NOM-Prénom : . . . .   Groupe : . . . . . .

1A CC2 Mécanique du point (1h)

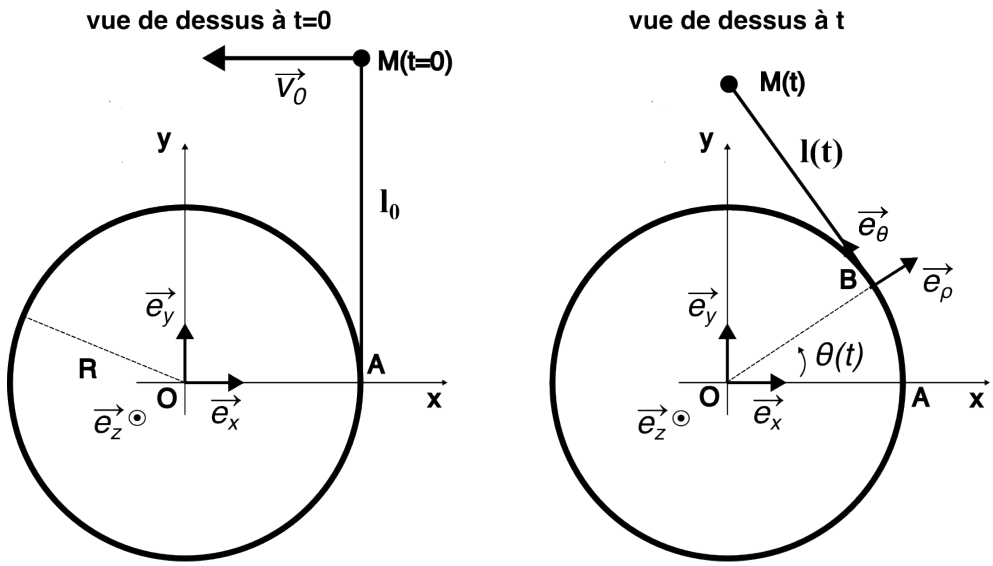
Lundi 8 décembre 2025

- Aucun document n'est admis, seule une calculatrice est autorisée.
- Préparez votre carte d'étudiant.
- Pensez à simplifier au maximum vos résultats.
- Vous serez évalués sur les acquis de l'apprentissage suivants :

  MP : MP : Résoudre un problème, calculer et analyser le résultat en mécanique du point.

Enroulement d'un fil sur un cylindre

Un cylindre d'axe vertical (Oz) et de rayon R, est fixé sur un plan horizontal. On attache à la base du cylindre, au point A un fil inextensible de longueur l_0. L'autre extrémité du fil est fixée à un mobile M ponctuel de masse m astreint à glisser sans frottement sur le plan horizontal. Le dispositif vu de haut est représenté ci-dessous. À l'instant initial, on communique au mobile une vitesse $\vec{v}_0$ horizontale et orthogonale au fil. Le fil s'enroule alors autour du cylindre. On travaille dans la base cylindrique $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$ et on suppose que le fil reste tendu au cours du mouvement. À l'instant t, le fil fait un angle $\theta(t)$ par rapport à sa position de départ, $\theta(0) = 0$.



1. On appelle $l(t)$ la longueur du fil qu'il reste à enrouler à l'instant t. Montrer que $l(t) = l_0 - R\theta(t)$. **(0.5 pts)**

$l_0 = l(t) + R\theta(t)$

$\Rightarrow l(t) = l_0 - R\theta(t)$ 0,5

2. En déduire une relation simple entre $\dot{l}(t)$, R et $\dot{\theta}(t)$. **(0.5 pts)**

$\dot{l}(t) = -R\dot{\theta}(t)$ 0,5

3. Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, à l'instant t, comme la somme des deux vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{BM}$. En déduire ses composantes dans la base cylindrique $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$ liée au point B, en fonction de R et $l(t)$. (**1 pt**)

$$\vec{OM} = \vec{OB} + \vec{BM} = \underline{R\vec{e}_\rho} + \underline{l(t)\vec{e}_\theta}$$

0,5 0,5

4. Montrer que l'expression du vecteur vitesse est $\vec{v}_M(t) = -\dot{\theta}(t)l(t)\vec{e}_\rho$. (**2 pts**)

$$\vec{v}_M = \frac{d\vec{OM}}{dt} = R\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \dot{l}(t)\vec{e}_\theta + l(t)\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \quad 1$$

$$= \cancel{R\dot{\theta}\vec{e}_\theta} - \cancel{R\dot{\theta}\vec{e}_\theta} - l(t)\dot{\theta}(t)\vec{e}_\rho \quad 1$$

5. Calculer la norme du vecteur vitesse $||\vec{v}_M||$. (**0.5 pts**)

$$||\vec{v}_M|| = l(t)\dot{\theta}(t)$$

0,5

6. Donner les composantes de l'accélération $\vec{a}_M$ du point M dans la base cylindrique en fonction de $\dot{\theta}(t), \ddot{\theta}(t), l(t)$ et R. (**1.5 pts**)

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{v}_M}{dt} = -\dot{l}\dot{\theta}\vec{e}_\rho - l\ddot{\theta}\vec{e}_\rho - l\dot{\theta}^2\vec{e}_\theta \quad 0{,}5$$

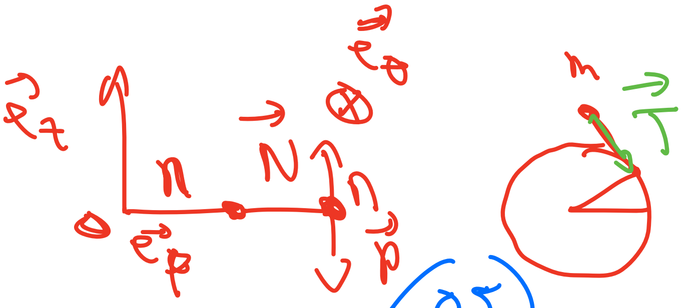
$$= \underline{R\dot{\theta}^2}\vec{e}_\rho - l\ddot{\theta}\vec{e}_\rho - l\dot{\theta}^2\vec{e}_\theta$$

0,5 cf Q.2 0,5

7. Lister et représenter les forces qui s'appliquent sur la masse m sous forme de schéma. Donner leurs expressions dans la base cylindrique. (**1.5 pts**)

$$\vec{P}\begin{vmatrix}0\\0\\-mg\end{vmatrix} \qquad \vec{T}\begin{vmatrix}0\\T\\0\end{vmatrix} \qquad \vec{N}\begin{vmatrix}0\\0\\N\end{vmatrix}$$

1



0,5

8. Appliquer le PFD au point matériel M sur la direction donnée par $\vec{e}_\rho$ et en déduire une relation entre $R, l(t), \dot{\theta}(t)$ et $\ddot{\theta}(t)$. (**1.5 pts**)

$$m(R\dot{\theta}^2 - l\ddot{\theta}) = 0 \qquad \ddot{\theta}\, l(t) = R\dot{\theta}^2$$

0,5 1

9. Appliquer le PFD au point matériel M sur la direction donnée par $\vec{e}_\theta$ et en déduire l'expression de la tension du fil T, en fonction de $m, l(t)$ et $\dot{\theta}(t)$. (**1.5 pts**)

$-m\dot{\theta}^2\rho(t) = -T \qquad T = m\dot{\theta}^2(t)\rho(t)$

0,5 1

10. Calculer la dérivée de la norme du vecteur vitesse pour en déduire que cette norme reste constante au cours du mouvement. (**0.5 pts**)

$$\frac{d\|\vec{v}_n\|}{dt} = \ddot{\theta}\rho(t) + \dot{\theta}\dot{\rho}(t)$$
$$= \ddot{\theta}\rho(t) - R\dot{\theta}^2$$
$$= R\dot{\theta}^2 - R\dot{\theta}^2 \implies \|\vec{v}_n\| = \text{cste} = v_0$$
$$= 0$$

0,5

11. En déduire une relation entre $v_0, l_0, R, \theta(t)$ et $\dot{\theta}(t)$. (**1 pt**)

$$v_0 = \rho(t)\dot{\theta}(t)$$
$$= (\rho_0 - R\theta(t))\dot{\theta}(t)$$

1

12. Déduire de l'expression précédente une équation différentielle de la forme $v_0\mathrm{d}t = f(\theta)\mathrm{d}\theta$. (**1 pt**)

$$v_0 = (\rho_0 - R\theta)\frac{d\theta}{dt}$$ 0,5

$$v_0\,dt = (\rho_0 - R\theta)\,d\theta$$ 0,5

13. En intégrant le membre de gauche par rapport à t, et celui de droite par rapport à θ dans l'égalité précédente, établir une équation horaire mettant en jeu un polynôme du 2nd degré en $\theta(t)$. (**2 pts**)

$v_0 t = \rho_0\theta - \frac{R}{2}\theta^2 + \text{cste}$ (1) mais $\theta(0) = 0$ (0,5)

$$\implies \frac{R}{2}\theta^2 - \rho_0\theta + v_0 t = 0$$

0,5

14. Montrer que $\theta(t) = \dfrac{l_0 - \sqrt{l_0^2 - 2Rv_0t}}{R}$ car $\theta(t) < \dfrac{l_0}{R}$. (**1.5 pts**)

$\Delta = l_0^2 - 4\frac{R}{2}v_0 t$

$\Delta = l_0^2 - 2Rv_0 t$

$\Delta > 0$ 0,5

$\theta = \dfrac{+l_0 \pm \sqrt{\Delta}}{\frac{2R}{2}} = \dfrac{l_0 \ominus \sqrt{l_0^2 - 2Rv_0 t}}{R}$ 0,5 car $\theta < \dfrac{l_0}{R}$ 0,5

15. Donner l'expression de l'angle θ_f atteint quand le fil est entièrement enroulé. Puis déterminer le temps t_f auquel cela se produit. Application numérique : $R = 30$ cm, $l_0 = 80$ cm et $v_0 = 10$ cm.s^{-1}. (**1.5 pts**)

$l(t_f) = 0$

$\theta(t_f) = \theta_f = \dfrac{l_0}{R}$ 0,5 $\Rightarrow$ A.N $\theta_f = \dfrac{8}{3}$ rad $\sim 152^0$ 0,5

$\Leftrightarrow l_0^2 = 2Rv_0 t_f$

$t_f = \dfrac{l_0^2}{2Rv_0} \sim 10,7$ s 0,5

16. Déterminer la tension T du fil, à l'instant t, en fonction de $m, v_0, l_0, R, \theta(t)$ et t. (**1.5 pts**)

$T = m l \dot{\theta}^2 = m(l_0 - R\theta)\dot{\theta}^2$ 0,5 or $v_0 = l\dot{\theta}$

$T = \dfrac{m v_0^2 (l_0 - R\theta)}{(l_0 - R\theta)^2} = \dfrac{m v_0^2}{(l_0 - R\theta)}$ 1

17. Comment évolue la tension du fil lorsque t est proche de t_f ? (**0.5 pt**)

lorsque $t \to t_f$ le dénominateur $\to 0$

$\Rightarrow$ la tension devient très grande. 0,5