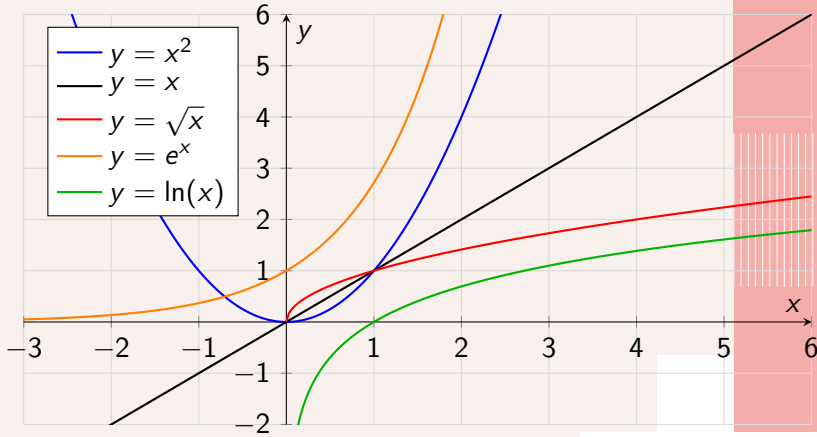




Chapitre 1 - Equivalents

Remise à Niveau

+ Différente vitesse de croissance



À quoi ça sert les équivalents?

Les équivalents servent à comparer les fonctions entre elles.

- ▶ Dire qu'une fonction tends plus vite vers l'infini qu'une autre,
- ▶ Permet de calculer des limites.

💡 À retenir

On rappelle les formes indéterminées:

$$+\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 1^\infty$$

Definitor: Voisinage

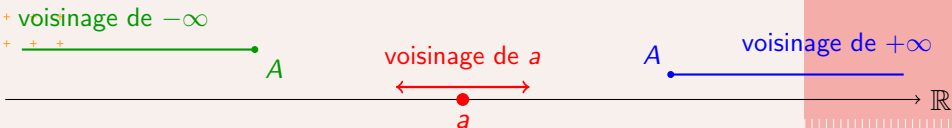
- ▶ On dit qu'un ensemble $V \subset \mathbb{R}$ est un **voisinage d'un réel** a s'il contient un intervalle ouvert centré en a . Cela signifie qu'il existe $\ell > 0$ tel que :

$$]a - \ell, a + \ell[\subset V.$$

Autrement dit, V contient tous les réels "assez proches de a ".

- ▶ On dit que V est un **voisinage de** $+\infty$ s'il contient un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ pour un certain $A \in \mathbb{R}$. Cela signifie que V contient tous les réels "suffisamment grands".
- ▶ On dit que V est un **voisinage de** $-\infty$ s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty, A[\subset V$. Cela signifie que V contient tous les réels "suffisamment petits".

Illustration: Voisinage



Point considéré	Ensemble V	Voisinage ? Pourquoi ?
$a = 1$	$]0.5, 1.5[$	Oui, intervalle centré en 1
$a = 1$	$]0, 2[\setminus \{1\}$	Non, car V ne contient pas 1
$+\infty$	$]1000, +\infty[\cup \{0\}$	Oui, contient $]A, +\infty[$
$-\infty$	$] - \infty, 0[$	Oui, contient $] - \infty, A[$

Définition: Négligeable

On dit que f est **négligeable devant** g au voisinage d'un point a (ou en a), s'il vérifie la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists V \in \mathcal{V}(a), \quad \forall x \in V, \quad |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.$$

On note :

$$f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x)) \quad \text{ou} \quad f = o_a(g).$$

Proposition

Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage de a (sauf peut-être en a), et supposons que $g(x) \neq 0$ quand x est proche de a (sauf peut-être en a). Alors :

$$f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Relations classiques à connaître:

Soit $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$.

1. $x^\alpha = o_{x \rightarrow +\infty}(x^\beta)$ si et seulement si $\alpha < \beta$.

2. $x^\alpha = o_{x \rightarrow 0}(x^\beta)$ si et seulement si $\alpha > \beta$.

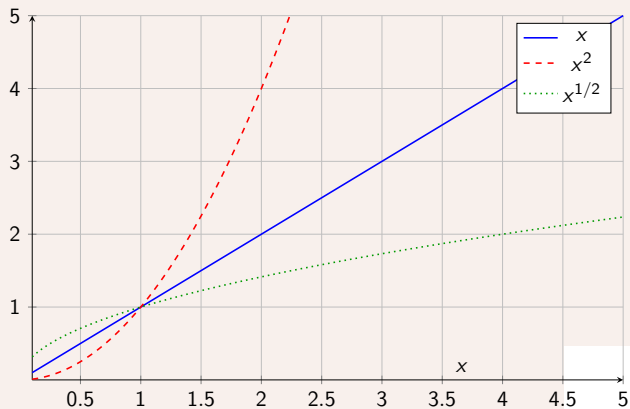
3. $f(x) = o_{x \rightarrow a}(1)$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

4. $(\ln x)^\beta = o_{x \rightarrow +\infty}(x^\alpha)$.

5. $x^\beta = o_{x \rightarrow +\infty}(e^{\alpha x})$.

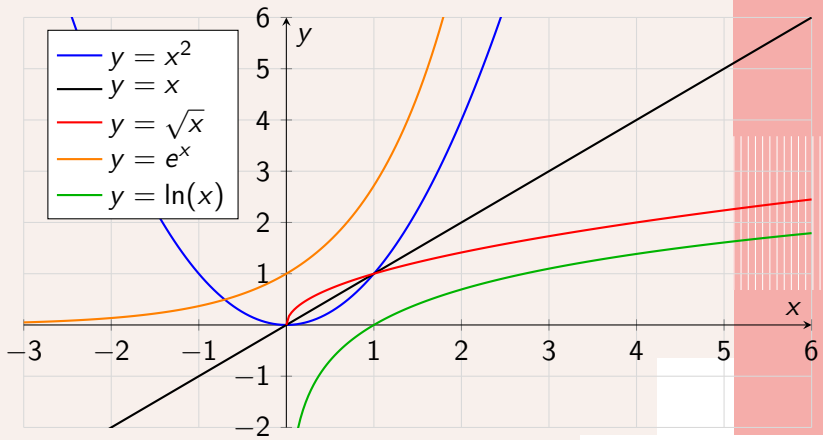
6. $|\ln x|^\beta = o_{x \rightarrow 0^+}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$.

Croissances Comparées (I)





Croissances Comparées (II)



Operations sur les négligeables

Proposition

Soient f, g, h, φ et ψ des fonctions définies dans un voisinage de a , sauf peut-être en a . On suppose que g, h et ψ ne s'annulent pas dans un voisinage de a , sauf peut-être en a . Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Si $f = o_a(h)$ et si $g = o_a(h)$ alors $\lambda f + g = o_a(h)$.
2. Si $f = o_a(g)$ alors $fh = o_a(gh)$.
3. Si $f = o_a(g)$ et $\varphi = o_a(\psi)$ alors $f\varphi = o_a(g\psi)$.

Exercice

► Parmi les fonctions suivantes, laquelle a la croissance la plus rapide lorsque $x \rightarrow +\infty$?

- ☐ $\ln x$
- ☐ x^{100}
- ☐ e^x
- ☐ x^x

► Quelles affirmations sont vraies ?

- ☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = +\infty$
- ☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ pour tout entier n
- ☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = +\infty$
- ☐ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$

Exercice

► Parmi les fonctions suivantes, laquelle a la croissance la plus rapide lorsque $x \rightarrow +\infty$?

- ☐ $\ln x$
- ☐ x^{100}
- ☐ e^x
- ☒ x^x

► Quelles affirmations sont vraies ?

- ☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = +\infty$
- ☒ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ pour tout entier n
- ☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = +\infty$
- ☒ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$

Exercice

► On prend $f(x) = x^3$ et $g(x) = e^{2x}$. Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$?

- ☐ 0
- ☐ $+\infty$
- ☐ 1
- ☐ La limite n'existe pas

► Soit $\alpha > 0$. Quelle est la bonne écriture de la relation de négligeabilité entre x^α et e^x quand $x \rightarrow +\infty$?

- ☐ $x^\alpha = o(e^x)$
- ☐ $e^x = o(x^\alpha)$
- ☐ $x^\alpha \sim e^x$
- ☐ $x^\alpha \gg e^x$

Exercice

► On prend $f(x) = x^3$ et $g(x) = e^{2x}$. Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$?

- ☒ 0
- ☐ $+\infty$
- ☐ 1
- ☐ La limite n'existe pas

► Soit $\alpha > 0$. Quelle est la bonne écriture de la relation de négligeabilité entre x^α et e^x quand $x \rightarrow +\infty$?

- ☒ $x^\alpha = o(e^x)$
- ☐ $e^x = o(x^\alpha)$
- ☐ $x^\alpha \sim e^x$
- ☐ $x^\alpha \gg e^x$

Exercice

► Parmi les limites suivantes, laquelle est correcte ?

☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$

☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{n!} = 0$ pour tout entier n

☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^x}{e^{x^2}} = +\infty$

☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^{1/2}} = 0$

► Vrai ou Faux: si $f(x) = o(\ln(x))$ quand $x \rightarrow +\infty$, alors, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

☐ Vrai

☐ Faux

Exercice

► Parmi les limites suivantes, laquelle est correcte ?

☒ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{e^x} = 0$

☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{n!} = 0$ pour tout entier n

☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^x}{e^{x^2}} = +\infty$

☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^{1/2}} = 0$

► Vrai ou Faux: si $f(x) = o(\ln(x))$ quand $x \rightarrow +\infty$, alors, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

☐ Vrai

☒ Faux

Définition: équivalent

On dit que f est **équivalente** à g au voisinage de a et on note $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ s'il existe une fonction ε et $V \in \mathcal{V}(a)$ tels que

$$\forall x \in V, \quad f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x)), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

Proposition

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \text{ si et seulement si } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Exemple

Un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_p x^p$$

avec $a_n \neq 0$ et $p < \dots < n$. Alors, lorsque $x \rightarrow +\infty$, on a :

$$f(x) \sim a_n x^n.$$

Preuve. On factorise $f(x)$ par x^n :

$$f(x) = x^n (a_n + a_{n-1} x^{-1} + a_{n-2} x^{-2} + \dots + a_p x^{p-n}).$$

On en déduit :

$$\frac{f(x)}{a_n x^n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n} x^{-2} + \dots + \frac{a_p}{a_n} x^{p-n}.$$

Or tous les termes avec x^k pour $k < 0$ tendent vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$, donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{a_n x^n} = 1,$$

ce qui signifie que $f(x) \sim a_n x^n$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Propriétés des équivalents

Proposition

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour toutes fonctions f , g et h , la relation $\sim_a$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x).$

2. $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \Rightarrow g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x).$

3. $\left(f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \text{ et } g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x) \right) \Rightarrow f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x).$

4. Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$. On a $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ell \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell.$

5. $f \underset{a}{\sim} g \implies \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \right).$

6. $f \underset{a}{\sim} g \implies f \text{ et } g \text{ sont de même signe au voisinage de } a.$

Operations sur les équivalents

Proposition

On considère des fonctions définie dans un voisinage de a , sauf peut-être en a , et ne s'annulant pas dans un voisinage de a , sauf peut-être en a . Alors, on a les propriétés suivantes:

1. *Produit : si $f \sim_a g$ et $\varphi \sim_a \psi$, alors $f\varphi \sim_a g\psi$.*
2. *Quotient : si $f \sim_a g$ et $\varphi \sim_a \psi$, alors $\frac{f}{\varphi} \sim_a \frac{g}{\psi}$.*
3. *Composition à droite : si $f \sim_a g$ et si $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = a$, alors $f(\varphi(x)) \sim_{x \rightarrow x_0} g(\varphi(x))$.*

Exercice

1. Soient $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -x^2 - x$. Donner un équivalent de f , de g et de $f + g$ au voisinage de $+\infty$.

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

En déduire un équivalent au voisinage de 0 des fonctions :

- ▶ $x \mapsto \ln(1+x)$,
- ▶ $x \mapsto \ln(1-x)$,
- ▶ $x \mapsto \ln(1-x^2)$.

3. Soient $f(x) = x^2 + x$ et $g(x) = x^2$. A-t-on $f \sim_{+\infty} g$? A-t-on $e^f \sim_{+\infty} e^g$?

Solution

1. $f \sim x^2$, et $g \sim x^2$, mais on a $f + g = x$, donc il n'est pas vrai que $f + g \sim x^2 + x^2 = 2x$.

2. On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x - 0} = \ln'(0) = 1$.

On en déduit les équivalents suivants

► $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x,$

► $\ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x,$

► $\ln(1-x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x^2,$

3. On a $f(x) \sim x^2$ et $g(x) \sim x^2$, mais on a $\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = e^x \rightarrow +\infty$, donc on n'a pas $e^f \sim e^g$.

Composition à gauche

Proposition

Soient f, g définies dans un voisinage de a , sauf peut-être en a , et ne s'annulant pas dans un voisinage de a , sauf peut-être en a . On suppose que $f \sim_a g$. Alors :

1. Valeur absolue : $|f| \sim_a |g|$.
2. Puissance : pour tout $\alpha > 0$, si g est strictement positive au voisinage de a , alors $f^\alpha \sim_a g^\alpha$. En particulier, $\sqrt{f} \sim_a \sqrt{g}$.
3. Logarithme, sous conditions :
 - (a) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in [0, +\infty]$ et si $\ell \neq 1$, alors $\ln f(x) \sim_{x \rightarrow a} \ln g(x)$.
 - (b) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$, alors $\ln f(x) \sim_{x \rightarrow a} (f(x) - 1)$.
4. Exponentielle, sous conditions : si $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = 0$, alors $e^{f(x)} \sim_{x \rightarrow a} e^{g(x)}$.

Application

Soit $f(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$. Donner un équivalent de f et de $\ln f$ au voisinage de $+\infty$.

Solution:

1) Équivalent de f . Par croissances comparées, $x^4 + x^2 + 1 \sim_{x \rightarrow \infty} x^4$. Par le point *Puissance* de la proposition on obtient

$$f(x) \sim x^2 \text{ quand } x \rightarrow +\infty.$$

2) Équivalent de $\ln f$. Comme $f(x) \sim x^2$ et $f(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, on peut appliquer le point *Logarithme* (3a) de la proposition avec $g(x) = x^2$ dont la limite vaut $+\infty \neq 1$. Il vient

$$\ln f(x) \sim_{+\infty} \ln(x^2) = 2 \ln x.$$

Solution Exercice 1.4

$$1. f(x) = \frac{e^{\sin(1/x)} - 1}{x}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Pour $x \rightarrow +\infty$ on a $1/x \rightarrow 0$. On s'appuie sur les deux équivalents $\sin(u) \sim_{u \rightarrow 0} u$ et $e^v - 1 \sim_{v \rightarrow 0} v$, qui s'obtiennent grace au taux d'accroissement. En conséquence, par composition,

$$e^{\sin(1/x)} - 1 \sim \sin\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}.$$

Donc

$$\frac{e^{\sin(1/x)} - 1}{x} \sim \frac{1/x}{x} = \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi la limite vaut 0.

Solution Exercise 1.4

2. $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\ln x}, \quad x \rightarrow 1.$

Posons $x = 1 + h$ avec $h \rightarrow 0$. Alors

$$\sin(\pi x) = \sin(\pi(1 + h)) = \sin(\pi + \pi h) = -\sin(\pi h).$$

Pour $h \rightarrow 0$ on a $\sin(\pi h) \sim \pi h$. De plus $\ln x = \ln(1 + h) \sim h$. Ainsi

$$\frac{\sin(\pi x)}{\ln x} = \frac{-\sin(\pi h)}{\ln(1 + h)} \sim \frac{-\pi h}{h} = -\pi.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{\ln x} = -\pi.$$