



Chapitre 3 - Déterminants

Remise à Niveau

Table of Contents

Kit de survie Algèbre linéaire

Interprétation géométrique du déterminant

Développement d'un déterminant suivant une ligne ou une colonne

Applications

Table of Contents

Kit de survie Algèbre linéaire

Interprétation géométrique du déterminant

Développement d'un déterminant suivant une ligne ou une colonne

Applications

Définition d'un espace vectoriel

On appelle *espace vectoriel réel* un ensemble E muni de deux opérations :

- ▶ une *addition* qui, à deux éléments $u, v \in E$, associe un élément $u + v \in E$;
- ▶ une *multiplication par un scalaire* qui, à tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $u \in E$, associe un élément $\lambda u \in E$.

Ces opérations doivent vérifier les propriétés suivantes, pour tous $u, v, w \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

1. $(u + v) + w = u + (v + w)$ (associativité) ;
2. $u + v = v + u$ (commutativité) ;
3. il existe un élément $0_E \in E$ tel que $u + 0_E = u$ (élément neutre) ;
4. pour tout $u \in E$, il existe $-u \in E$ tel que $u + (-u) = 0_E$ (opposé) ;
5. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$;
6. $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$;
7. $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$;
8. $1 \cdot u = u$.

Quelques espaces vectoriels usuels

- ▶ $\mathbb{R}^n$: l'espace des vecteurs à n coordonnées réelles $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$.
Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$: $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$, $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$.
- ▶ $\mathbb{R}[X]$: l'espace des polynômes à coefficients réels

$$P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n.$$

En particulier, $\mathbb{R}_n[X]$, l'espace des polynômes de degré $\leq n$.

- ▶ $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$: l'espace des fonctions $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Les opérations sont définies *point par point* :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Quelques espaces vectoriels usuels

- ▶ $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$: espaces de fonctions continues ou continûment dérivables.
- ▶ $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: l'espace des matrices réelles à n lignes et p colonnes.
- ▶ $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: l'espace des suites réelles

$$(u_n)_{n \geq 0},$$

avec des opérations définies terme à terme.

Un exemple surprenant : la relativité

En relativité restreinte, si x et y sont deux vitesses exprimées en unités où la vitesse de la lumière vaut 1, la vitesse résultant de la composition de deux mouvements est

$$x \oplus y = \frac{x + y}{1 + xy}.$$

Cette loi n'est donc **pas** l'addition usuelle des nombres réels.

On peut également définir une multiplication par un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$ par

$$\alpha \odot x = \frac{(1+x)^\alpha - (1-x)^\alpha}{(1+x)^\alpha + (1-x)^\alpha}.$$

Un exemple surprenant : la relativité

- ▶ Avec ces deux opérations, l'intervalle $(-1, 1)$ possède une structure d'espace vectoriel.
- ▶ Le nombre 1 correspond ici à la vitesse de la lumière : la condition $|x| < 1$ signifie donc que les vitesses restent inférieures à la vitesse de la lumière.
- ▶ Ces opérations peuvent sembler artificielles, mais elles correspondent naturellement à la façon dont les vitesses se composent en relativité.

La notion de vecteur ne dépend donc pas de la forme de l'objet, mais des opérations que l'on définit sur cet objet.

Critère de sous-espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel et soit $F \subset E$. Alors F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

$$F \neq \emptyset$$

et, pour tous $u, v \in F$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\lambda u + \mu v \in F.$$

Autrement dit, dès que l'on prend deux éléments de F et qu'on les combine linéairement, le résultat appartient encore à F .

Remarque: Combinaison linéaire

Toute expression de la forme

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n$$

est appelée une *combinaison linéaire* des vecteurs $u_1, \dots, u_n$.

Famille libre, famille génératrice, base

Definition (Famille libre)

Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E . On dit que cette famille est *libre*

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Definition (Famille génératrice)

Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E . On dit que cette famille est *génératrice* de E si

$$\forall x \in E, \quad \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \quad \text{tels que} \quad x = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n.$$

Changer de base : deux systèmes de coordonnées

Une base permet de décrire chaque vecteur par ses coordonnées.

Considérons les deux bases de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3), \quad \begin{cases} e_1 = (1, 0, 0), \\ e_2 = (0, 1, 0), \\ e_3 = (0, 0, 1), \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3), \quad \begin{cases} u_1 = (1, 1, 0), \\ u_2 = (1, 0, 1), \\ u_3 = (0, 1, 1). \end{cases}$$

Tout vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ possède deux descriptions :

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \quad \text{et} \quad x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3.$$

On note alors

$$[x]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad [x]_{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur x ne change pas : seules ses coordonnées changent.

Changer de base : calcul des coordonnées

Supposons que

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

soit connu dans la base canonique $\mathcal{E}$.

Pour trouver ses coordonnées dans $\mathcal{U}$, on écrit

$$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3.$$

Avec

$$u_1 = (1, 1, 0), \quad u_2 = (1, 0, 1), \quad u_3 = (0, 1, 1),$$

on obtient

$$x = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3).$$

Changer de base : calcul des coordonnées

Les coordonnées $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ vérifient donc

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = x_1, \\ \alpha_1 + \alpha_3 = x_2, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = x_3. \end{cases} \quad \text{D'où}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{x_1 + x_2 - x_3}{2}, \\ \alpha_2 &= \frac{x_1 - x_2 + x_3}{2}, \\ \alpha_3 &= \frac{-x_1 + x_2 + x_3}{2}. \end{aligned}$$

Par exemple, pour $x = (2, 4, 6)$:

$$[x]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad [x]_{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

En effet,

$$x = 0u_1 + 2u_2 + 4u_3 = (2, 4, 6).$$

Changer de base : formulation matricielle

La base $\mathcal{U}$ s'écrit dans la base canonique $\mathcal{E}$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On regroupe ces vecteurs dans une matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si

$$[x]_{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad \text{alors} \quad \boxed{[x]_{\mathcal{E}} = P[x]_{\mathcal{U}}.}$$

Changer de base : formulation matricielle

Pour passer dans l'autre sens :

$$[x]_{\mathcal{U}} = P^{-1}[x]_{\mathcal{E}},$$

avec

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le choix d'une base permet donc de choisir le système de coordonnées le plus adapté au problème.

Application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels. Une application

$$f : E \longrightarrow F$$

est dite *linéaire* si, pour tous $u, v \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

Autrement dit, une application linéaire préserve les combinaisons linéaires. En particulier,

$$f(u + v) = f(u) + f(v) \quad \text{et} \quad f(\lambda u) = \lambda f(u).$$

Application linéaire et matrice

Lorsque E et F sont de dimension finie, une application linéaire

$$f : E \longrightarrow F$$

peut être représentée par une matrice.

Soient

$$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$$

des bases de E et F .

Il suffit de connaître l'image des vecteurs de la base $\mathcal{B}$:

$$f(e_j) = a_{1j}f_1 + \dots + a_{pj}f_p.$$

On définit alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}.$$

Application linéaire et calcul matriciel

Soit $x \in E$, de coordonnées $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Par linéarité,

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

implique

$$f(x) = x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n).$$

Ainsi, les coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{C}$ sont obtenues par une multiplication matricielle :

$$[f(x)]_{\mathcal{C}} = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f)[x]_{\mathcal{B}}.$$

Théorème du rang

Soit

$$f : E \longrightarrow F$$

une application linéaire, où E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie. Alors

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)).$$

Autrement dit,

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \operatorname{rang}(f),$$

où le *rang* de f est la dimension de son image.

Proposition

Soit

$$f : E \longrightarrow F$$

une application linéaire. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$f \text{ est injective} \iff \ker(f) = \{0_E\}.$$

En particulier, si E et F sont deux espaces vectoriels de même dimension finie, les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$f \text{ est inversible} \iff f \text{ est injective} \iff \ker(f) = \{0_E\}.$$

Preuve: $\Rightarrow$

Supposons tout d'abord que f soit injective.

Soit $x \in \ker(f)$. Alors

$$f(x) = 0_F.$$

Or, comme f est linéaire, $f(0_E) = 0_F$.

On a donc $f(x) = f(0_E)$. L'injectivité de f implique alors que $x = 0_E$. Ainsi,

$$\ker(f) = \{0_E\}.$$

Preuve: $\Leftarrow$

Réciproquement, supposons que $\ker(f) = \{0_E\}$.

Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Par linéarité,

$$f(x - y) = f(x) - f(y) = 0_F.$$

Ainsi, $x - y \in \ker(f)$. Comme le noyau est réduit à 0_E , on obtient

$$x - y = 0_E,$$

et donc $x = y$. L'application f est donc injective.

Enfin, si E et F sont de même dimension finie, une application linéaire injective est également surjective. Ainsi, f est bijective et donc inversible.

Table of Contents

Kit de survie Algèbre linéaire

Interprétation géométrique du déterminant

Développement d'un déterminant suivant une ligne ou une colonne

Applications

Définition

Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ une base de E , un espace vectoriel de dimension 2. Soient U et V deux vecteurs de E . On appelle **déterminant de U et V** , noté $\det(U, V)$, l'aire **orientée** du parallélogramme défini par les vecteurs U et V dans la base $\mathcal{E}$.

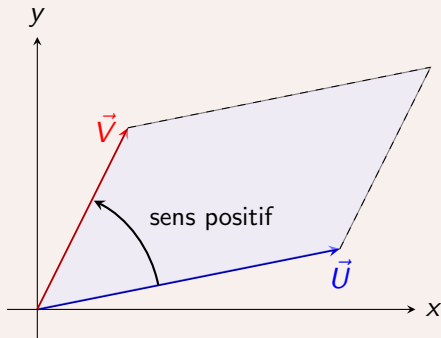


Figure: Aire orientée du parallélogramme défini par les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$

Propriétés

Soient U , V et W trois vecteurs de E , et $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ une base de E .

1. $\det_{\mathcal{E}}(e_1, e_2) = 1$.
2. Le couple (U, V) est libre si et seulement si $\det_{\mathcal{E}}(U, V) \neq 0$.
3. Pour tous réels α et β , on a :

$$\det_{\mathcal{E}}(\alpha U, V) = \alpha \det_{\mathcal{E}}(U, V), \quad \det_{\mathcal{E}}(U, \beta V) = \beta \det_{\mathcal{E}}(U, V).$$

4. Linéarité :

$$\det_{\mathcal{E}}(U, V + W) = \det_{\mathcal{E}}(U, V) + \det_{\mathcal{E}}(U, W),$$

$$\det_{\mathcal{E}}(U + W, V) = \det_{\mathcal{E}}(U, V) + \det_{\mathcal{E}}(W, V).$$

5. Antisymétrie :

$$\det_{\mathcal{E}}(V, U) = -\det_{\mathcal{E}}(U, V).$$

Exemple (Présentation du calcul d'un déterminant 2×2)

Soient $U = u_1 e_1 + u_2 e_2$ et $V = v_1 e_1 + v_2 e_2$. On va calculer $\det_{\mathcal{E}}(U, V)$ à l'aide des propriétés précédentes.

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{E}}(U, V) &= \det_{\mathcal{E}}(u_1 e_1 + u_2 e_2, v_1 e_1 + v_2 e_2) \\ &= u_1 v_1 \det_{\mathcal{E}}(e_1, e_1) + u_1 v_2 \det_{\mathcal{E}}(e_1, e_2) + u_2 v_1 \det_{\mathcal{E}}(e_2, e_1) + u_2 v_2 \det_{\mathcal{E}}(e_2, e_2) \\ &= u_1 v_2 - u_2 v_1.\end{aligned}$$

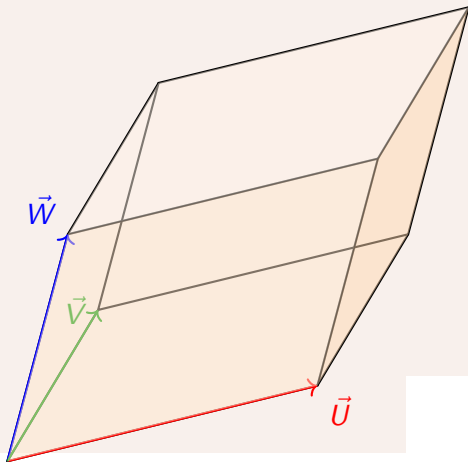
💡 À retenir

Si $U = u_1 e_1 + u_2 e_2 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $V = v_1 e_1 + v_2 e_2 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, alors

$$\det_{\mathcal{E}}(U, V) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

Déterminant de trois vecteurs en dimension 3

Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un espace vectoriel E de dimension 3. Soient U , V et W trois vecteurs de E . On note $S(U, V, W)$ le volume "orienté" du parallélépipède défini par les vecteurs U , V et W .



Propriétés

Soit U, V et W trois vecteurs de E .

1. $\det_{\mathcal{E}}(e_1, e_2, e_3) = 1$.
2. (U, V, W) est libre si et seulement si $\det_{\mathcal{E}}(U, V, W) \neq 0$.
3. $\det_{\mathcal{E}}$ est une forme 3-linéaire alternée.
4. $\det_{\mathcal{E}}(V, U, W) = -\det_{\mathcal{E}}(U, V, W)$ et $\det_{\mathcal{E}}(V, W, U) = \det_{\mathcal{E}}(U, V, W)$.

Calcul d'un déterminant 3×3

Posons

$$U = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3, \quad V = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3, \quad W = w_1 e_1 + w_2 e_2 + w_3 e_3.$$

Montrons que

$$\det_{\mathcal{E}}(U, V, e_3) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 0 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

Calcul d'un déterminant 3×3

On a

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{E}}(U, V, e_3) &= \det_{\mathcal{E}}(u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3, V, e_3) \\ &= u_1 \det_{\mathcal{E}}(e_1, V, e_3) + u_2 \det_{\mathcal{E}}(e_2, V, e_3) + u_3 \det_{\mathcal{E}}(e_3, V, e_3).\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{E}}(e_1, V, e_3) &= \det_{\mathcal{E}}(e_1, v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3, e_3) \\ &= v_1 \det_{\mathcal{E}}(e_1, e_1, e_3) + v_2 \det_{\mathcal{E}}(e_1, e_2, e_3) + v_3 \det_{\mathcal{E}}(e_1, e_3, e_3) \\ &= v_2,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{E}}(e_2, V, e_3) &= v_1 \det_{\mathcal{E}}(e_2, e_1, e_3) + v_2 \det_{\mathcal{E}}(e_2, e_2, e_3) + v_3 \det_{\mathcal{E}}(e_2, e_3, e_3) \\ &= -v_1.\end{aligned}$$

Calcul d'un déterminant 3×3

Ainsi,

$$\det_{\mathcal{E}}(U, V, e_3) = u_1 v_2 - u_2 v_1 .$$

De même, on montre que

$$\begin{vmatrix} u_1 & 0 & w_1 \\ u_2 & 1 & w_2 \\ u_3 & 0 & w_3 \end{vmatrix} = u_1 w_3 - u_3 w_1 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & v_1 & w_1 \\ 0 & v_2 & w_2 \\ 0 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = v_2 w_3 - v_3 w_2 .$$

Calcul d'un déterminant 3×3

Au final, si on pose

$$U = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3, \quad V = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3, \quad W = w_1 e_1 + w_2 e_2 + w_3 e_3,$$

alors

$$\det_{\mathcal{E}}(U, V, W) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = u_1 v_2 w_3 + u_2 v_3 w_1 + u_3 v_1 w_2 - u_2 v_1 w_3 - u_1 v_3 w_2 - u_3 v_2 w_1.$$

Calcul d'un déterminant 3×3

On peut grouper les termes par rapport à la première colonne:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} &= u_1 v_2 w_3 + u_2 v_3 w_1 + u_3 v_1 w_2 - u_2 v_1 w_3 - u_1 v_3 w_2 - u_3 v_2 w_1 \\ &= u_1(v_2 w_3 - v_3 w_2) - u_2(v_1 w_3 - v_3 w_1) + u_3(v_1 w_2 - v_2 w_1) \\ &= u_1 \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

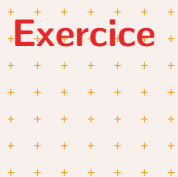
Calcul d'un déterminant 3×3

On peut également faire de même par rapport à la première ligne:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = u_1 v_2 w_3 + u_2 v_3 w_1 + u_3 v_1 w_2 - u_2 v_1 w_3 - u_1 v_3 w_2 - u_3 v_2 w_1$$
$$= u_1 (v_2 w_3 - v_3 w_2) - v_1 (u_2 w_3 - u_3 w_2) + w_1 (u_2 v_3 - u_3 v_2)$$
$$= u_1 \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - v_1 \begin{vmatrix} u_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 \end{vmatrix} + w_1 \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}$$

💡 À retenir

Le déterminant se calcule de façon récursive. On peut calculer un déterminant d'une matrice $n \times n$ à l'aide de n déterminants de taille $(n-1) \times (n-1)$.



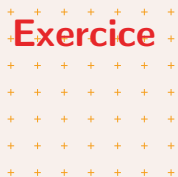
Quel est le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$?

- ☐ A) 13
- ☐ B) 11
- ☐ C) 17
- ☐ D) 7

Exercice

Quel est le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$?

- ☐ A) 13
- ☒ B) 11
- ☐ C) 17
- ☐ D) 7



La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ a un déterminant égal à :

- ☐ A) 1
- ☐ B) 2
- ☐ C) 0
- ☐ D) -2

Exercice

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ a un déterminant égal à :

- ☐ A) 1
- ☐ B) 2
- ☒ C) 0
- ☐ D) -2

Exercice

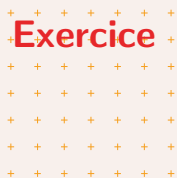
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Alors son déterminant vaut :

- ☐ A) 2
- ☐ B) 8
- ☐ C) 1
- ☐ D) 4

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Alors son déterminant vaut :

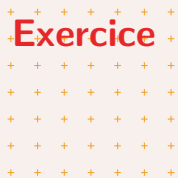
- ☒ A) 2
- ☐ B) 8
- ☐ C) 1
- ☐ D) 4



Exercice

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ a un déterminant nul.

- ☐ A) Vrai
- ☐ B) Faux



Exercice

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ a un déterminant nul.

- ☒ A) Vrai
- ☐ B) Faux

Détermin

Soit $V_1, V_2, \dots, V_n$ n vecteurs de E .

On appelle **déterminant** et on note $\det_{\mathcal{E}}$ la forme n -linéaire alternée sur E qui prend la valeur 1 en $(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Propriétés

1. $\det_{\mathcal{E}}$ est une forme n -linéaire alternée.
2. $\det_{\mathcal{E}}(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$.
3. $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ est libre si et seulement si $\det_{\mathcal{E}}(V_1, V_2, \dots, V_n) \neq 0$.
4. Si pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $V_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$ avec tous les a_{ij} dans $\mathbb{R}$, alors

$$\det_{\mathcal{E}}(V_1, V_2, \dots, V_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n},$$

où S_n est le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$. On note a_{ij} ses coefficients. On appelle déterminant de la matrice A le scalaire défini par :

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} = \det_{\mathcal{E}}(C_1, C_2, \dots, C_n), \quad (1)$$

où les C_i sont les colonnes de A . On note:

$$\text{pour } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \text{alors} \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \in \mathbb{R}.$$

Résultats clés

Le déterminant de A est une forme n -linéaire alternée par rapport aux colonnes de A .

En conséquence :

1. Échanger deux colonnes de la matrice A change le signe du déterminant.
2. Ajouter à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes ne modifie pas le déterminant.
3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

Theorem

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\det({}^t A) = \det A$.

Le déterminant de A est une forme n -linéaire par rapport aux lignes de A , donc :

1. Échanger deux lignes de la matrice A change le signe du déterminant.
2. Ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes ne modifie pas le déterminant.

Exemple

On va calculer le déterminant de la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note les lignes :

$$L_1 = (1, 2, 3, 4), \quad L_2 = (1, 1, 1, 1), \quad L_3 = (0, 1, 2, 3)$$

Et on remarque que $L_1 = L_2 + L_3$. On peut conclure que $\det A = 0$ puisqu'alors, les lignes forment une famille liée.

Exemple

Sinon, on peut faire un calcul explicite. Comme on ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant des combinaisons linéaires des autres lignes, on fait l'opération

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3$$

ce qui donne

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Exercice

Sachant que $255 = 15 \times 17$, $357 = 21 \times 17$ et $527 = 31 \times 17$, montrer que le déterminant

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

est divisible par 17.

Solution

On note C_1 , C_2 et C_3 les colonnes de Δ . On ne change pas le déterminant en ajoutant à C_3 la combinaison $100 \cdot C_1 + 10 \cdot C_2$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 5 \\ 3 & 5 & 3 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7 \\ 5 & 2 & 5 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 255 \\ 3 & 5 & 357 \\ 5 & 2 & 527 \end{vmatrix}$$

On factorise la dernière colonne:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 15 \times 17 \\ 3 & 5 & 21 \times 17 \\ 5 & 2 & 31 \times 17 \end{vmatrix} = 17 \times \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 15 \\ 3 & 5 & 21 \\ 5 & 2 & 31 \end{vmatrix}}_{\in \mathbb{Z}}$$

Table of Contents

Kit de survie Algèbre linéaire

Interprétation géométrique du déterminant

Développement d'un déterminant suivant une ligne ou une colonne

Applications

Développement suivant une colonne/ligne

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(K)$. On a

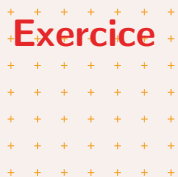
$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \Delta_{ij} a_{ij},$$

où Δ_{ij} est le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en enlevant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

En développant suivant la ligne i , on obtient :

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \Delta_{ij} a_{ij},$$

où Δ_{ij} est le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en enlevant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.



Calculer de deux manières différentes le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 - \lambda \\ 0 & 1 - \lambda & 2 \\ 1 - \lambda & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Méthode 1: Développement par rapport à la 1ère ligne.

On développe Δ le long de la première ligne :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-2) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - 4 \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1-\lambda & 0 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 0 & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 2 \end{pmatrix} \\ &= (-2)((1-\lambda) \cdot 0 - 2 \cdot 2) - 4(0 \cdot 0 - 2 \cdot (1-\lambda)) + (1-\lambda)(0 \cdot 2 - (1-\lambda) \cdot (1-\lambda)) \\ &= 8 + 8(1-\lambda) - (1-\lambda)^3.\end{aligned}$$

On obtient, en développant,

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 5\lambda + 15$$

Méthode 2 : Développement par rapport à la 1ère colonne

. On développe Δ le long de la première colonne :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-2) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - 0 \det \begin{pmatrix} 4 & 1-\lambda \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 4 & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 2 \end{pmatrix} \\ &= (-2)((1-\lambda) \cdot 0 - 2 \cdot 2) - 0 + (1-\lambda)(4 \cdot 2 - (1-\lambda)^2) \\ &= 8 + 8(1-\lambda) - (1-\lambda)^3.\end{aligned}$$

On obtient, en développant,

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 5\lambda + 15$$

Déterminant d'une matrice triangulaire

Theorem (Déterminant des matrices triangulaires supérieures)

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

Propriétés importantes

Pour tous $A, B \in M_n(K)$, on a

$$\det(BA) = \det(AB) = (\det A) \times (\det B).$$

Soit $A \in M_n(K)$.

$$A \text{ est inversible} \iff \det A \neq 0.$$

De plus, si A est inversible, alors

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Deux matrices semblables ont le même déterminant.

Attention:

En général, on n'a pas

$$\det(A + B) = \det A + \det B.$$

Table of Contents

Kit de survie Algèbre linéaire

Interprétation géométrique du déterminant

Développement d'un déterminant suivant une ligne ou une colonne

Applications

Un exemple (partie 1 sur 3)

Exercice

Soit $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{bmatrix}$. Trouver une condition sur λ pour que A soit inversible ?

- ▶ On calcule le déterminant et on regarde quand il n'est pas nul.
- ▶ On soustrait la 2^e colonne à la 1^{re}, puis on utilise la linéarité par rapport à la première colonne pour obtenir :

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 2 \\ 1 - \lambda & \lambda & -1 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

Un exemple (partie 2 sur 3)

► On ajoute maintenant la 1^{re} ligne à la 2^e ligne :

$$(\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda + 1 & 1 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

et on développe suivant la première colonne :

$$\begin{aligned} (\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda + 1 & 1 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} &= (\lambda - 1)(-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)[\lambda(\lambda + 1) - 2] \\ &= (\lambda - 1)^2(\lambda + 2). \end{aligned}$$

► Rappelons que A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$:

$$(\lambda - 1)^2(\lambda + 2) \neq 0 \iff \lambda \neq 1 \quad \text{et} \quad \lambda \neq -2.$$

Un exemple (partie 3 sur 3)

On peut aussi développer directement suivant la première colonne :

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda^2 + 2) - (\lambda - 4) + 2(-1 - 2\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda + 2.$$

Il faut ensuite factoriser en remarquant que 1 est une racine :

$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 2) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2).$$

Trouver l'inverse d'une matrice

Definition

Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, on définit la **comatrice** comme étant la matrice :

$$\mathbf{C}(A) = \left((-1)^{i+j} \Delta_{ij} \right)_{1 \leq i, j \leq n},$$

où Δ_{ij} est le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A .

Definition

La matrice ${}^t\mathbf{C}(A)$ est la matrice adjointe de A , notée $\text{Adj}A$.

Note

En français, les notations diffèrent légèrement. La matrice $((-1)^{i+j} \Delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est appelée comatrice, traditionnellement notée $\text{com}A$.

Un résultat de Laplace

Theorem

$$\forall A \in M_n(K) \quad (\text{com}A) \cdot A = A (\text{com}A) = \det A \, I_n.$$

Si A est inversible, alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{com}A.$$

Un résultat de Laplace

Theorem

$$\forall A \in M_n(K) \quad (\text{com}A) \cdot A = A (\text{com}A) = \det A \, I_n.$$

Si A est inversible, alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{com}A.$$

Remarque

La matrice adjointe possède de nombreuses propriétés intéressantes : [lien Wikipédia](#).
Cependant, cette formule est très peu pratique à utiliser (sauf pour un ordinateur).

Un exemple

Exercice

Considérons la matrice :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Montrer que B est inversible et donner son inverse.

Solution

(partie 1 sur 3)

Pour montrer que B est inversible, on vérifie si $\det B \neq 0$.

$$\begin{aligned}\det B &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)(-1 - 1) = 2.\end{aligned}$$

Ainsi, $\det B \neq 0$ et B est bien inversible.

Solution

(partie 2 sur 3)

On rappelle $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Soient b_{ij} les coefficients de la comatrice.

Solution

(partie 2 sur 3)

On rappelle $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Soient b_{ij} les coefficients de la comatrice. Alors :

$$b_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$b_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$b_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Solution

(partie 2 sur 3)

On rappelle $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Soient b_{ij} les coefficients de la comatrice. Alors :

$$b_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$b_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$b_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Cela nous donne la première ligne de la comatrice, ou encore la première colonne de la matrice adjointe.

Solution

(partie 2 sur 3)

On rappelle $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Soient b_{ij} les coefficients de la comatrice. Alors :

$$b_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$b_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$b_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Cela nous donne la première ligne de la comatrice, ou encore la première colonne de la matrice adjointe.

Il reste à calculer b_{21} , b_{22} , b_{23} , b_{31} , b_{32} et b_{33} .

Solution

(partie 3 sur 3)

On obtient finalement :

$$\mathbf{C}(B) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ainsi,

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \operatorname{Adj}(B) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Peu pratique, sauf pour les ordinateurs

Comparons cette méthode avec la méthode habituelle :

$$B \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}.$$

C'est-à-dire, résoudre pour x, y, z :

$$\begin{cases} x + z = X \\ x - z = Y \\ y - 2z = Z \end{cases}$$

À partir de là, on peut utiliser la réduction de Gauss de manière brute...

Inversion de B

... ou remarquer directement que :

$$x = \frac{X + Y}{2}, \quad z = \frac{X - Y}{2},$$

ce qui donne $y = X - Y + Z$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y \\ y &= X - Y + Z \\ z &= \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}Y \end{aligned}$$

Ou, exprimé sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$