INSA TOULOUSE

NOM-Prénom : . . . .   Groupe : . . . . . .

1A CC1 Mécanique du point (1h)

Mercredi 22 octobre 2025

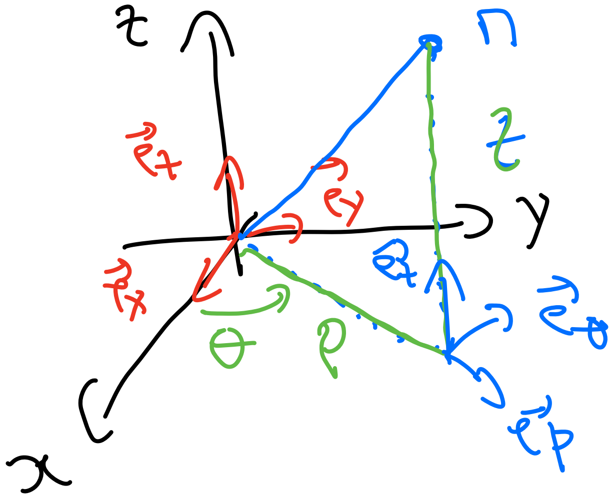
- Aucun document n'est admis. Aucun appareil électronique n'est autorisé.
- Préparez votre carte d'étudiant.
- Pensez à simplifier au maximum vos résultats.
- Vous serez évalués sur les acquis de l'apprentissage suivants :

  MP : MP : Résoudre un problème, calculer et analyser le résultat en mécanique du point.

Mouvement dans un repère cylindrique

On considère, dans un référentiel de centre O, muni d'un repère cartésien tridimensionnel, que l'on notera $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$, le mouvement d'un point M. Dans la suite, le repère cylindrique noté $(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ sera aussi utilisé. On rappelle que l'angle orienté formé par les vecteurs $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_\rho$ est noté $\theta(t)$. Les coordonnées cylindriques du point M seront notées $(\rho,\ \theta,\ z)$.

1. Schématiser soigneusement le repère cartésien, et en plaçant un point M quelconque, représenter ses coordonnées cylindriques ainsi que les trois vecteurs de la base cylindrique. (**2 pts**)

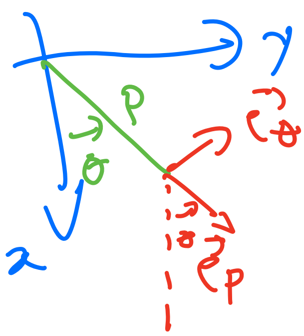


0,5 pour le cartésien

0,75 pour les coordonnées

0,75 — vecteurs cyl.

2. Exprimer les vecteurs $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta$ de la base cylindrique en fonction des vecteurs de la base cartésienne. (**2 pts**)



$\vec{e}_\rho \begin{vmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{vmatrix}$ 1

$\vec{e}_\theta \begin{vmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{vmatrix}$ 1

3. Exprimer les coordonnées des vecteurs $\dfrac{d\vec{e}_\rho}{dt}$ et $\dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt}$ dans la base cartésienne en fonction de θ et $\dot{\theta}$. (**2 pts**)

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \left| \begin{array}{l} -\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{\theta}\cos\theta \end{array} \right.$$

(1)

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \left| \begin{array}{l} -\dot{\theta}\cos\theta \\ -\dot{\theta}\sin\theta \end{array} \right.$$

(1)

4. A partir de l'expression du vecteur rotation que vous donnerez, exprimer les coordonnées des vecteurs $\dfrac{d\vec{e}_\rho}{dt}$ et $\dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt}$ dans la base cylindrique. (**3 pts**)

$$\vec{\omega} \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{array} \right.$$

(1)

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_\rho = \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{array} \right.$$

(1)

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_\theta = \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} -\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

(1)

5. Montrer que la vitesse du point M en coordonnées cylindriques s'écrit : $\vec{v}_M = \left| \begin{array}{l} \dot{\rho} \\ \rho\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{array} \right.$. (**1.5 pts**)

$$\vec{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{e}_z$$

(0,5)

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \dot{z}\,\vec{e}_z$$

(0,5)

$$\vec{v}_M = \left| \begin{array}{l} \dot{\rho} \\ \rho\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{array} \right.$$

(0,5)

6. En déduire l'expression de l'accélération du point M en coordonnées cylindriques. (**2.5 pts**)

$$\frac{d\vec{v}_n}{dt} = \ddot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\,\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \dot{\rho}\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \rho\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \rho\dot{\theta}\,\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + \ddot{z}\,\vec{e}_z \quad (1)$$

et $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{e}_\rho$ (0,5) $\Rightarrow \vec{a}_n \begin{vmatrix} \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 \\ \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} \\ \ddot{z} \end{vmatrix}$ (1)

7. Dans la suite on s'intéresse au point M décrivant la trajectoire définie par les équations horaires suivantes :

$$\begin{cases} \rho(t) &= v_0 t \\ \theta(t) &= \omega_0 t \\ z(t) &= a_0 t^2 + z_0 \end{cases},$$

avec v_0, ω_0, a_0 et z_0 des constantes ≥ 0.
Exprimer le vecteur vitesse en fonction du temps et des constantes du problème dans la base cylindrique. (**1.5 pts**)

$$\vec{v}_n \begin{vmatrix} v_0 & (0{,}5) \\ v_0 t \omega_0 & (0{,}5) \\ 2 a_0 t & (0{,}5) \end{vmatrix}$$

8. Exprimer le vecteur accélération en fonction du temps et des constantes du problème dans la base cylindrique. (**2.5 pts**)

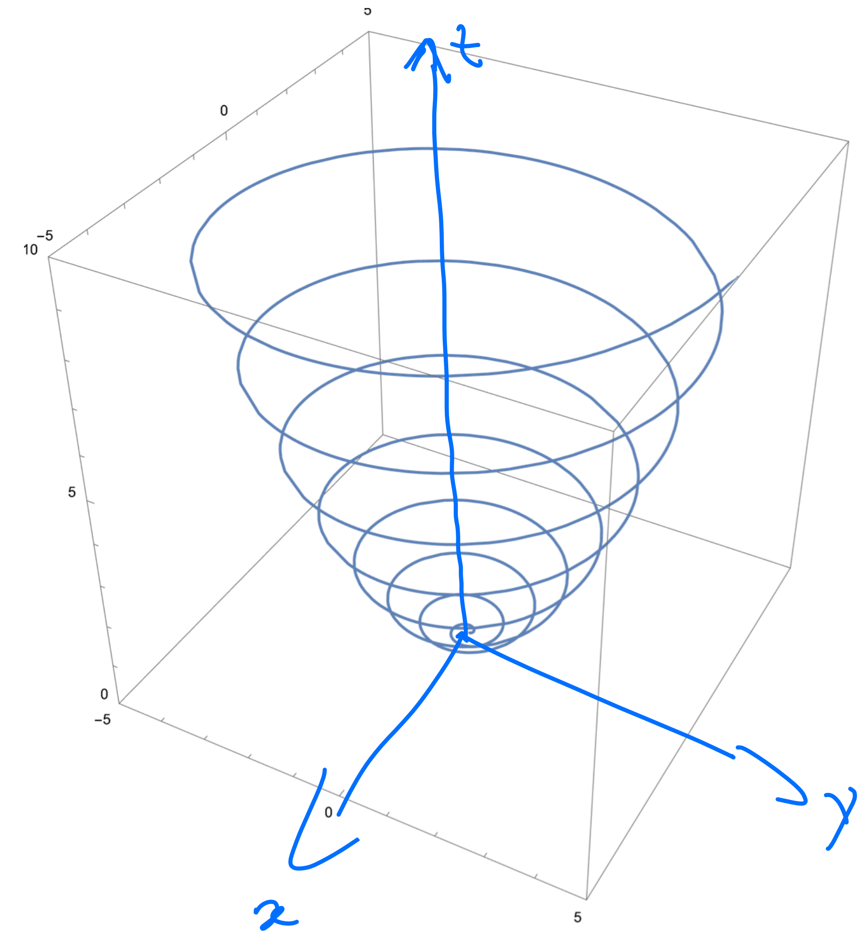
$$\vec{a}_n \begin{vmatrix} -v_0 t \omega_0^2 & (1) \\ 2 v_0 \omega_0 & (1) \\ 2 a_0 & 0{,}5 \end{vmatrix}$$

9. Le mouvement du point M est-il uniforme ? Justifier votre réponse par un calcul. (**1.5 pts**)

calcul de la norme de $\|\vec{v}_n\|$: $\|\vec{v}_n\| = \sqrt{v_0^2 + (v_0 + \omega z_0)^2 + (a_0 t)^2}$ (0,5)

Elle dépend du temps, (0,5) donc le mvt n'est pas uniforme. (0,5)

10. Représenter l'allure de la trajectoire (de façon qualitative en 3D) si z_0 est nul. (**1.5 pts**)



(1,5) pour la prestation artistique