mathrm{tr}(f)$ et $\det(f)$.
(f) Calculer $f(e_2)$.
(g) Déterminer $\Delta = \mathrm{Mat}(f, \mathscr{V})$. Donner la relation entre Δ et $C = \mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}_c)$.

2. On se place dans $\mathbb{R}^5$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}_c = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$. Soit g un endomorphisme tel que :
— Le polynôme caractéristique P_g est scindé dans $\mathbb{R}$,
— $\mathrm{Spec}(g) = \{-1, 2\}$,
— $E_{-1} = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ avec $v_1 = (1,1,0,0,0)$, $v_2 = (-1,0,1,0,0)$,
— $E_2 = \mathrm{Vect}(v_3, v_4, v_5)$ avec $v_3 = (0,0,-1,1,-1)$, $v_4 = (0,0,0,1,2)$, $v_5 = (0,0,1,0,3)$.
(a) g est-il diagonalisable ?
(b) Donner les écritures possibles de P_g.
(c) g est-il bijectif ? Justifier.
(d) Calculer $\mathrm{tr}(g)$ et $\det(g)$.

Exercice 4.9 Soit la matrice

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Déterminer le(s) réel(s) a pour lequel A_a est diagonalisable. Lorsqu'elle est diagonalisable, déterminer la matrice diagonale A'_a semblable à A_a ainsi que la matrice de passage P_a.

Exercice 4.10

1. Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, déterminer la matrice diagonale A' semblable à A. Déterminer également la matrice de passage P.
(b) Calculer A^n.
2. Calculer A_3^n où A_3 est la matrice définie dans l'exercice 4.5.
3. On considère trois suites réelles $(u_n), (v_n), (w_n)$ telles que :

$$(S) : \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 2v_n + w_n + z_n, \\ v_{n+1} = 2u_n + 2v_n + w_n + z_n, \\ w_{n+1} = -u_n - v_n + w_n - 2z_n, \\ z_{n+1} = -u_n - v_n - 2w_n + z_n, \end{cases}$$

avec u_0, v_0, w_0, z_0 donnés.
Exprimer u_n, v_n, w_n et z_n en fonction de n et des conditions initiales.
4. Déterminer les applications $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solutions du système différentiel :

$$(S') : \begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t), \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) + z(t), \\ z'(t) = y(t) + z(t), \end{cases}$$

avec conditions initiales $x(0) = 6$, $y(0) = -6$, $z(0) = 12$.

5. Annexes

5.1 Formule de Taylor

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in I$. Alors, f admet un DL_n en a de la forme

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\big((x-a)^n\big).$$

5.2 Récapitulatif des développements limités des fonctions usuelles en 0

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1}) \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1}) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2}) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2}) \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^6)
\end{aligned}$$

5.3 Kit de survie - Déterminant

Définition et calcul

— Pour une matrice 2×2 :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

— Pour une matrice 3×3 :

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

— Développement selon une ligne ou une colonne (formule de Laplace)

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det(M_{11}) + a_{21} \cdot (-1)^{2+1} \cdot \det(M_{21}) + \cdots + a_{n1} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \det(M_{n1}) \end{aligned}$$

où M_{i1} est la matrice A sans la ligne i et la colonne 1 :

$$M_{i1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \cancel{a_{i,1}} & \cancel{a_{i,2}} & \cancel{\cdots} & \cancel{a_{i,n}} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

■ **Exemple 5.1** Calculons le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 7 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Développons $\det(A)$ selon la première colonne :

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} - 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + 7 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot (-1 \times 6 - 0 \times 4) - 5 \cdot (3 \times 6 - 0 \times 1) + 7 \cdot (3 \times 4 - (-1) \times 1) \\ &= 2 \times (-6) - 5 \times 18 + 7 \times 13 \\ &= -11 \end{aligned}$$

Ici, chaque mineur est obtenu en supprimant la ligne du coefficient et la première colonne.

■

Propriétés fondamentales

Soit A une matrice carrée d'ordre n, on note $\det(A)$ son déterminant.

Prop. 1. Linéarité par ligne (ou colonne) : Le déterminant est une application linéaire en chaque ligne si les autres lignes sont fixées.

■ **Exemple 5.2** Pour $A = \begin{pmatrix} 1+2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, on a

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 4+8 = 12.$$

■

Prop. 2. Symétrie ligne/colonne : $\det(A^T) = \det(A)$ où A^T est la transposée de A.

■ **Exemple 5.3**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

et $\det(A) = 1\times 4 - 2\times 3 = -2$, $\det(A^T) = 1\times 4 - 3\times 2 = -2$. ■

Prop. 3. Permutation de deux lignes (ou colonnes) : Échanger deux lignes change le signe du déterminant.

■ **Exemple 5.4**

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -2, \quad \det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2.$$

■

Prop. 4. Ligne (ou colonne) nulle ou doublon : Si une ligne est nulle ou si deux lignes sont identiques, alors $\det(A) = 0$.

■ **Exemple 5.5**

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 0.$$

■

Prop. 5. Matrice triangulaire : Si A est triangulaire (supérieure ou inférieure), alors $\det(A)$ est le produit des coefficients diagonaux.

■ **Exemple 5.6**

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 2\times 5\times 6 = 60.$$

■

Prop. 6. Déterminant et opérations élémentaires :

— Ajouter un multiple d'une ligne à une autre ne change pas le déterminant.

■ **Exemple 5.7**

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -2$$

et si on remplace L_2 par $L_2 - 3L_1$:

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix} = 1\times(-2) = -2.$$

■

— Multiplier une ligne par λ multiplie le déterminant par λ.

■ **Exemple 5.8**

$$\det\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix} = 6, \quad \det\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix} = 12$$

car on a multiplié la première ligne par 2, donc le déterminant est multiplié par 2. ■

Prop. 7. Produit matriciel :

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

■ **Exemple 5.9** Soient

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

On a :

$$\det(A) = 1\cdot 1\cdot 3 = 3, \quad \det(B) = 2\cdot 1\cdot 1 = 2.$$

Alors $AB = \begin{pmatrix}2 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ et $\det(AB) = 2\cdot 1\cdot 3 = 6 = \det(A)\cdot\det(B)$. ■

Prop. 8. Inversibilité : A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

■ **Exemple 5.10**

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix} = 0,$$

la matrice n'est pas inversible. ■

Cas particuliers à connaître

— $\det(I_n) = 1$
— $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$
— $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ si A est inversible
— $\det(A^T A) \geq 0$

Applications courantes

— Vérifier l'inversibilité d'une matrice.
— Résoudre un système linéaire par la règle de Cramer.
— Calcul d'aires et de volumes (exemple : $|\det(u,v)|$ donne l'aire du parallélogramme engendré par u et v).

5.4 Rappel sur le pivot de Gauss

On va résoudre le système suivant à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

$$(S) \quad \begin{cases} x & +2y & +z & +t & = 1 \\ x & +y & +z & -t & = 2 \\ 2x & +y & +z & & = 3 \end{cases}$$

À retenir

L'étape 0 est de mettre un 1 devant la première variable. Ici, c'est déjà le cas, continuons.

Étape 1 : Élimination de x dans les équations (2) et (3)

On garde la première équation telle quelle, et on effectue :

- $(2) \leftarrow (1) - (2)$:

$$\begin{aligned} (x+2y+z+t) - (x+y+z-t) &= 1-2 \\ y+2t &= -1 \end{aligned}$$

- $(3) \leftarrow 2\times(1) - (3)$:

$$\begin{aligned} 2(x+2y+z+t) - (2x+y+z) &= 2\times 1 - 3 \\ 3y+z+2t &= -1 \end{aligned}$$

On obtient le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} x & +2y & +z & +t & = & 1 \\ & y & & +2t & = & -1 \\ & 3y & +z & +2t & = & -1 \end{cases}$$

À retenir

Pensez à bien aligner les équations pour bien voir si vous avez bien éliminé x dans toutes les autres équations.

Étape 2 : Élimination de y dans la troisième équation

On utilise la deuxième équation comme pivot.

On effectue : $(3) \leftarrow 3\times(2) - (3)$:

$$\begin{aligned} 3(y+2t) - (3y+z+2t) &= 3\times(-1) - (-1) \\ -z+4t &= -2 \end{aligned}$$

Le système devient :

$$\begin{cases} x & +2y & +z & +t & = & 1 \\ & y & & +2t & = & -1 \\ & & -z & +4t & = & -2 \end{cases}$$

À retenir

On a obtenu une **forme triangulaire**. À partir de là, toutes les variables à droite du dernier coefficient non nul sera une **variable libre**.

Remarque Retenez bien la forme d'un système échelonné. Le système

$$\begin{cases} 2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & -x_4 & = 5 \\ & -x_2 & -2x_3 & & = 4 \\ & & & 3x_4 & = 1 \end{cases}$$

est **échelonné**, tandis que le système

$$\begin{cases} 2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & -x_4 & = 5 \\ & & -2x_3 & & = 4 \\ & & x_3 & +x_4 & = 1 \end{cases}$$

n'est **pas échelonné** (la dernière ligne commence avec la même variable que la ligne au-dessus).

Étape 3 : Remontée (substitution)

- À partir de la troisième équation :

$$z = 4t + 2$$

- On injecte z et t dans la seconde équation :

$$y = -2t - 1$$

- On injecte y, z et t dans la première équation :

$$\begin{aligned} x + 2y + z + t &= 1 \\ x + 2(-2t-1) + (4t+2) + t &= 1 \\ x &= -t + 1 \end{aligned}$$

À retenir

Attendez bien d'avoir un système échelonné avant de substituer, et pensez à bien partir de la dernière équation pour remonter. Sinon, vous allez tourner en rond.

Étape 4 : Ensemble des solutions

On garde $t \in \mathbb{R}$ comme variable libre. On a alors :

$$\begin{cases} x &= -t + 1 \\ y &= -2t - 1 \\ z &= 4t + 2 \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions est :

$$\mathscr{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

5.5 Formule de changement de base et exemples

Définition 5.5.1 Soit $\mathscr{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $\mathscr{E}' = \{v_1, \dots, v_n\}$ deux bases d'un espace vectoriel E. On note

$[v_1]_{\mathscr{E}}$ les coordonnées de v_i dans la base $\mathscr{E}$.

On définit la matrice de changement de base $P_{\mathscr{E}' \to \mathscr{E}}$ comme :

$$P_{\mathscr{E}' \to \mathscr{E}} = \left[[v_1]_{\mathscr{E}} \middle| \cdots \middle| [v_n]_{\mathscr{E}} \right]$$

À retenir

La matrice $P_{\mathscr{E}' \to \mathscr{E}}$ mange des vecteurs exprimés dans la base $\mathscr{E}'$ et donne les coordonnées de ce vecteur exprimés dans la base $\mathscr{E}$.

Théorème 5.5.1

— Soit u une application linéaire de$E$ vers F.
— Soient $\mathscr{E}, \mathscr{E}'$ deux bases de E et $\mathscr{F}, \mathscr{F}'$ deux bases de F.

Alors, on a :

$$\mathrm{Mat}(u, \mathscr{E}', \mathscr{F}') = P_{\mathscr{F} \to \mathscr{F}'} \mathrm{Mat}(u, \mathscr{E}, \mathscr{F}) P_{\mathscr{E}' \to \mathscr{E}}$$

En particulier, si $E = F$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}(u, \mathscr{E}') &= P_{\mathscr{E} \to \mathscr{E}'} \mathrm{Mat}(u, \mathscr{E}) P_{\mathscr{E}' \to \mathscr{E}} \\ &= P_{\mathscr{E} \to \mathscr{E}'} \mathrm{Mat}(u, \mathscr{E}) P^{-1}_{\mathscr{E} \to \mathscr{E}'} \\ &= P^{-1}_{\mathscr{E}' \to \mathscr{E}} \mathrm{Mat}(u, \mathscr{E}) P_{\mathscr{E}' \to \mathscr{E}} \end{aligned}$$

■ **Exemple 5.11** Considérons l'endomorphisme u dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{E}$ est :

$$\mathrm{Mat}(u, \mathscr{E}) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -7 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On change de base pour $\mathscr{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$, où :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

On construit la matrice de passage de $\mathscr{V}$ vers $\mathscr{E}$ et on calcule $P^{-1}_{\mathscr{V} \to \mathscr{E}}$:

$$P_{\mathscr{V} \to \mathscr{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -5 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathscr{E} \to \mathscr{V}} = P^{-1}_{\mathscr{V} \to \mathscr{E}} = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule alors la matrice de u dans la base $\mathscr{V}$ par la formule :

$$\mathrm{Mat}(u, \mathscr{V}) = P_{\mathscr{E} \to \mathscr{V}} \cdot \mathrm{Mat}(u, \mathscr{E}) \cdot P_{\mathscr{V} \to \mathscr{E}}.$$

D'où :

$$\mathrm{Mat}(u, \mathscr{V}) = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -7 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

Auteur : Huang Lorick

Bureau GMM 122

LHUANG@INSA-TOULOUSE.FR

POLYCOPIÉ DE INSA DE TOULOUSE

Version du 3 septembre 2026