TD 5

① pt d'equilibre

$\dot{x}_2 = 0 \rightarrow x_2 = 0$

$\dot{x}_1 = 0 = -x_1^3 - x_1 = -x_1(x_1^2 + 1) \rightarrow x_1 = 0$

② première méthode → on étudie la linéarisé

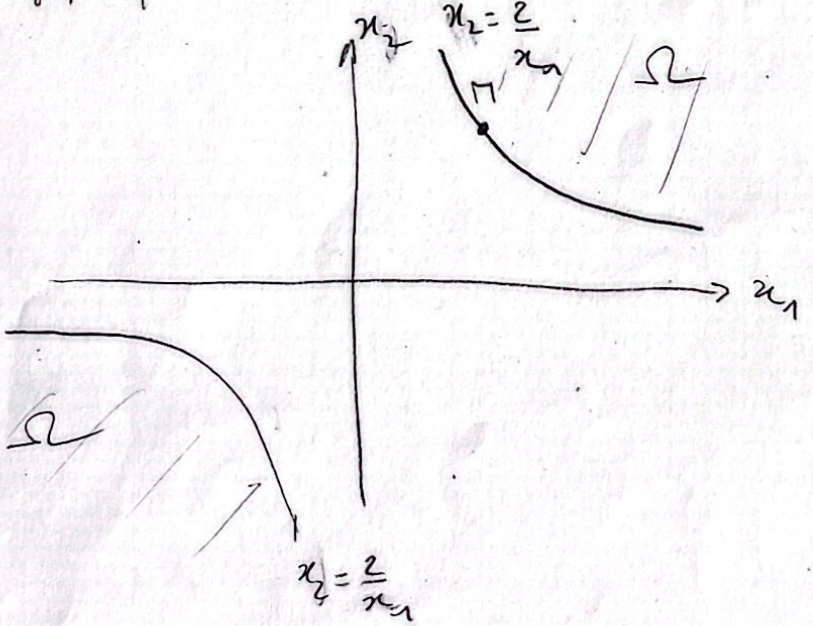
matrice Jacobienne

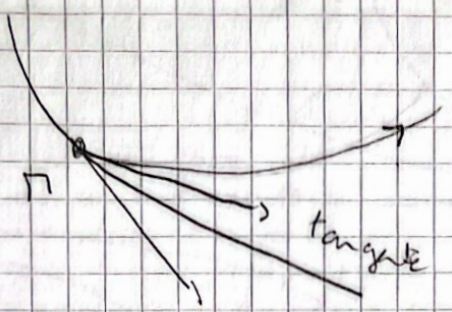
$$A = \begin{bmatrix} 4x_1^3 x_2 - 3x_1^2 + 2x_1 x_2 - 1 + x_2^2 & x_1^4 + x_1^2 + 2x_2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

à l'equi $(0,0)$; $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ racine double : -1

Σ asymptotiquement stable

③





Reprendre la preuve avec le gradient (idée Fred)

tangente hyperbole

$$\left(\frac{2}{x_1}\right)' = -\frac{2}{x_1^2}$$

tangente à la trajectoire → champ de vecteur
sur la parabole → champ de vecteur en $x_2 = \frac{2}{x_1}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^3 + x_1 + \frac{4}{x_1} \\ \dot{x}_2 = -\frac{2}{x_1} \end{cases}$$

pente : $\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{-2}{x_1^4 + x_1^2 + 4}$

$$\frac{-2}{x_1^4 + x_1^2 + 4} > -\frac{2}{x_1^2}$$

la trajectoire reste dans Ω

④ la stabilité sera forcément locale

⑤ $V = x_1^2 + x_2^2 \qquad V > 0 \qquad V(0) = 0$

$\dot{V} = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2$ $\left[\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right]$

$= 2x_1^4(x_1x_2 - 1) + 2x_1^2(x_1x_2 - 1 + x_2^2) - 2x_2^2$

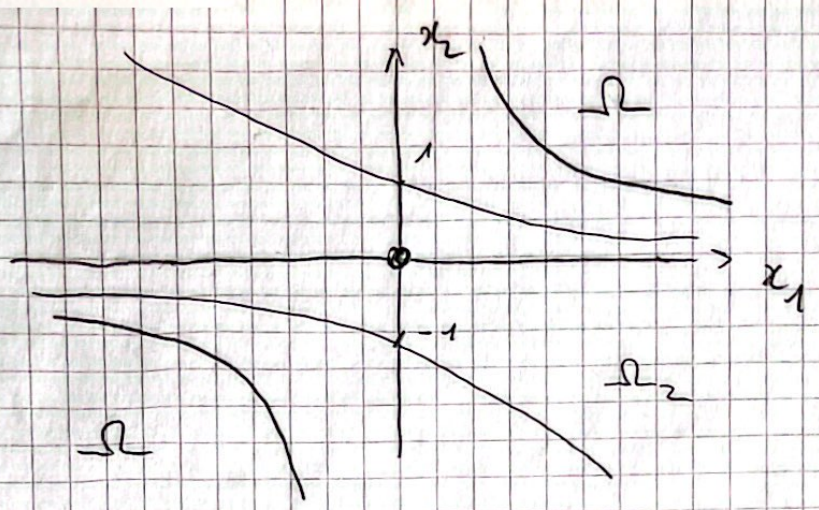
condition suffisante si $x \in \Omega_2 \Rightarrow x \in \Omega_1$

$\Omega_1 : x_1x_2 - 1 < 0 \qquad \Omega_2 \Rightarrow \Omega_1$ car $x_2^2 > 0$

$\Omega_2 : x_1x_2 - 1 + x_2^2 < 0$

$\Rightarrow$ origine asympt stable pour $x \in \Omega_2$

Scanned with CamScanner



(6) intersection des deux ensembles

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = r^2 & (2) \\ x_1 x_2 - 1 + x_2^2 = 0 & (1) \end{cases}$$

$$(1) \rightarrow x_1 = \frac{1 - x_2^2}{x_2}$$

$$\hookrightarrow (2) \quad 1 - 2x_2^2 + x_2^4 + x_2^4 = r^2 x_2^2$$

$$\Leftrightarrow 2x_2^4 - (r^2+2) x_2^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2X_2^2 - (r^2+2) X_2 + 1 = 0$$

$$\Delta = (r^2+2)^2 - 8$$

$\Delta < 0 \rightarrow x_2$ complexe $\rightarrow$ pas de solution

$\Delta \geq 0 \rightarrow x_2$ réel $\rightarrow$ des solutions

a cherche la limite "juste avant" la 1ère intersection

en effet quand c est plus grand, il y toujours des intersections

$$(r^2+2)^2 - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 + 2 = \sqrt{8}$$

$$r = \sqrt{\sqrt{8} - 2} = 0,91$$

Scanned with CamScanner