TD 4

(Lyapunov TD 2)

Exercice 1

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} x$$

① $V(x) = x^T P x$ $V(x)$ définie positive si $P > 0$ (symétrique et déf. pos

condition : $P_{11} > 0$ et $P_{11}P_{22} - P_{12}^2 > 0$

② $\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T \underbrace{(A^T P + PA)}_{-Q} x < 0$

③ $A^T P + PA = -Q$ ↳ II

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -P_{11}+4P_{12} & -P_{12}+4P_{22} \\ -P_{11} & -P_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_{11}+4P_{12} & -P_{11} \\ -P_{12}+4P_{22} & -P_{12} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2P_{11} + 8P_{12} = -1 \\ -2P_{12} = -1 \\ -P_{12} + 4P_{22} - P_{11} = 0 \end{cases} \longrightarrow P_{12} = \frac{1}{2} \longrightarrow \begin{cases} P_{11} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \\ P_{22} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad P_{11} > 0$$

$$P_{11}P_{22} - P_{12}^2 = \frac{15}{8} - \frac{1}{4} = \frac{13}{8} > 0$$

$\Rightarrow$ système asymptotiquement stable

Scanned with CamScanner

Exercice 2

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

① $u = 0$

$$A^T P + P A = -\mathbb{I}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -P_{11} + 6P_{12} & -P_{12} + 6P_{22} \\ 2P_{11} & 2P_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_{11} + 6P_{12} & 2P_{11} \\ -P_{12} + 6P_{22} & 2P_{12} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2P_{11} + 12P_{12} = -1 \\ -P_{12} + 6P_{22} + 2P_{11} = 0 \\ 4P_{12} = -1 \end{cases}$$

$\rightarrow P_{11} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$

$\rightarrow P_{12} = -\frac{1}{4}$

$6P_{22} = -\frac{1}{4} + 2 = \frac{7}{4}$

$P_{22} = \frac{7}{24}$

$P_{11} \not< 0$

$P_{11} P_{22} - P_{12}^2 = -\frac{7}{4} - \frac{1}{16} \not> 0$ $\Rightarrow$ système instable

② $u = -ky + y_c$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} x - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2k & 0 \end{bmatrix}}_{BCk} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} y_c$$

$$A_{BF} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6-2k & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 6-2k \\ 2 & 0 \end{bmatrix} P + P \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6-2k & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -P_{11} + (6-2k)P_{12} & -P_{12} + (6-2k)P_{22} \\ 2P_{11} & 2P_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_{11} + (6-2k)P_{12} & 2P_{11} \\ -P_{12} + (6-2k)P_{22} & 2P_{12} \end{bmatrix} = -\Pi$$

$$\begin{cases} -2P_{11} + 2(6-2k)P_{12} = -1 \\ -P_{12} + (6-2k)P_{22} + 2P_{11} = 0 \\ 4P_{12} = -1 \end{cases}$$

$P_{12} = -\frac{1}{4}$

$P_{11} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(6-2k)$

$P_{22} = -\frac{1}{6-2k} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4(6-2k)}$

$= \frac{1}{2} - \frac{\frac{5}{4}}{6-2k}$

$P_{11} > 0$ si $k > 2$

$P_{11}P_{22} - P_{12}^2 = \frac{1}{4} - \frac{5/8}{6-2k} - \frac{1}{8}(6-2k) + \frac{5}{8} - \frac{1}{16} > 0$

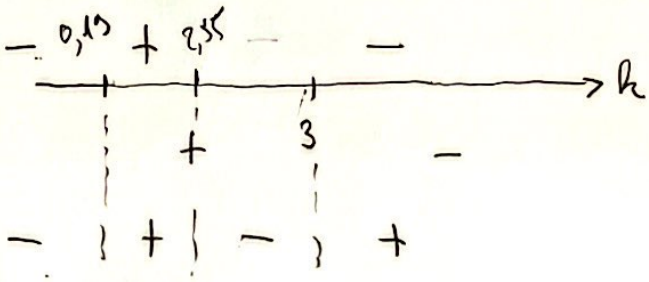
$\Leftrightarrow \frac{13}{16} - \frac{5/8}{6-2k} - \frac{1}{8}(6-2k) > 0$

$\Leftrightarrow \frac{13}{2} - \frac{5}{6-2k} - 6 - 2k > 0$

$\Leftrightarrow \frac{13(3-k) - 5 - (6-2k)^2}{6-2k} = \frac{-4k^2 + k11 - 2}{(6-2k)} > 0$

reprise du calcul dessous pour faire plus simple

$\frac{-4k^2 + 11k - 2}{6 - 2k}$



il faut $k > 3$

③ vérification en simu sur Matlab / Simulink

Reprise du calcul de la question 2

$$P_{12} = -\frac{1}{4}$$

$$P_{11} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(6 - 2k) = \frac{k-2}{2}$$

$$P_{22}(6 - 2k) = P_{12} - 2P_{11} = -\frac{1}{4} - k + 2$$

$$= \frac{7 - 4k}{4}$$

$$P_{22} = \frac{7 - 4k}{4(6 - 2k)}$$

conditions de définie positivité de P

$$P_{11} > 0 \iff \frac{k-2}{2} > 0 \iff k > 2$$

$$P_{11}P_{22} - P_{12}^2 > 0 \quad ?$$

Scanned with CamScanner

$$P_{11}P_{22} - P_{12}^2 = \frac{k-2}{2}\,\frac{7-4k}{4(6-2k)} - \frac{1}{16}$$

$$= \frac{14k - 8k^2 - 28 + 16k - 6 + 2k}{16(6-2k)}$$

$$= \frac{-8k^2 + 32k - 34}{16(6-2k)}$$

$$= \frac{-k^2 + 4k - 4{,}25}{2(6-2k)}$$

racines complexes $2 \pm 0{,}5i$

$\longrightarrow$ racine 3

pour $k \in \mathbb{R}$, le numérateur est toujours < 0

et le dénominateur est < 0 pour $k > 3$ et > 0 pour $k < 3$

$P_{11}P_{22} - P_{12}^2 > 0$ pour $k > 3$