TD3

Exercice 1

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2^3 \end{cases}$$

① $\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$

on remplace dans $\dot{x}_2 = 0 \quad -2x_2 - x_2^3 = 0$

$\Leftrightarrow -x_2(2 + x_2^2) = 0$

↳ racine 0 ↳ racines complexes $\pm i\sqrt{2}$

équilibre unique : l'origine

② $V(x) = a x_1^2 + b x_2^2 \quad a, b > 0$

V définie positive $V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$

$V(x) = 0$ en $x = 0$

$\dot{V} = a x_1 \dot{x}_1 + b x_2 \dot{x}_2$

$= -a x_1^2 - a x_1 x_2 + b 2 x_1 x_2 - b x_2^4$

$\leq -a x_1^2 - b x_2^4$ pour $b = \frac{a}{2}$

< 0 sauf en 0

$\Rightarrow$ système asymptotiquement stable

③ résultat global puisque $V(x)$ radialement non-borné

Scanned with CamScanner

TD 3
(Lyapunov TD 1)

Exercice 2

$$\ddot{y} + (1-y^2)\dot{y} + y = 0$$

① $y = x_1 \quad \dot{y} = x_2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - (1-x_1^2)x_2 \end{cases}$$

② pt d'equilibre $x_1 = x_2 = 0$

③ $V(x) = x_1^2 + x_2^2$

$V(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus 0$

$V(0) = 0$

$\dot{V} = 2x_1x_2 + 2x_2x_1 - 2x_2^2(1-x_1^2)$

$\leq 0 \quad$ si $x_1^2 < 1$

→ système stable

l'ensemble Ω est tracé plus loin

④ $\mathcal{N} = \{x \text{ tq } \dot{V}(x) = 0\} = (x_1, 0)$ avec $x_1^2 < 1$

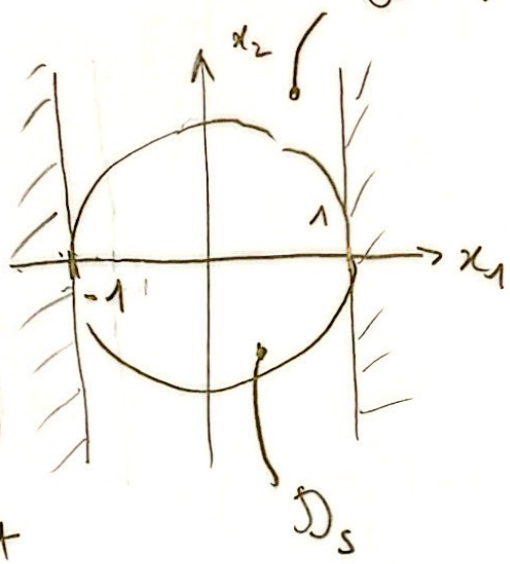
si $x_1 \neq 0 \Rightarrow \dot{x}_2 \neq 0$ et traj $\notin \mathcal{N}$

$\mathcal{M} = \{0\}$ → l'origine est asympt. stable

Scanned with CamScanner

(4) résultat de stabilité local

$\mathcal{D} : \{x \mid \dot{V} \leq 0\}$



(5) la plus grande équipotentielle de V comprise dans $\mathcal{D}$

$V(x) < \alpha$ (plus grand α) tq $x \in \mathcal{D}$

est un cercle de rayon 1 et centré en 0

$V(x) = x_1^2 + x_2^2 < \alpha$

$\mathcal{D}_s = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$

$\equiv$ domaine de stabilité

