INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

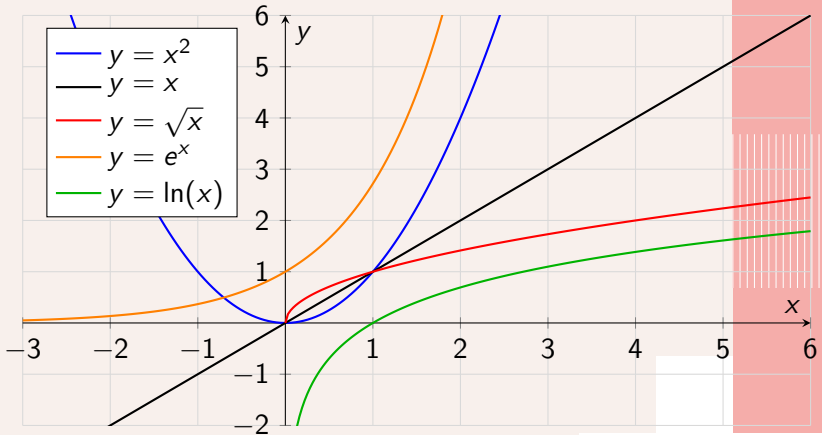
Chapitre 1 - Equivalents

Remise à Niveau

Université Fédérale Toulouse Midi-Pyrénées

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
Liberté Égalité Fraternité

Différente vitesse de croissance



À quoi ça sert les équivalents?

Les équivalents servent à comparer les fonctions entre elles.

- Dire qu'une fonction temps plus vite vers l'infini qu'une autre,
- Permet de calculer des limites.

À retenir

On rappelle les formes indéterminées:

$$+\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 1^{\infty}$$

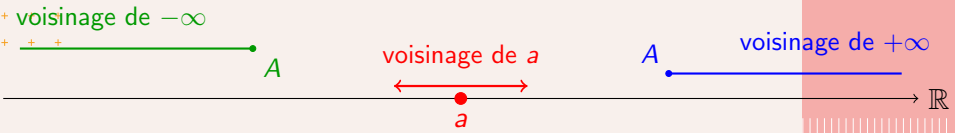
Definiton: Voisinage

- On dit qu'un ensemble $V \subset \mathbb{R}$ est un **voisinage d'un réel** a s'il contient un intervalle ouvert centré en a. Cela signifie qu'il existe $\ell > 0$ tel que :

$$]a - \ell, a + \ell[\subset V.$$

  Autrement dit, V contient tous les réels "assez proches de a".
- On dit que V est un **voisinage de** $+\infty$ s'il contient un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ pour un certain $A \in \mathbb{R}$. Cela signifie que V contient tous les réels "suffisamment grands".
- On dit que V est un **voisinage de** $-\infty$ s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty, A[\subset V$. Cela signifie que V contient tous les réels "suffisamment petits".

Illustration: Voisinage



Point considéré	Ensemble V	Voisinage ? Pourquoi ?
$a = 1$	$]0.5, 1.5[$	Oui, intervalle centré en 1
$a = 1$	$]0, 2[\backslash\{1\}$	Non, car V ne contient pas 1
$+\infty$	$]1000, +\infty[\cup \{0\}$	Oui, contient $]A, +\infty[$
$-\infty$	$]-\infty, 0[$	Oui, contient $]-\infty, A[$

Définition: Négligeable

On dit que f est **négligeable devant** g au voisinage d'un point a (ou en a), s'il vérifie la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists V \in \mathcal{V}(a),\ \forall x \in V, \quad |f(x)| \leq \varepsilon\, |g(x)|.$$

On note :

$$f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x)) \quad \text{ou} \quad f = \underset{a}{o}(g).$$

Proposition

Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage de a (sauf peut-être en a), et supposons que $g(x) \neq 0$ quand x est proche de a (sauf peut-être en a). Alors :

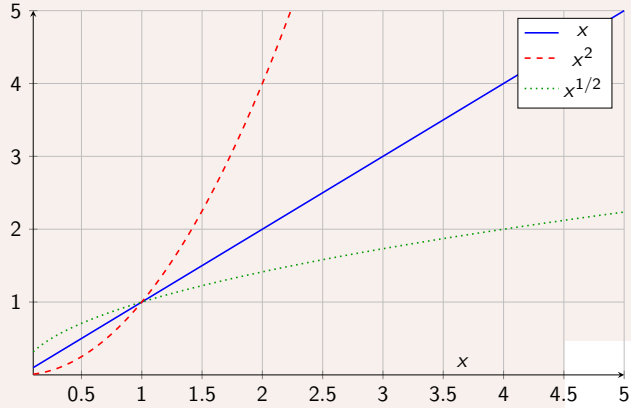
$$f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Relations classiques à connaitre:

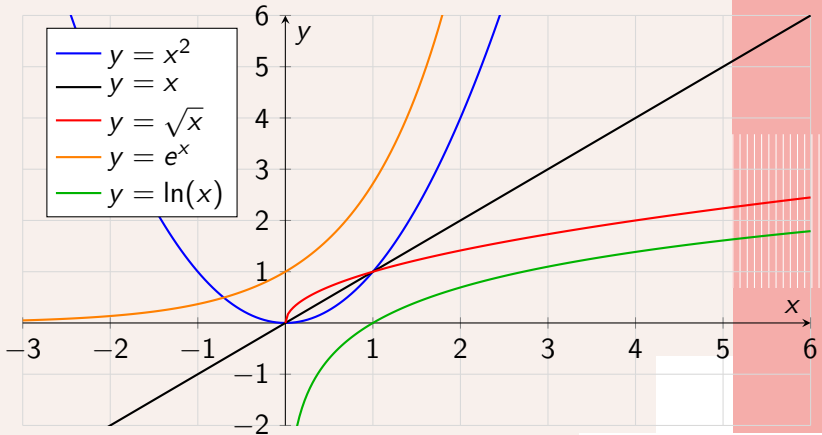
Soit $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$.

1. $x^\alpha = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^\beta\right)$ si et seulement si $\alpha < \beta$.
2. $x^\alpha = \underset{x\to 0}{o}\left(x^\beta\right)$ si et seulement si $\alpha > \beta$.
3. $f(x) = \underset{x\to a}{o}(1)$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.
4. $(\ln x)^\beta = \underset{x\to+\infty}{o}(x^\alpha)$.
5. $x^\beta = \underset{x\to+\infty}{o}(e^{\alpha x})$.
6. $|\ln x|^\beta = \underset{x\to 0^+}{o}\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$.

Croissances Comparées (I)



Croissances Comparées (II)



Operations sur les négligeables

Proposition

Soient f, g, h, φ et ψ des fonctions définies dans un voisinage de a, sauf peut-être en a. On suppose que g, h et ψ ne s'annulent pas dans un voisinage de a, sauf peut-être en a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. *Si $f = \underset{a}{o}(h)$ et si $g = \underset{a}{o}(h)$ alors $\lambda f + g = \underset{a}{o}(h)$.*
2. *Si $f = \underset{a}{o}(g)$ alors $fh = \underset{a}{o}(gh)$.*
3. *Si $f = \underset{a}{o}(g)$ et $\varphi = \underset{a}{o}(\psi)$ alors $f\varphi = \underset{a}{o}(g\psi)$.*

Exercice

- Parmi les fonctions suivantes, laquelle a la croissance la plus rapide lorsque $x \to +\infty$?
  - $\ln x$
  - x^{100}
  - e^x
  - x^x

- Quelles affirmations sont vraies ?
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = +\infty$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ pour tout entier n
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = +\infty$
  - $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$

Exercice

- Parmi les fonctions suivantes, laquelle a la croissance la plus rapide lorsque $x \to +\infty$?
  - ☐ $\ln x$
  - ☐ x^{100}
  - ☐ e^x
  - ☒ x^x

- Quelles affirmations sont vraies ?
  - ☐ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = +\infty$
  - ☒ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ pour tout entier n
  - ☐ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = +\infty$
  - ☒ $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$

Exercice

- On prend $f(x) = x^3$ et $g(x) = e^{2x}$. Que vaut $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$?
  - ☐ 0
  - ☐ $+\infty$
  - ☐ 1
  - ☐ La limite n'existe pas

- Soit $\alpha > 0$. Quelle est la bonne écriture de la relation de négligeabilité entre x^α et e^x quand $x \to +\infty$?
  - ☐ $x^\alpha = o(e^x)$
  - ☐ $e^x = o(x^\alpha)$
  - ☐ $x^\alpha \sim e^x$
  - ☐ $x^\alpha \gg e^x$

Exercice

- On prend $f(x) = x^3$ et $g(x) = e^{2x}$. Que vaut $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$?
  - ☒ 0
  - ☐ $+\infty$
  - ☐ 1
  - ☐ La limite n'existe pas

- Soit $\alpha > 0$. Quelle est la bonne écriture de la relation de négligeabilité entre x^α et e^x quand $x \to +\infty$?
  - ☒ $x^\alpha = o(e^x)$
  - ☐ $e^x = o(x^\alpha)$
  - ☐ $x^\alpha \sim e^x$
  - ☐ $x^\alpha \gg e^x$

Exercice

- Parmi les limites suivantes, laquelle est correcte ?
  - ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$
  - ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{n!} = 0$ pour tout entier n
  - ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^x}{e^{x^2}} = +\infty$
  - ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^{1/2}} = 0$
- Vrai ou Faux: si $f(x) = o(\ln(x))$ quand $x \to +\infty$, alors, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
  - ☐ Vrai
  - ☐ Faux

Exercice

- Parmi les limites suivantes, laquelle est correcte ?
  - ☒ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$
  - ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{n!} = 0$ pour tout entier n
  - ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^x}{e^{x^2}} = +\infty$
  - ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^{1/2}} = 0$
- Vrai ou Faux: si $f(x) = o(\ln(x))$ quand $x \to +\infty$, alors, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
  - ☐ Vrai
  - ☒ Faux

Définition: équivalent

On dit que f est **équivalente à** g au voisinage de a et on note $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ s'il existe une fonction ε et $V \in \mathcal{V}(a)$ tels que

$$\forall x \in V, \quad f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x)), \quad \text{avec } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Proposition

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \textit{ si et seulement si } \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Exemple

Un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_p x^p$$

avec $a_n \neq 0$ et $p < \ldots < n$. Alors, lorsque $x \to +\infty$, on a :

$$f(x) \sim a_n x^n.$$

Preuve. On factorise $f(x)$ par x^n :

$$f(x) = x^n \left(a_n + a_{n-1} x^{-1} + a_{n-2} x^{-2} + \ldots + a_p x^{p-n} \right).$$

On en déduit :

$$\frac{f(x)}{a_n x^n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n} x^{-2} + \ldots + \frac{a_p}{a_n} x^{p-n}.$$

Or tous les termes avec x^k pour $k < 0$ tendent vers 0 lorsque $x \to +\infty$, donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{a_n x^n} = 1,$$

ce qui signifie que $f(x) \sim a_n x^n$ lorsque $x \to +\infty$.

Propriétés des équivalents

Proposition

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour toutes fonctions f, g et h, la relation $\underset{a}{\sim}$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $f(x) \underset{x \to a}{\sim} f(x)$.
2. $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \Rightarrow g(x) \underset{x \to a}{\sim} f(x)$.
3. $\Big(f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \text{ et } g(x) \underset{x \to a}{\sim} h(x)\Big) \Rightarrow f(x) \underset{x \to a}{\sim} h(x)$.
4. *Soit* $\ell \in \mathbb{R}^*$. *On a* $f(x) \underset{x \to a}{\sim} \ell \iff \lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.
5. $f \underset{a}{\sim} g \Longrightarrow \Big(\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell\Big)$.
6. $f \underset{a}{\sim} g \Longrightarrow f$ *et* g *sont de même signe au voisinage de* a.

Operations sur les équivalents

Proposition

On considère des fonctions définie dans un voisinage de a, sauf peut-être en a, et ne s'annulant pas dans un voisinage de a, sauf peut-être en a. Alors, on a les propriétés suivantes:

1. *Produit : si* $f \underset{a}{\sim} g$ *et* $\varphi \underset{a}{\sim} \psi$, *alors* $f\varphi \underset{a}{\sim} g\psi$.
2. *Quotient : si* $f \underset{a}{\sim} g$ *et* $\varphi \underset{a}{\sim} \psi$, *alors* $\dfrac{f}{\varphi} \underset{a}{\sim} \dfrac{g}{\psi}$.
3. *Composition à droite : si* $f \underset{a}{\sim} g$ *et si* $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = a$, *alors* $f(\varphi(x)) \underset{x \to x_0}{\sim} g(\varphi(x))$.

Exercice

1. Soient $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -x^2 + x$. Donner un équivalent de f, de g et de $f + g$ au voisinage de $+\infty$.

2. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

   En déduire un équivalent au voisinage de 0 des fonctions :
   - $x \mapsto \ln(1+x)$,
   - $x \mapsto \ln(1-x)$,
   - $x \mapsto \ln(1-x^2)$.

3. Soient $f(x) = x^2 + x$ et $g(x) = x^2$. A-t-on $f \sim_{+\infty} g$? A-t-on $e^f \sim_{+\infty} e^g$?

Solution

1. $f \sim x^2$, et $g \sim -x^2$, mais on a $f + g = x + 1$, donc il n'est pas vrai que $f + g \sim x^2 - x^2 = 0$.
2. On a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x - 0} = \ln'(0) = 1$.

   On en déduit les équivalents suivants
   - $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x$,
   - $\ln(1-x) \underset{x \to 0}{\sim} -x$,
   - $\ln(1-x^2) \underset{x \to 0}{\sim} -x^2$,
3. On a $f(x) \sim x^2$ et $g(x) \sim x^2$, mais on a $\dfrac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = e^x \to +\infty$, donc on n'a pas $e^f \sim e^g$.

Composition à gauche

Proposition

Soient f, g définies dans un voisinage de a, sauf peut-être en a, et ne s'annulant pas dans un voisinage de a, sauf peut-être en a. On suppose que $f \sim_a g$. Alors :

1. *Valeur absolue : $|f| \sim_a |g|$.*
2. *Puissance : pour tout $\alpha > 0$, si g est strictement positive au voisinage de a, alors $f^\alpha \sim_a g^\alpha$. En particulier, $\sqrt{f} \sim_a \sqrt{g}$.*
3. *Logarithme, sous conditions :*
   (a) *Si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in [0, +\infty]$ et si $\ell \neq 1$, alors $\ln f(x) \sim_{x\to a} \ln g(x)$.*
   (b) *Si $\lim_{x\to a} f(x) = 1$, alors $\ln f(x) \sim_{x\to a} (f(x) - 1)$.*
4. *Exponentielle, sous conditions : si $\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = 0$, alors $e^{f(x)} \sim_{x\to a} e^{g(x)}$.*

Application

Soit $f(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$. Donner un équivalent de f et de $\ln f$ au voisinage de $+\infty$.

Application

Soit $f(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$. Donner un équivalent de f et de $\ln f$ au voisinage de $+\infty$.

Solution:

1) Équivalent de f. Par croissances comparées, $x^4 + x^2 + 1 \sim_{x\to\infty} x^4$. Par le point *Puissance* de la proposition on obtient

$$f(x) \sim x^2 \text{ quand } x \to +\infty.$$

2) Équivalent de $\ln f$. Comme $f(x) \sim x^2$ et $f(x) \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$, on peut appliquer le point *Logarithme* (3a) de la proposition avec $g(x) = x^2$ dont la limite vaut $+\infty \neq 1$. Il vient

$$\ln f(x) \sim_{+\infty} \ln\left(x^2\right) = 2 \ln x.$$

Solution Exercice 1.4

1. $f(x) = \dfrac{e^{\sin(1/x)} - 1}{x}, \quad x \to +\infty.$

Pour $x \to +\infty$ on a $1/x \to 0$. On s'appuie sur les deux équivalents $\sin(u) \sim_{u\to 0} u$ et $e^v - 1 \sim_{v\to 0} v$, qui s'obtiennent grace au taux d'accroissement. En conséquence, par composition,

$$e^{\sin(1/x)} - 1 \sim \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) \sim \tfrac{1}{x}.$$

Donc

$$\frac{e^{\sin(1/x)} - 1}{x} \sim \frac{1/x}{x} = \frac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi la limite vaut 0.

Solution Exercice 1.4

2. $f(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\ln x}, \quad x \to 1.$

Posons $x = 1 + h$ avec $h \to 0$. Alors

$$\sin(\pi x) = \sin\big(\pi(1+h)\big) = \sin(\pi + \pi h) = -\sin(\pi h).$$

Pour $h \to 0$ on a $\sin(\pi h) \sim \pi h$. De plus $\ln x = \ln(1+h) \sim h$. Ainsi

$$\frac{\sin(\pi x)}{\ln x} = \frac{-\sin(\pi h)}{\ln(1+h)} \sim \frac{-\pi h}{h} = -\pi.$$

Donc

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin(\pi x)}{\ln x} = -\pi.$$