

Le transformateur

4ème année AE-SE Année 2024-2025

Plan :

- 1 Introduction,*
- 2 Le transformateur idéal*
- 3 Notions de magnétisme*
- 4 Le transformateur réel*
- 5 Régimes de fonctionnement*
 - 5.1 Régime de fonctionnement : sinusoïdal*
 - 5.2 Régime de fonctionnement : carré*
 - 5.3 Régime de fonctionnement : inductances couplées*
- 6 Approche par inductances propres et inductance mutuelle*
- 7 Coefficient de couplage dans la vision inductances propres /mutuelle*
- 8 Modélisation du transformateur sous LTSpice (notions...)*

Equipe enseignante

T.Rocacher

M.Aimé

M.Laidet

P.Tounsi

1. Introduction

Rôle général : *transférer de l'énergie avec une isolation galvanique.*

Les secteurs :

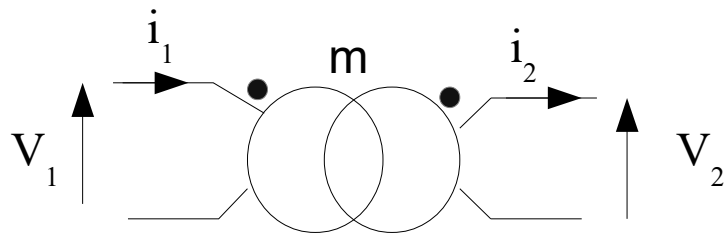
- ◆ **Distribution d'énergie** : convertir une tension sinusoïdale 50 Hz en une autre
 - HTB2 : 400 000V et 225 000V (transport national)
 - HTB : 90 000V et 63 000V (régional)
 - HTA : entre 15 000V et 30 000V (quartier)
 - BT : 400V triphasé / 230V monophasé (maison)
- ◆ Alimentation de dispositif électronique : abaisser le 230V en une tension plus basse pour ensuite être convertie en continu
- ◆ Alimentation à découpage isolée (dévolteur, survolteur avec une isolation galvanique)
- ◆ Mesure de courant (exemple CASR 6NP)
- ◆ Recharge sans fil, capteur RFID
- ◆ Etc ...

Divers rôles, divers modes de fonctionnement → ***nécessité de réaliser une modélisation complète du transformateur pour pouvoir répondre à toutes les applications***

2. Le transformateur idéal

- Une entrée v_1, i_1 , une sortie v_2, i_2 :

Convention générateur au secondaire

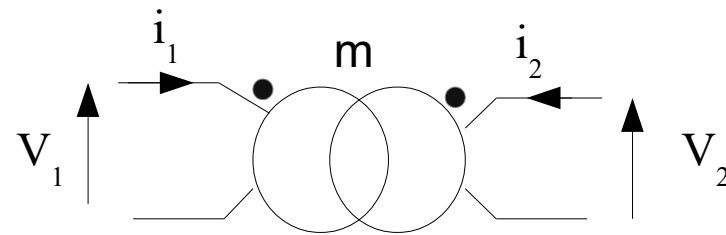


Modèle utilisé par les électroniciens

$$m = \frac{v_2}{v_1} \quad m = \frac{i_1}{i_2}$$

$$v_1 i_1 = v_2 i_2$$

Convention récepteur au secondaire



Modèle utilisé par les physiciens

$$m = \frac{v_2}{v_1} \quad m = -\frac{i_1}{i_2}$$

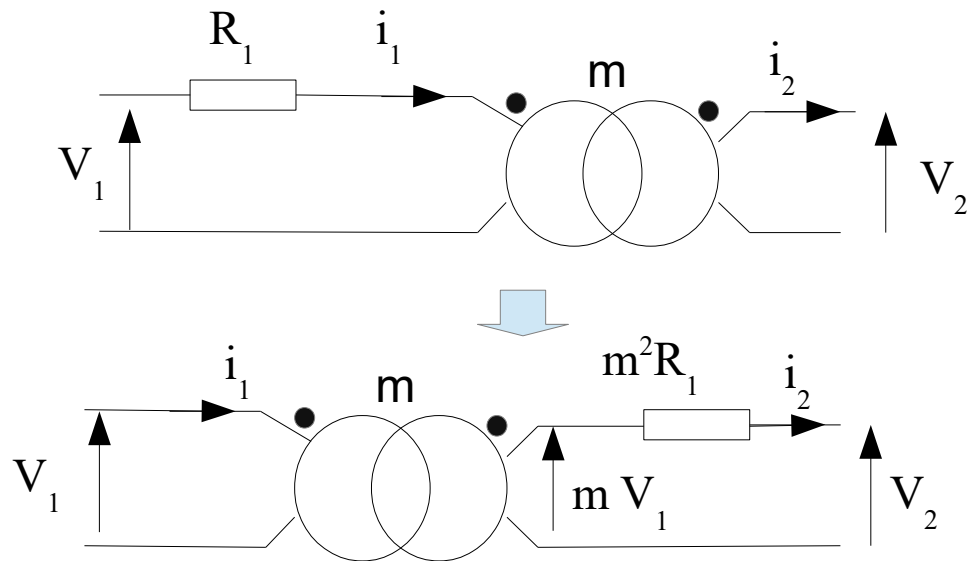
$$v_1 i_1 = -v_2 i_2$$

m est le rapport de transformation

$$\eta = 1$$

Dans la suite on travaille avec la convention générateur ou récepteur selon le cas d'étude

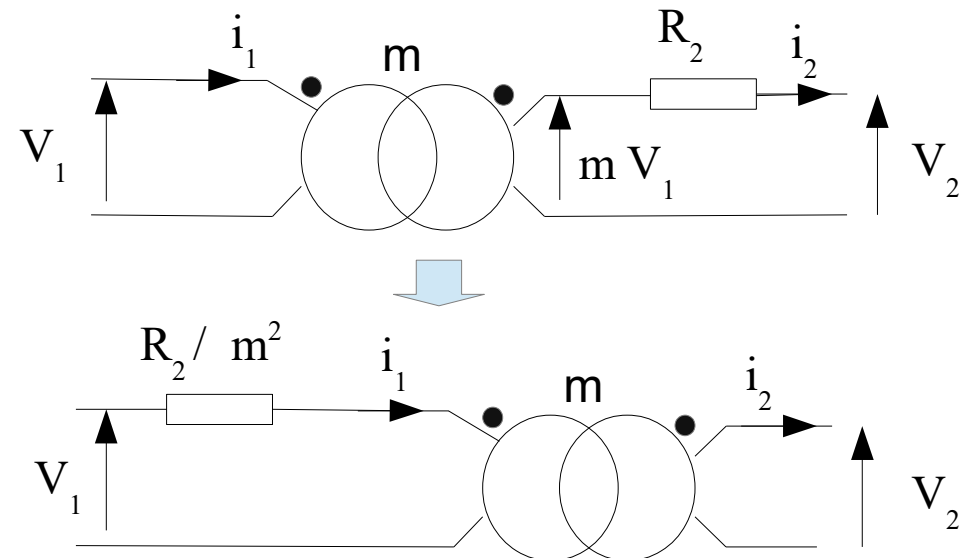
2. Le transformateur idéal, transformation d'impédance



$$v_2 = m(v_1 - R_1 i_1) = m v_1 - m R_1 m i_2 = m v_1 - m^2 R_1 i_2$$

On peut *déplacer* une impédance du primaire vers le secondaire en la multipliant par m^2

$$R_2 = m^2 R_1$$

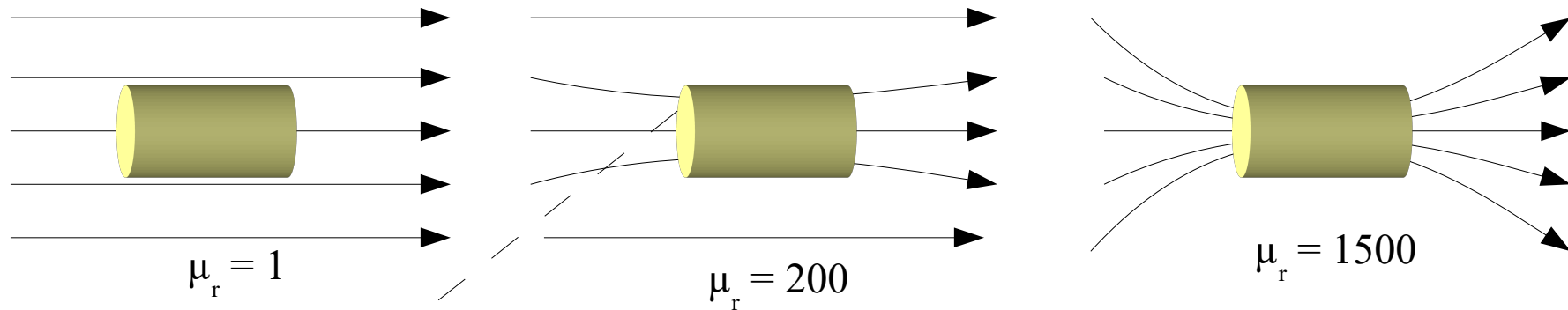


Par symétrie, on peut *déplacer* une impédance du secondaire vers le primaire en la divisant par m^2

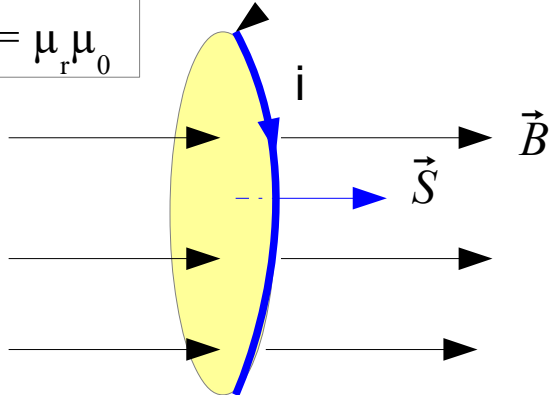
$$R_1 = \frac{R_2}{m^2}$$

3. Notions de magnétisme : flux

Lignes de champs déviées ou non par le cylindre selon sa perméabilité magnétique relative μ_r



Air, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{H/m}$
Matériau, $\mu = \mu_r \mu_0$



Etant donné la **surface orientée** par le sens conventionnel de i , et un **champ magnétique supposé uniforme** B traversant cette surface, on définit le flux φ comme :

$$\varphi = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

Dans les circuits magnétiques, la surface sera orientée perpendiculairement au champ, si bien qu'ici

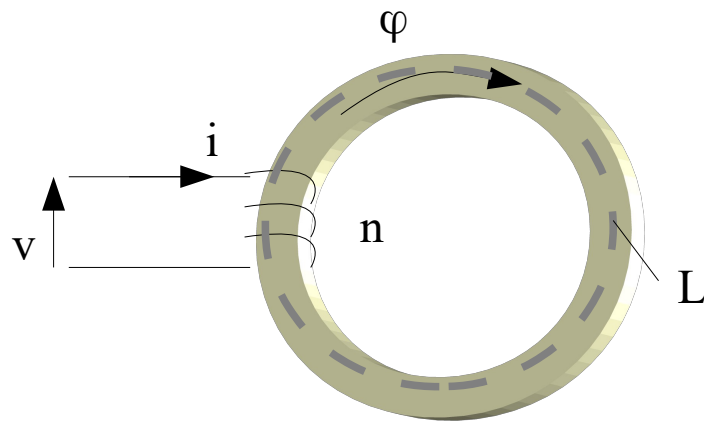
$$\varphi = B \cdot S$$

3. Notions de magnétisme : réluctance

Considérons maintenant un tore magnétique de perméabilité μ_r de circonférence moyenne L , portant une bobine de n spires.

Théorème d'Ampère

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu \cdot n i \quad \Leftrightarrow \quad B L = \mu \cdot n i \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\varphi}{S} L = \mu \cdot n i$$



$$n i = \frac{L}{\mu S} \varphi \quad \text{On définit la } \textbf{réluctance} [H^{-1}] : \mathfrak{R} = \frac{L}{\mu S}$$

La loi d'Hopkinson :

$$n i = \mathfrak{R} \varphi$$

f.m.m. : Force Magnéto Motrice

réluctance

flux

La **réluctance** est la *résistance* au passage du flux.

Le **flux** est à rapprocher du courant dans un circuit électrique

$$\left(\varphi = \int \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \text{et} \quad i = \int \int \vec{J} \cdot d\vec{S} \right)$$

La **force magnéto-motrice** est à rapprocher de la tension d'un circuit électrique

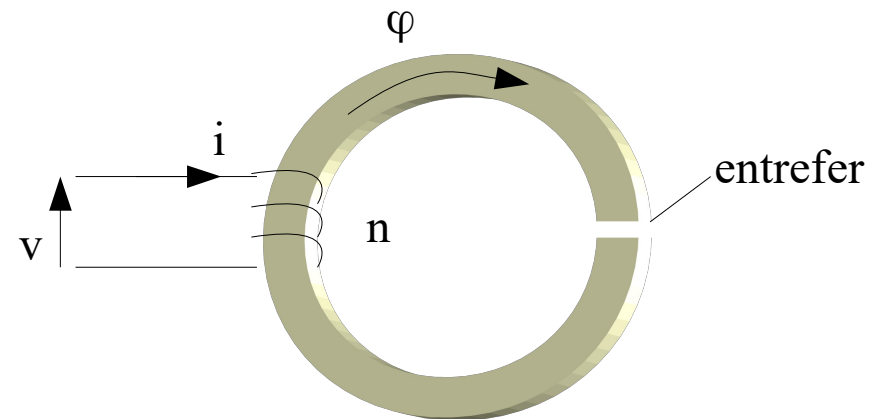
3. Notions de magnétisme : inductance

Exercice 1 : Trouver l'expression de l'inductance définie dans la page précédente. On rappelle que le flux propre (seul son courant crée son flux) est définie par $\Phi = n\phi = Li$

L=

Exercice 2 : Déterminer la valeur de l'inductance si $L = 10\text{cm}$, $S = 1\text{cm}^2$, $\mu_r = 1500$, $n=10$

Exercice 3 : Déterminer la valeur de l'inductance si dans la longueur, on pratique un petit entrefer de 1mm. Dessiner le circuit magnétique faisant apparaître la fmm, les réluctances du tore et de l'entrefer (resp. $\mathcal{R}_{\text{Fer}}$, $\mathcal{R}_{\text{air}}$) et le flux.

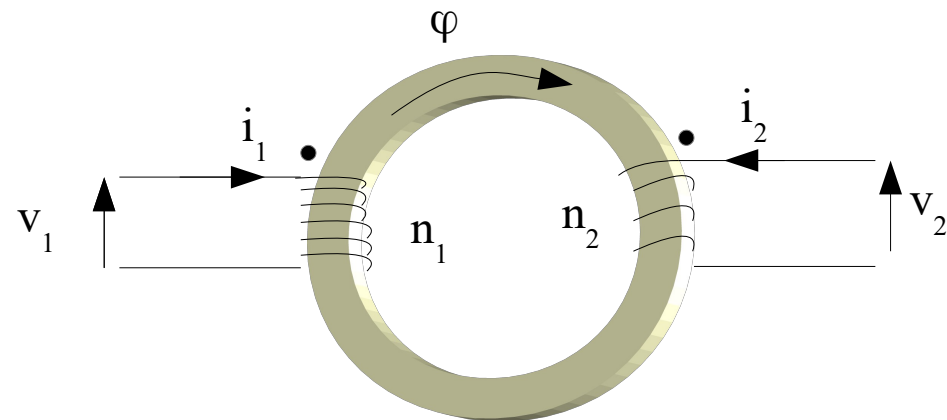


4. Le transformateur réel avec inductance magnétisante

Le transformateur est réalisé en ajoutant une seconde bobine autour du noyau. Dans cette partie, on considère que le noyau est tel qu'il canalise TOUT le flux produit par les courants.

NB : pour éviter des erreurs dans la modélisation on choisit ici la convention récepteur au secondaire

NB : les points indiqués sur chaque bobine traduisent que le courant entrant *contribue* au flux (*addition*) mais aussi et surtout il indique que v_1 et v_2 sont en phase. Ces points indiquent les bornes *homopolaires*.



Loi d'Hopkison : $n_1 i_1 + n_2 i_2 = \mathfrak{R} \varphi$

Loi de Faraday : $v_1 = -e_1 = \frac{+d n_1 \varphi}{dt}$

$v_2 = -e_2 = \frac{+d n_2 \varphi}{dt}$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{n_2}{n_1} = m$$

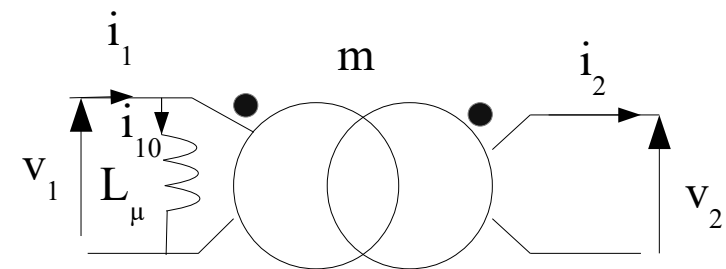
(Première relation du transformateur idéal)

4. Le transformateur réel avec inductance magnétisante

Le transformateur à vide, $i_2 = 0$

- Le transformateur est alors une simple inductance
- La loi d'Hopkinson donne : $n_1 i_{10} = \mathcal{R} \varphi$
- Le courant i_{10} est appelé le **courant magnétisant**
- D'autant plus **faible** que la **réluctance est faible**
- transformateur est une simple inductance ici
- L'inductance vue est donc

$$L_\mu = \frac{n_1^2}{\mathcal{R}}$$



Modèle du transformateur avec inductance magnétisante

Le transformateur en charge, $i_2 \neq 0$

- La loi d'Hopkinson en convention générateur s'écrit : $n_1 i_1 - n_2 i_2 = \mathcal{R} \varphi = n_1 i_{10}$
soit encore $n_1 (i_1 - i_{10}) = n_2 i_2$

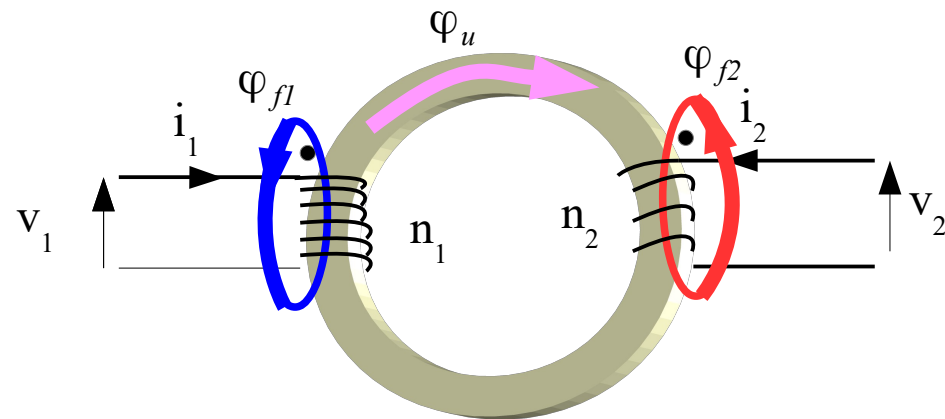
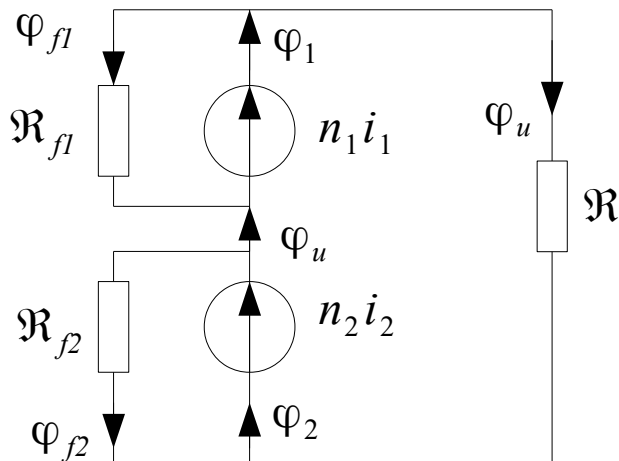
- La loi de Faraday (valable en charge ou à vide) : $\frac{v_2}{v_1} = \frac{n_2}{n_1} = m$

4. Le transformateur réel avec inductance magnétisante et inductances de fuite

Ici, une partie du flux côté primaire est perdue car non canalisé par le noyau. Même chose côté secondaire, comme le montre la figure ci-dessous. Le flux commun s'appelle le flux utile, φ_u

Loi d'Hopkinson (qui ne concerne plus que le flux utile) :

$$n_1 i_1 + n_2 i_2 = \mathcal{R} \varphi_u$$



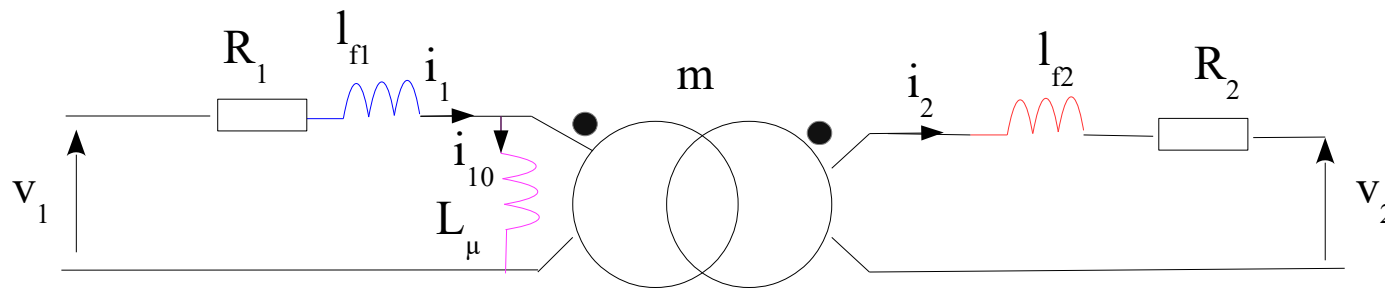
$$v_1 = -e_1 = \frac{+d n_1 \varphi_1}{dt} = \frac{d n_1 \varphi_{fl}}{dt} + \frac{d n_1 \varphi_u}{dt}$$

$$v_1 = l_{fl} \frac{d i_1}{dt} + \frac{d n_1 \varphi_u}{dt}$$

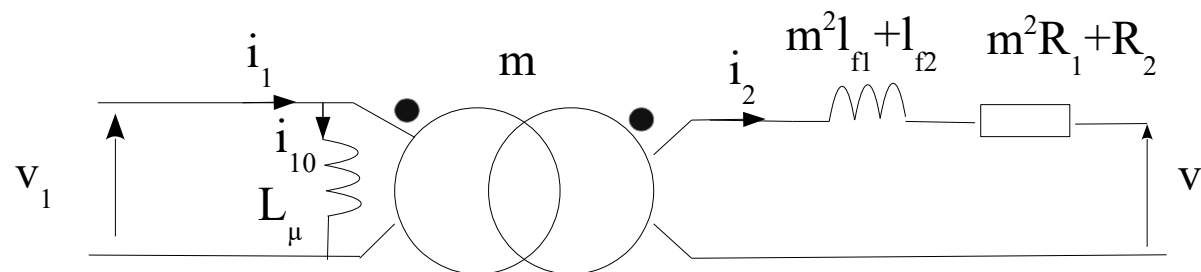
$$v_2 = l_{f2} \frac{d i_2}{dt} + \frac{d n_2 \varphi_u}{dt}$$

4. Le transformateur réel avec inductance magnétisante et inductances de fuite

Le flux de fuite au primaire n'est dû qu'à i_1 . Il ne dépend pas de i_2 . Le flux de perte est donc simplement modélisé par une inductance l_{f1} , même chose côté secondaire.

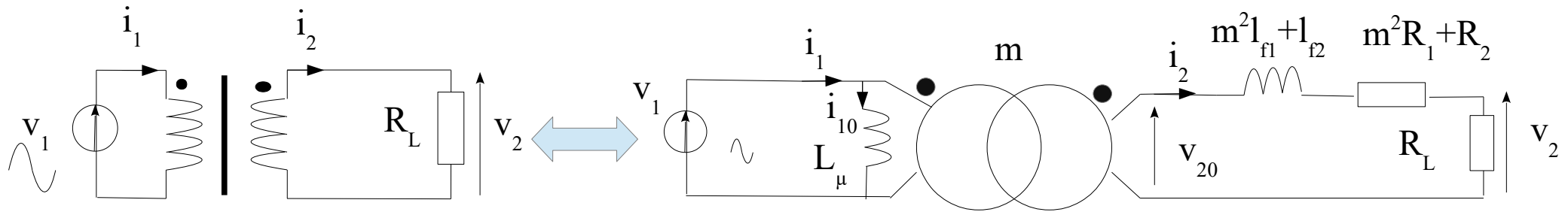


Hypothèse (très souvent valable) : $i_{10} \ll i_1$



Modèle de Kapp

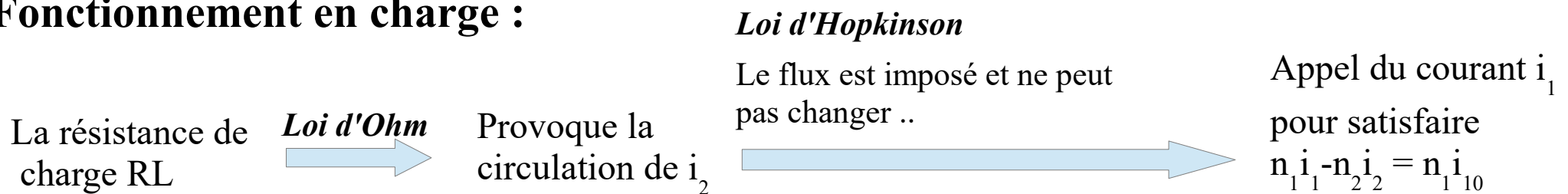
5. Régime de fonctionnement : sinusoïdal



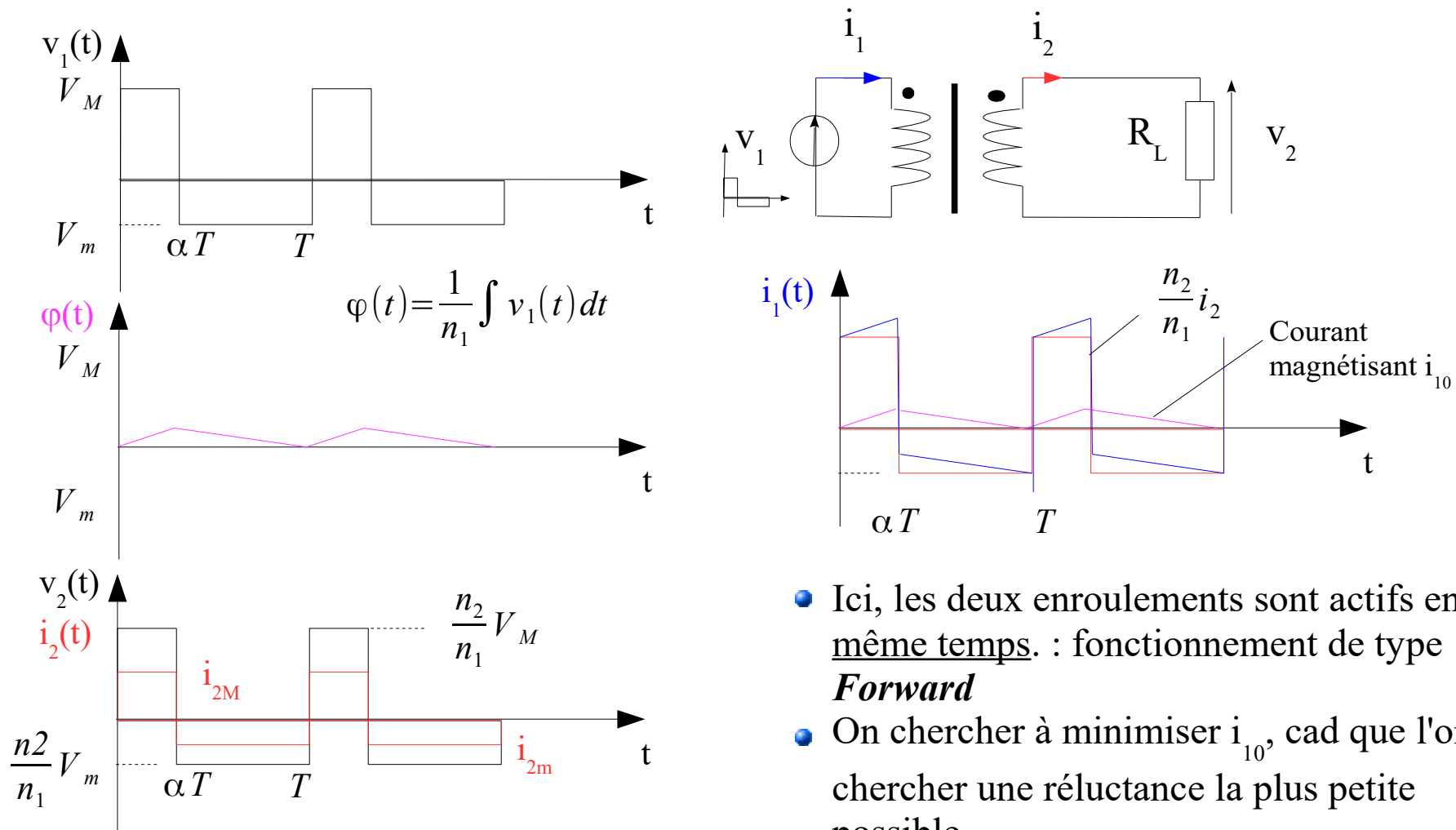
Fonctionnement à vide :



Fonctionnement en charge :



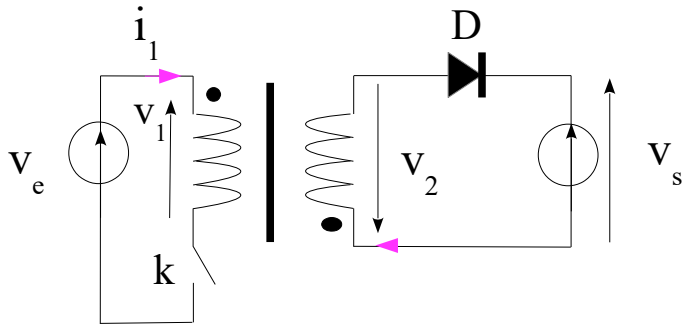
5. Régime de fonctionnement : carré (inductances de fuites et résistances enroulement négligées)



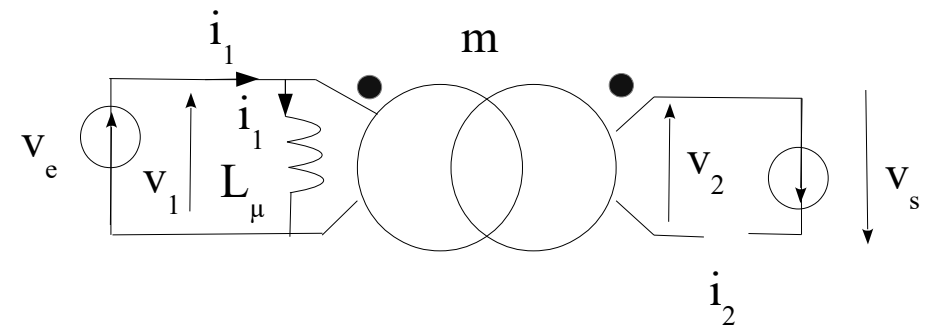
- Ici, les deux enroulements sont actifs en même temps. : fonctionnement de type **Forward**
- On cherche à minimiser i_{10} , cad que l'on cherche une réluctance la plus petite possible.

5. Régime de fonctionnement : inductances couplées (inductances de fuites et résistances enroulement négligées)

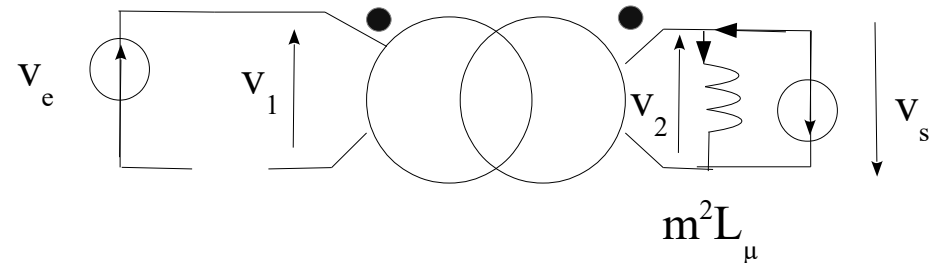
- Lorsqu'un enroulement est actif, l'autre ne débite aucun courant : fonctionnement *Flyback*
- L'énergie est transférée en **deux temps**, contrairement au fonctionnement Forward : chargement de l'inductance primaire, puis libération de l'énergie via le secondaire
- On cherche ici à maximiser l'énergie stockée à chaque début de cycle. Il est classique de pratiquer un entrefer dans le noyau à cette fin.



K fermé, D bloquée



K ouvert, D conduit



- Les courants mis en jeu sont exclusivement les courants magnétisants. Il n'y a pas « d'appel de courant » secondaire vers primaire
- La rupture de i_1 est autorisée si le courant i_2 assure la continuité du flux, car c'est le flux qui doit être continu.

5. Régime de fonctionnement : inductances couplées (inductances de fuites et résistances enroulement négligées)

- **NB** : Le transformateur fonctionne toujours : $v_2 = m v_1$

Analyse de l'instant de commutation :

Juste avant l'ouverture de K, soit $i_{1\text{Max}}$ le courant magnétisant. L'énergie stockée est $W = \frac{1}{2} L_\mu i_{1\text{Max}}^2$

Cette énergie est dans le noyau. Elle est transférée au secondaire :

$$W = \frac{1}{2} m^2 L_\mu i_2^2$$

Ce qui donne à la commutation $W = \frac{1}{2} m^2 L_\mu i_2^2 = \frac{1}{2} L_\mu i_{1\text{Max}}^2$

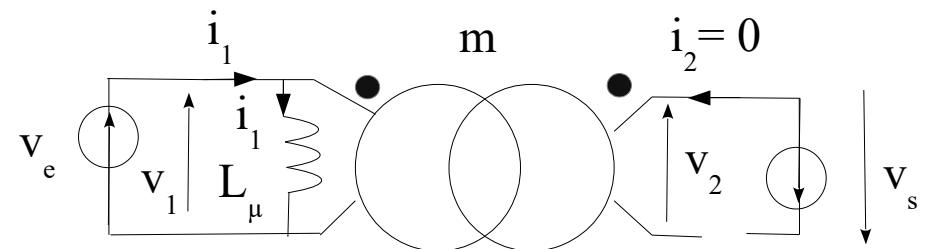
Soit $m^2 i_2^2 = i_{1\text{Max}}^2$ et donc un courant

$$i_2 = \frac{i_{1\text{Max}}}{m} \quad \text{qui va naître spontanément au secondaire}$$

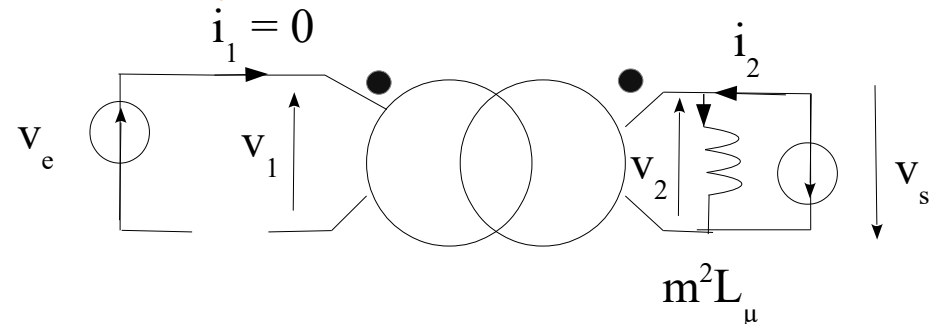
Ce courant va circuler dans le même sens que i_1 :

Si i_1 rentre par le point, i_2 rentrera par le point et inversement

K fermé, D bloquée

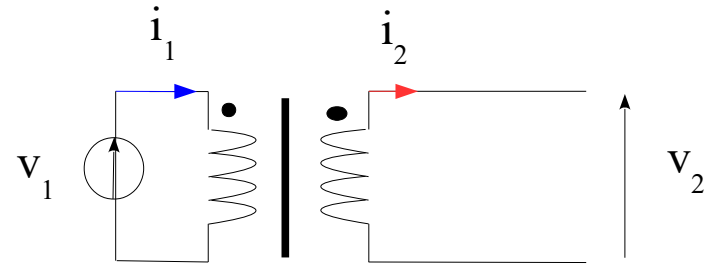


K ouvert, D conduit



5. Régime de fonctionnement : inductances couplées (inductances de fuites et résistances enroulement négligées)

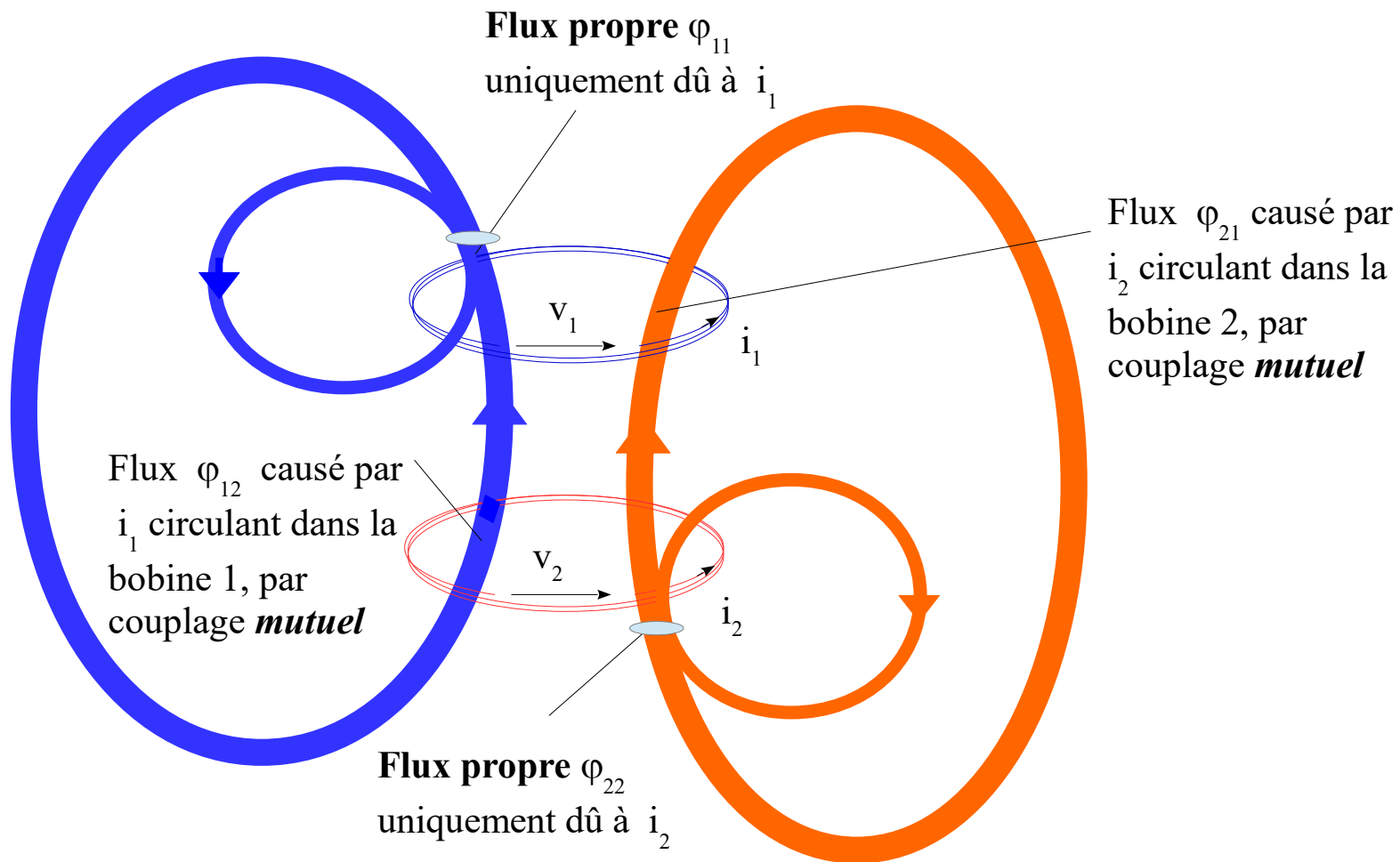
Règles d'utilisation d'un transformateur



- La tension moyenne sur chaque enroulement doit être nulle (sinon dérive de flux)
- Le flux est une variable d'état : il ne peut subir de discontinuité. Il est donc possible de rompre brutalement un courant dans un enroulement si la continuité du flux est assurée par la circulation d'un courant dans un autre enroulement

Attention : les inductances de fuite doivent être réduites au maximum car le flux de fuite ne peut pas être compensé par un autre courant puisque c'est un *flux propre*

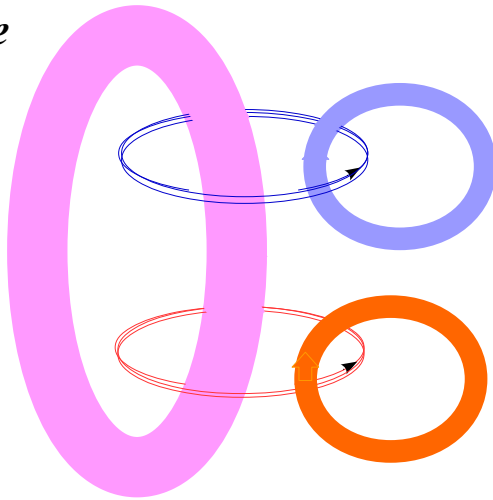
6. approche par flux propres et flux mutuels, celle des physiciens



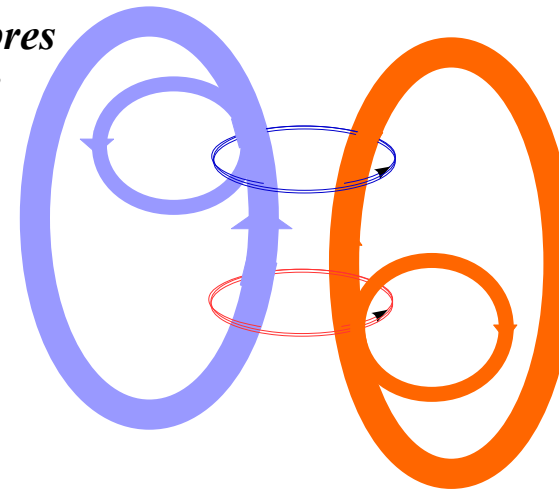
Schématisation des flux en pensant flux **propres** et **mutuels**

6. approche par flux propres et flux mutuels, Lien entre la vision électrotechnicienne / physicienne

*Flux utile
et flux de
fuite*



*Flux propres
et flux de
mutuelles*



Ecrivons le flux total aux deux enroulements dans les deux modèles :

$$n_1 \varphi_1 = \underbrace{n_1 \varphi_u}_{\text{pink}} + \underbrace{n_1 \varphi_{f1}}_{\text{blue}}$$

$$n_2 \varphi_2 = \underbrace{n_2 \varphi_u}_{\text{pink}} + \underbrace{n_2 \varphi_{f2}}_{\text{orange}}$$

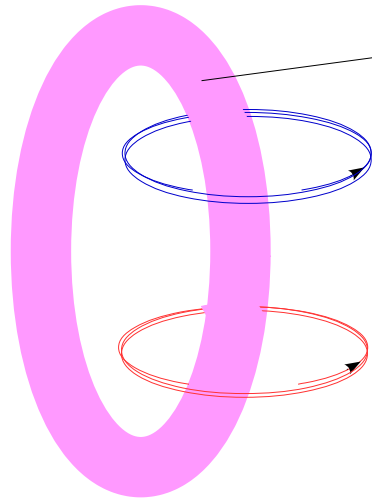
Le flux utile s'obtient par la loi d'Hopkinson

$$n_1 \varphi_1 = \underbrace{n_1 \varphi_{11}}_{\text{blue}} + \underbrace{n_1 \varphi_{21}}_{\text{orange}} = L_1 i_1 + M i_2 \quad (1)$$

$$n_2 \varphi_2 = \underbrace{n_2 \varphi_{12}}_{\text{orange}} + \underbrace{n_2 \varphi_{22}}_{\text{blue}} = L_2 i_2 + M i_1 \quad (2)$$

NB : Le coefficient de mutuelle est le même dans chacune des équations

6. approche par flux propres et flux mutuels, Lien entre la vision électrotechnicienne / physicienne



Circuit (tore ou air) est une réluctance

$$n_1 i_1 + n_2 i_2 = \mathfrak{R} \varphi_u$$

Les flux de fuites sont des *auto-inductions*, donc on peut écrire :

$$n_1 \varphi_{f1} = l_{f1} i_1 \quad n_2 \varphi_{f2} = l_{f2} i_2$$

On obtient les deux équations :

$$n_1 \varphi_1 = n_1 \frac{(n_1 i_1 + n_2 i_2)}{\mathfrak{R}} + l_{f1} i_1 = \left(\frac{n_1^2}{\mathfrak{R}} + l_{f1} \right) i_1 + \frac{n_1 n_2}{\mathfrak{R}} i_2 \quad n_2 \varphi_2 = n_2 \frac{(n_1 i_1 + n_2 i_2)}{\mathfrak{R}} + l_{f2} i_2 = \left(\frac{n_2^2}{\mathfrak{R}} + l_{f2} \right) i_2 + \frac{n_1 n_2}{\mathfrak{R}} i_1$$

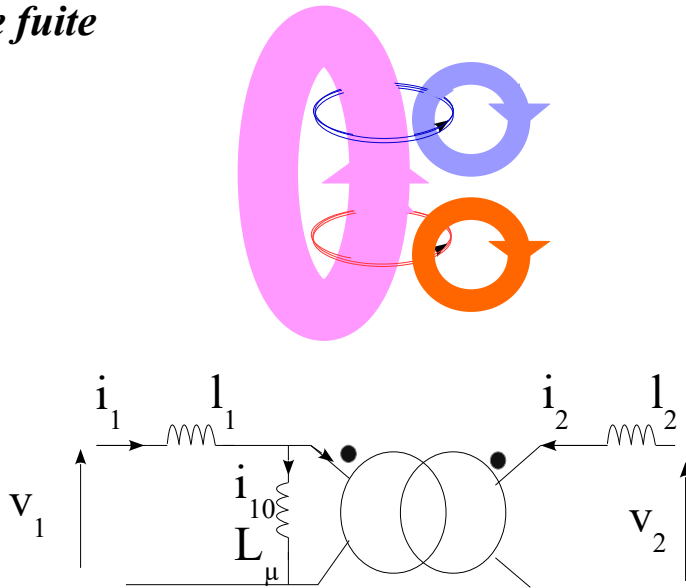
On se rappelle que $L_\mu = \frac{n_1^2}{\mathfrak{R}}$, $m = \frac{n_2}{n_1}$ et en posant $M = \frac{n_1 n_2}{\mathfrak{R}} = \frac{n_2}{n_1} \frac{n_1^2}{\mathfrak{R}} = m L_\mu$ (3)

On obtient : $n_1 \varphi_1 = (L_\mu + l_{f1}) i_1 + M i_2$ (4)

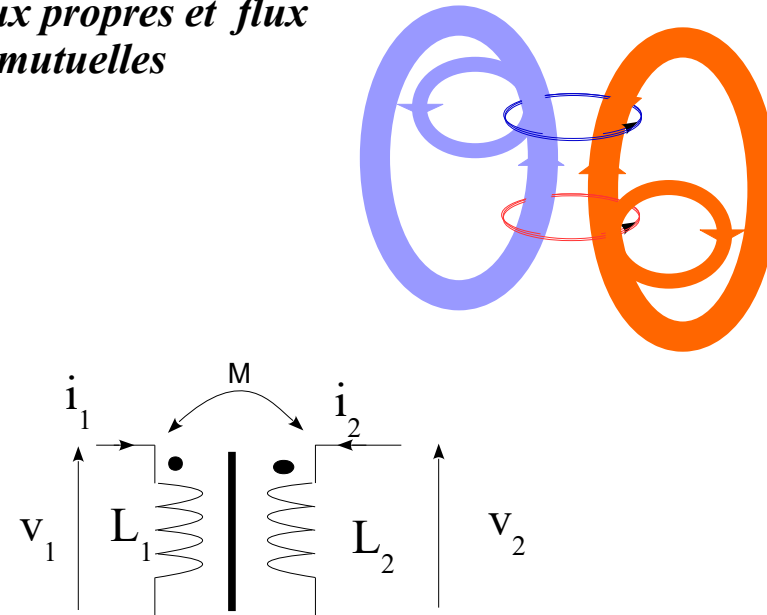
$n_2 \varphi_2 = (m^2 L_\mu + l_{f2}) i_2 + M i_1$ (5)

6. approche par flux propres et flux mutuels, Lien entre la vision électrotechnicienne / physicienne

Flux utile et flux de fuite



Flux propres et flux de mutuelles



En reprenant (3), et identification (1) et (4) puis (2) et (5), on obtient les équivalences suivantes :

$$l_{f1} = L_1 - \frac{M}{m}$$

$$l_{f2} = L_2 - mM$$

$$L_\mu = \frac{M}{m}$$

$$L_1 = L_\mu + l_{f1}$$

$$L_2 = m^2 L_\mu + l_{f2}$$

$$M = m L_\mu$$

7. Coefficient de couplage dans la vision inductances propres /mutuelle

$$\begin{aligned}
 l_{f1} &= L_1 - \frac{M}{m} \rightarrow m = \frac{M}{L_1 - l_{f1}} \\
 l_{f2} &= L_2 - mM \rightarrow m = \frac{L_2 - l_{f2}}{M}
 \end{aligned}
 \rightarrow \frac{M}{L_1 - l_{f1}} = \frac{L_2 - l_{f2}}{M} \rightarrow \boxed{M = \sqrt{(L_1 - l_{f1})(L_2 - l_{f2})}}$$

La mutuelle maximale, donc le couplage idéal, correspond donc à

$$\boxed{M_{Max} = \sqrt{L_1 L_2}}$$

On introduit le coefficient de couplage $k < 1$, tel que

$$\boxed{M = k \cdot M_{Max} = k \cdot \sqrt{L_1 L_2}}$$

8. Modélisation du transformateur sous LTSpice (notions...)

Sous *LTSpice* par exemple, un transformateur est défini du point de vue *physique* :

- ♦ une inductance primaire L_1
- ♦ une inductance secondaire L_2
- ♦ un coefficient de couplage k entre les deux inductances

Pour un transformateur idéalement bobiné ($k=1$), $L_1 = \frac{n_1^2}{\Re}$ et $L_2 = \frac{n_2^2}{\Re}$ donc

$$m = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$