Modélisation et Calcul Scientifique

Partie 3 : Equations aux dérivées partielles

Chapitre 1 : Problèmes linéaires stationnaires : équation de Poisson et équations elliptiques du 2nd ordre

Philippe Villedieu
Philippe.villedieu@insa-toulouse.fr

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Plan du chapitre

1 **Définition et exemples d'application en physique de l'équation de Poisson**

2 **Conditions aux limites usuelles**

3 **Unicité de la solution et principe du maximum**

4 **Résolution exacte par méthode intégrale** — Complément – culture générale

5 **Résolution exacte par méthode spectrale**

6 **Généralisation de l'équation de Poisson – Notion d'EDP elliptique**

R **Quelques références bibliographiques**

Plan du chapitre – Section 1

1 **Définition et exemples d'application en physique de l'équation de Poisson**

2 Conditions aux limites usuelles

3 Unicité de la solution et principe du maximum

4 Résolution exacte par méthode intégrale — Complément – culture générale

5 Résolution exacte par méthode spectrale

6 Généralisation de l'équation de Poisson – Notion d'EDP elliptique

R Quelques références bibliographiques

1. Définition et exemples d'application en physique

L'équation de Poisson désigne l'EDP suivante, d'inconnue u :

$$(1) \quad \Delta u = f$$

où u et f sont des fonctions de $\mathbb{R}^q$ (ou d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^q$) dans $\mathbb{R}$, et où Δ désigne l'opérateur « Laplacien » défini par :

$$(2) \quad \Delta u \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_q^2}$$

Rappels de notations. Gradient : $\vec{\nabla} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_q}\right)$; divergence d'un champ de vecteurs $\vec{F} = (F_1, \ldots, F_q)$: $\mathrm{div}(\vec{F}) = \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$. On a donc $\Delta u = \mathrm{div}(\vec{\nabla} u)$.

Si f est nulle, on l'appelle aussi **équation de Laplace** ; ses solutions sont appelées **fonctions harmoniques**. Elle joue un rôle important car **c'est l'équation modèle pour tous les problèmes elliptiques.**

Elle se rencontre dans de nombreux domaines de la physique (voir les pages suivantes).

1. Définition et exemples d'application en physique

- **En électrostatique**, où elle s'écrit :

$$(3) \quad \Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

où ρ désigne la densité volumique de charge électrique, ε_0 la permittivité électrique du vide et V le potentiel électrique, relié au champ électrique $\vec{E}$ par la relation :

$$(4) \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

(3) traduit le fait que le champ électrique $\vec{E}$ doit vérifier l'équation de Maxwell-Gauss :

$$(5) \quad \mathrm{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

En effet, d'après (4), $\mathrm{div}(\vec{E}) = -\mathrm{div}(\vec{\nabla} V) = -\Delta V$.

- **En thermique** (en régime stationnaire), où elle s'écrit :

$$(6) \quad \Delta T = -\frac{f}{\lambda}$$

où T désigne la température en chaque point d'un solide homogène de conductivité thermique $\lambda > 0$ et f modélise la quantité d'énergie libérée par unité de temps et de volume au sein du solide (par effet Joule par exemple).

(6) traduit la conservation locale de l'énergie : (7) $\mathrm{div}(\vec{q}) = f$, où $\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} T$ est le flux de chaleur donné par la loi de Fourier (et $\mathrm{div}(\vec{q}) = -\lambda \Delta T$).

1. Définition et exemples d'application en physique

- **En dynamique des fluides parfaits incompressibles** (écoulements irrotationnels), où elle s'écrit :

$$(8) \quad \Delta\phi = 0$$

où ϕ désigne la fonction « potentiel des vitesses », reliée à la vitesse $\vec{V}$ du fluide par la relation :

$$(9) \quad \vec{V} = \vec{\nabla}\phi$$

(8) traduit le fait que le champ de vitesse doit vérifier l'équation de conservation du volume (cas d'un fluide incompressible) :

$$(10) \quad \mathrm{div}(\vec{V}) = 0$$

- **Autres exemples** :
  - ✓ membrane élastique tendue (déplacement u, tension τ, force volumique f) : $-\tau\,\Delta u = f$;
  - ✓ gravitation (potentiel Φ, masse volumique ρ, constante universelle G) : $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$;
  - ✓ diffusion stationnaire d'une espèce chimique (loi de Fick, concentration c) : $-D\,\Delta c = s$;
  - ✓ écoulement incompressible en milieu poreux homogène (loi de Darcy, pression p) : $\Delta p = 0$.

1. Définition et exemples d'application en physique

Dans tous ces exemples, on retrouve la **même structure** :

Électrostatique

Inconnue : V

Loi : $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$

Bilan : $\mathrm{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Équation : $\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Thermique

Inconnue : T

Loi : $\vec{q} = -\lambda\vec{\nabla}T$

Bilan : $\mathrm{div}(\vec{q}) = f$

Équation : $\Delta T = -\frac{f}{\lambda}$

Fluides parfaits

Inconnue : ϕ

Loi : $\vec{V} = \vec{\nabla}\phi$

Bilan : $\mathrm{div}(\vec{V}) = 0$

Équation : $\Delta\phi = 0$

- une **loi de comportement** linéaire : le flux est proportionnel au gradient de l'inconnue ;
- une **loi de conservation** : la divergence du flux est égale à la source volumique ;
- en combinant les deux, on obtient l'équation de Poisson.

Cette structure « **flux = −(coefficient) × gradient** » et « **divergence du flux = source** » sera généralisée au §6 à des milieux hétérogènes ou anisotropes : elle conduit à la notion d'**EDP elliptique**.

Plan du chapitre – Section 2

1 Définition et exemples d'application en physique de l'équation de Poisson

2 Conditions aux limites usuelles

3 Unicité de la solution et principe du maximum

4 Résolution exacte par méthode intégrale — Complément – culture générale

5 Résolution exacte par méthode spectrale

6 Généralisation de l'équation de Poisson – Notion d'EDP elliptique

R Quelques références bibliographiques

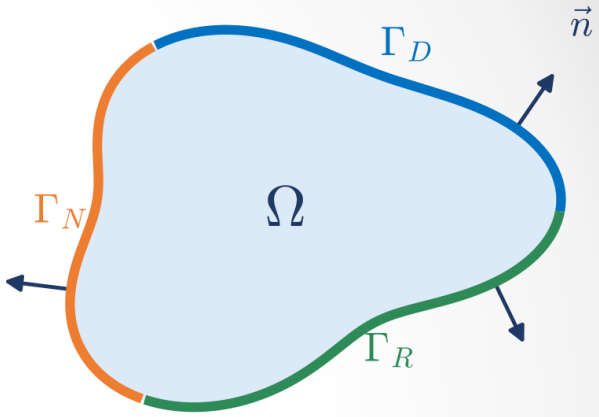
2. Conditions aux limites

- L'équation de Poisson est **une EDP linéaire du second ordre**.
- **Sa solution n'est pas unique.** Si u est solution, toute fonction de la forme $u + v$ avec v **harmonique** ($\Delta v = 0$) est également solution : par exemple v fonction affine de $x_1, \dots, x_q$, ou encore $v = x_1^2 - x_2^2$.
- **Pour que le modèle possède une unique solution, il faut imposer une condition aux limites sur u.**
- Si u est définie sur tout l'espace (c'est-à-dire sur $\mathbb{R}^q$ tout entier), on impose le comportement de u à l'infini. Par exemple, en électrostatique, on impose que le potentiel tende vers 0 à l'infini.
- Le plus souvent (en particulier si on veut résoudre numériquement l'équation), la fonction u n'est pas définie sur tout l'espace mais seulement sur un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^q$. **On impose alors à u de vérifier une certaine condition sur la frontière $\partial\Omega$ de Ω. Le choix de cette condition fait partie de la modélisation du problème, au même titre que l'équation (1).**

2. Conditions aux limites

Les conditions aux limites usuelles pour (1) sont :

- ✓ **Dirichlet :** $u(\mathbf{x}) = g_D(\mathbf{x})$ pour tout $\mathbf{x} \in \Gamma_D$
- ✓ **Neumann :** $\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) \overset{\text{def}}{=} \vec{\nabla} u(\mathbf{x}) \cdot \vec{n}(\mathbf{x}) = g_N(\mathbf{x})$ pour tout $\mathbf{x} \in \Gamma_N$
- ✓ **Robin (ou Fourier) :** $\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) = \alpha_R(\mathbf{x})\big(g_R(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})\big)$ pour tout $\mathbf{x} \in \Gamma_R$



où $\vec{n}$ désigne la normale unitaire **sortante** à Ω et où α_R, g_D, g_N, g_R sont des données (expérimentales ou issues de la modélisation du problème). Les parties Γ_D, Γ_N et Γ_R forment une **partition** de $\partial\Omega$ (certaines d'entre elles pouvant être vides).

Dans de nombreux cas, la modélisation conduit à imposer des conditions aux limites de types différents selon la partie de la frontière considérée : on parle de conditions aux limites **mixtes**.

2. Conditions aux limites

- La condition de Robin est la plus générale. Dans le cas $\alpha_R = 0$, elle redonne la condition de Neumann homogène ($\partial u/\partial n = 0$) et, formellement, dans la limite $\alpha_R \to +\infty$, la condition de Dirichlet ($u = g_R$).
- **Interprétation thermique.** Si $u = T$, la condition de Fourier modélise un échange convectif avec un milieu extérieur à la température T_{ext} ($h > 0$: coefficient d'échange) :

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = h\,(T - T_{\text{ext}}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha_R\,(g_R - T) \ \text{ avec } \ \alpha_R = \frac{h}{\lambda},\ \ g_R = T_{\text{ext}}$$

  La condition de Neumann impose le flux sortant $-\lambda\,\partial T/\partial n$ (paroi adiabatique si $g_N = 0$) ; la condition de Dirichlet impose la température.

Remarque (Neumann pur). Si $\Gamma_N = \partial\Omega$, les données f et g_N ne peuvent pas être choisies arbitrairement : elles doivent vérifier la **condition de compatibilité** $\int_\Omega f\ d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} g_N\ dS$ (voir la page suivante).

2. Conditions aux limites

On considère le **problème de Neumann pur** ($\Gamma_N = \partial\Omega$) :

$$\Delta u = f \ \text{ dans } \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = g_N \ \text{ sur } \partial\Omega$$

Proposition (condition nécessaire d'existence). Si ce problème possède une solution $u \in C^2(\overline{\Omega})$, alors les données vérifient la **condition de compatibilité** :

$$\int_\Omega f \ d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} g_N \ dS$$

Preuve. On applique la formule d'Ostrogradski (voir §3) au champ $\vec{F} = \vec{\nabla} u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^q)$: $\int_\Omega f \ d\mathbf{x} = \int_\Omega \operatorname{div}(\vec{\nabla} u) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{n} \, dS = \int_{\partial\Omega} g_N \ dS$.

□

- **Interprétation thermique.** Avec $-\lambda \Delta T = P$ (P : puissance volumique produite) et un flux sortant imposé $\varphi = -\lambda \, \partial T/\partial n$ sur $\partial\Omega$, la condition s'écrit $\int_\Omega P \ d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \varphi \ dS$: en régime stationnaire, **la puissance produite dans le solide doit être exactement évacuée par sa frontière**. Un solide chauffé ($P > 0$) à paroi adiabatique ($\varphi = 0$) n'a pas de régime stationnaire : sa température croît indéfiniment.

2. Conditions aux limites

Problème de Neumann pur (suite).

- **Exemple 1D.** Sur $]0, L[$, la normale sortante vaut -1 en $x = 0$ et $+1$ en $x = L$, donc $\frac{\partial u}{\partial n}(0) = -u'(0)$ et $\frac{\partial u}{\partial n}(L) = u'(L)$. La condition s'écrit $\int_0^L f \, dx = u'(L) - u'(0)$: c'est simplement l'intégration de $u'' = f$.
- **Non-unicité.** Si u est solution, $u + c$ l'est aussi pour toute constante c. On fixe la constante par une condition supplémentaire, par exemple $\int_\Omega u \, d\mathbf{x} = 0$. On admettra que, si Ω est connexe et si la condition de compatibilité est vérifiée, le problème ainsi complété possède une unique solution.
- **Conséquence numérique.** La matrice du problème discrétisé est singulière (les champs constants sont dans son noyau) : la solution est définie à une constante additive près et il faut donc imposer une condition supplémentaire (valeur de la solution en un point par exemple) pour fixer la constante. Il faut aussi veiller à ce que la condition de compatibilité soit vérifiée au niveau discret.

Plan du chapitre – Section 3

1 Définition et exemples d'application en physique de l'équation de Poisson

2 Conditions aux limites usuelles

3 Unicité de la solution et principe du maximum

4 Résolution exacte par méthode intégrale — Complément – culture générale

5 Résolution exacte par méthode spectrale

6 Généralisation de l'équation de Poisson – Notion d'EDP elliptique

R Quelques références bibliographiques

3. Unicité de la solution et principe du maximum

Les démonstrations de ce chapitre reposent sur les formules de Green qui résultent de la formule d'Ostrogradski (cf. TD1, exercice 1):

Formule d'Ostrogradski (admise). Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^q$ de frontière $\partial\Omega$ régulière et $\vec{n}$ la normale unitaire sortante. Pour tout champ de vecteurs $\vec{F} \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^q)$:

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\vec{F})\, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$$

En l'appliquant à $\vec{F} = v\,\vec{\nabla}u$, pour lequel $\operatorname{div}(v\,\vec{\nabla}u) = v\,\Delta u + \vec{\nabla}u \cdot \vec{\nabla}v$, on obtient pour tous $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$:

Formules de Green

$$(11) \quad \int_\Omega v\ \Delta u\, d\mathbf{x} = -\int_\Omega \vec{\nabla}\, u \cdot \vec{\nabla} v\, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} v\, \frac{\partial u}{\partial n}\, dS$$

$$(12) \quad \int_\Omega (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\ d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \left(v\, \frac{\partial u}{\partial n} - u\, \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS$$

(12) s'obtient en écrivant (11) une seconde fois en échangeant les rôles de u et v, puis en soustrayant. Ces formules restent vraies pour des fonctions à valeurs complexes (cf. TD1, exercice 1).

3. Unicité de la solution et principe du maximum

Théorème (unicité). Soit Ω un ouvert borné de frontière régulière, de composantes connexes $\Omega_1, \dots, \Omega_m$; leurs frontières $\partial\Omega_i$ sont disjointes et $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \cdots \cup \partial\Omega_m$). On considère le problème $\Delta u = f$ dans Ω avec la condition de Robin $\frac{\partial u}{\partial n} = \alpha_R\,(g_R - u)$ sur $\partial\Omega$, où α_R est continue et $\alpha_R \geq 0$ sur $\partial\Omega$. On suppose que, **pour tout** i**,** α_R **n'est pas identiquement nulle sur** $\partial\Omega_i$. Alors ce problème possède **au plus une** solution de classe C^2 sur $\overline{\Omega}$.

Démonstration. Supposons que le problème possède deux solutions u et v de classe C^2 sur $\overline{\Omega}$ et posons $w = u - v$. Montrons que w est la fonction nulle. Par linéarité du problème, w est solution de :

$$(13) \quad \text{(i)}\ \Delta w = 0 \ \text{ dans } \Omega \qquad \text{et} \qquad \text{(ii)}\ \frac{\partial w}{\partial n} = -\alpha_R\, w \ \text{ sur } \partial\Omega$$

On multiplie (i) par w, on intègre sur Ω et on applique la formule de Green (11) avec $u = v = w$:

$$0 = \int_\Omega w\ \Delta w\, d\mathbf{x} = -\int_\Omega \left|\vec{\nabla} w\right|^2\, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} w\, \frac{\partial w}{\partial n}\, dS$$

puis, en utilisant (ii) :

$$(14) \quad \int_\Omega \left|\vec{\nabla} w\right|^2\, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \alpha_R\, w^2\, dS = 0$$

3. Unicité de la solution et principe du maximum

Démonstration (suite). Les deux termes de (14) sont **positifs ou nuls** (car $\alpha_R \geq 0$). Leur somme étant nulle, ils sont **tous les deux nuls** :

- $\left|\vec{\nabla} w\right|^2$ est une fonction **continue et positive** sur $\overline{\Omega}$, d'intégrale nulle : elle est donc identiquement nulle. Ainsi $\vec{\nabla} w = \vec{0}$ sur Ω : w est **constante sur chaque composante connexe**, $w = c_i$ sur $\overline{\Omega_i}$ (par continuité).
- Le second terme s'écrit alors $\sum_{i=1}^{m} c_i^2 \int_{\partial\Omega_i} \alpha_R \, dS = 0$: somme de termes positifs, donc chacun est nul. Or $\int_{\partial\Omega_i} \alpha_R \, dS > 0$ (α_R est continue, positive et non identiquement nulle sur $\partial\Omega_i$). Donc $c_i = 0$ pour tout i.

Ainsi $w = 0$ sur $\overline{\Omega}$, c'est-à-dire $u = v$.

□

Remarques.

- ✓ Si Ω est connexe ($m = 1$), l'hypothèse se réduit à : α_R n'est pas identiquement nulle sur $\partial\Omega$.
- ✓ L'hypothèse est **optimale** : si $\alpha_R \equiv 0$ sur $\partial\Omega_k$, la fonction égale à 1 sur Ω_k et à 0 ailleurs vérifie (13) ; on peut l'ajouter à une solution.
- ✓ **Dirichlet ou conditions mixtes** : même preuve (le terme de bord est nul sur Γ_D car $w = 0$, et sur Γ_N). Il y a unicité dès que chaque $\partial\Omega_i$ contient une partie de Γ_D ou une partie de Γ_R où $\alpha_R > 0$.
- ✓ **Neumann pur** ($\alpha_R \equiv 0$) : la solution est unique à une constante additive près **sur chaque composante connexe**.

3. Unicité de la solution et principe du maximum

Principe du maximum faible. Soit Ω un ouvert **borné** de $\mathbb{R}^q$ et $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ telle que $\Delta u \geq 0$ dans Ω. Alors :

$$(15) \quad \max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et $v_\varepsilon(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + \varepsilon\,|\mathbf{x}|^2$. Alors $\Delta v_\varepsilon = \Delta u + 2q\,\varepsilon > 0$ dans Ω.

- v_ε est continue sur le compact $\overline{\Omega}$: elle y atteint son maximum. Si ce maximum était atteint en un point $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, alors pour tout i, la fonction $t \mapsto v_\varepsilon(\mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{e}_i)$ aurait un maximum local en $t = 0$, d'où $\frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x_i^2}(\mathbf{x}_0) \leq 0$ et donc $\Delta v_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \leq 0$: **contradiction**. Le maximum de v_ε est donc atteint sur $\partial\Omega$.
- En notant $M = \max_{\overline{\Omega}} |\mathbf{x}|^2$, on en déduit :

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\overline{\Omega}} v_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} v_\varepsilon \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon M$$

et il suffit de faire tendre ε vers 0.

□

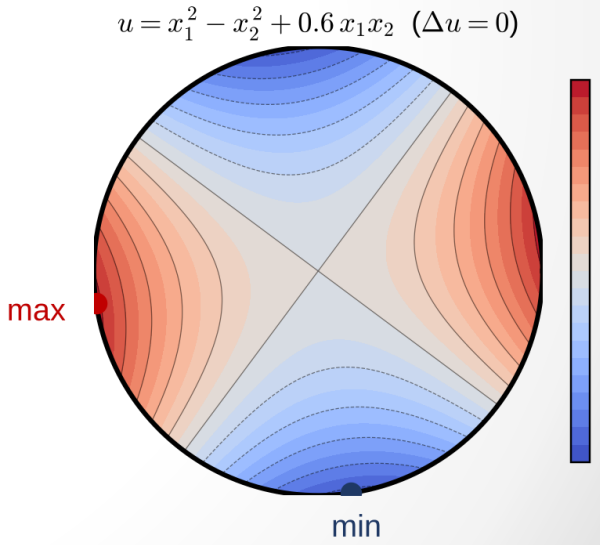
3. Unicité de la solution et principe du maximum

Corollaire (fonctions harmoniques). Soit Ω un ouvert **borné** de $\mathbb{R}^q$ et $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ **harmonique** sur Ω (c'est-à-dire $\Delta u = 0$ dans Ω). Alors, pour tout $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$:

$$\min_{\partial\Omega} u \;\leq\; u(\mathbf{x}) \;\leq\; \max_{\partial\Omega} u$$

Preuve. On applique (15) à u (car $\Delta u = 0 \geq 0$) et à $-u$ (car $\Delta(-u) = 0 \geq 0$) : $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$ et $\max_{\overline{\Omega}}(-u) = \max_{\partial\Omega}(-u)$, c'est-à-dire $\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$. □

- Une fonction harmonique sur un domaine borné atteint son maximum **et** son minimum sur le bord du domaine : ses valeurs à l'intérieur sont encadrées par ses valeurs au bord.
- Si on pense à u comme à la température dans un solide, cela veut dire qu'en régime stationnaire et en l'absence de source de chaleur dans Ω, la température en tout point est comprise entre la plus petite et la plus grande des températures sur le bord du solide.
- En particulier, si u est harmonique sur Ω, continue sur $\overline{\Omega}$ et **constante sur** $\partial\Omega$ (égale à C), alors $C \leq u \leq C$: u est constante sur $\overline{\Omega}$.



3. Unicité de la solution et principe du maximum

En appliquant (15) à u et à $-u$, on obtient trois conséquences importantes :

- **Unicité pour le problème de Dirichlet** (autre preuve, directe) : si u_1 et u_2 sont solutions de $\Delta u = f$ dans Ω et $u = g_D$ sur $\partial\Omega$, alors $w = u_1 - u_2$ est harmonique et nulle sur $\partial\Omega$. D'après (15) appliqué à w et à $-w$: $\max w \leq 0$ et $\max(-w) \leq 0$, donc $w = 0$.
- **Stabilité** : si $\Delta u = 0$ dans Ω et $u = g$ sur $\partial\Omega$, alors $\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |g|$. Une petite perturbation des données au bord ne produit qu'une petite perturbation de la solution.
- **Positivité (comparaison)** : si $-\Delta u = f \geq 0$ dans Ω et $u \geq 0$ sur $\partial\Omega$, alors $u \geq 0$ dans Ω. En thermique : une source de chaleur positive ne peut pas créer, à l'intérieur du solide, une température inférieure à la plus petite température imposée au bord.

Pour le numéricien : ces propriétés sont des critères de qualité importants pour les **schémas numériques**. On cherche des discrétisations qui vérifient un **principe du maximum discret**, ce qui garantit l'absence d'oscillations non physiques de la solution approchée.

Plan du chapitre – Section 4

1 Définition et exemples d'application en physique de l'équation de Poisson

2 Conditions aux limites usuelles

3 Unicité de la solution et principe du maximum

4 Résolution exacte par méthode intégrale — Complément – culture générale

5 Résolution exacte par méthode spectrale

6 Généralisation de l'équation de Poisson – Notion d'EDP elliptique

R Quelques références bibliographiques

4. Résolution exacte par méthode intégrale

Complément – culture générale

L'équation (1) étant linéaire, nous allons voir maintenant qu'il est possible dans certains cas d'en calculer la solution exacte à l'aide d'une intégrale.

- Commençons par étudier le cas le plus simple où $\Omega = \mathbb{R}^3$. On cherche donc une fonction u, de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$, telle que :

$$(16\text{−a})\ \ \Delta u = f \ \text{ sur } \mathbb{R}^3 \qquad \text{et} \qquad (16\text{−b})\ \ \lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} u(\mathbf{x}) = 0$$

- Pour résoudre ce problème, nous allons voir qu'il suffit de savoir résoudre pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ le problème suivant :

$$(17\text{−a})\ \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,\ \ \Delta_{\mathbf{x}} K(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \qquad (17\text{−b})\ \ \lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} K(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$$

  où δ désigne la mesure de Dirac sur $\mathbb{R}^3$, définie **formellement** par : $\delta(\mathbf{r}) = 0$ si $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$, $\delta(\mathbf{0}) = +\infty$ et $\int_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = 1$. (Ce n'est pas une fonction au sens usuel : on lui donne un sens rigoureux dans la théorie des distributions.)

- Dans (17), il est important de noter que $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ ne jouent pas le même rôle : $\mathbf{x}$ est la variable (celle par rapport à laquelle on dérive K) et $\mathbf{y}$ est un paramètre fixé.

4. Résolution exacte par méthode intégrale

Complément – culture générale

- Physiquement, résoudre le problème (17) équivaut à chercher le potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle Q placée au point $\mathbf{y}$. On sait que le potentiel a pour expression dans ce cas :

$$V(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\,|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$$

- Par analogie, on peut donc chercher la solution sous la forme :

$$(18) \quad K(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{C}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$$

- On vérifie par un calcul direct que $\Delta_{\mathbf{x}} K(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ pour $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ (ce qui est cohérent avec (17-a)) et la condition (17-b) est satisfaite. Il reste à trouver la valeur de la constante C. Pour cela, intégrons (17-a) par rapport à $\mathbf{x}$ sur une boule $B(\mathbf{y},R)$ de rayon R et de centre $\mathbf{y}$. On obtient (formellement) en se servant du théorème d'Ostrogradski :

$$\int_{S(\mathbf{y},R)} \vec{\nabla}_{\mathbf{x}} K(\mathbf{x},\mathbf{y}) \cdot \vec{n}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = 1$$

d'où, en se servant du fait que $\vec{\nabla}_{\mathbf{x}} K(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -C\,\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3}$ et que, sur la sphère $S(\mathbf{y},R)$, $|\mathbf{x}-\mathbf{y}| = R$ et $\vec{n}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$, on obtient :

$$(19) \quad -4\pi R^2\,\frac{C}{R^2} = 1 \qquad \text{soit} \qquad C = -\frac{1}{4\pi}$$

4. Résolution exacte par méthode intégrale

Complément – culture générale

- D'où finalement l'expression de K, solution de (17-a)-(17-b) :

$$(20) \quad K(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{-1}{4\pi\,|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$$

- On peut maintenant résoudre le problème initial (16-a)-(16-b).

Théorème. Si f est de classe C^1 à support compact (ou plus généralement régulière et décroissant assez vite à l'infini), la solution de (16-a)-(16-b) a pour expression :

$$(21) \quad u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} K(\mathbf{x},\mathbf{y})\, f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(\mathbf{y})}{4\pi\,|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\, d\mathbf{y}$$

- Il convient de noter que l'intégrale définissant u ne diverge pas au voisinage de $\mathbf{y}=\mathbf{x}$. En effet, pour tout $\epsilon > 0$ (en coordonnées sphériques centrées en $\mathbf{x}$) :

$$\int_{B(\mathbf{x},\epsilon)} \frac{|f(\mathbf{y})|}{4\pi\,|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\, d\mathbf{y} \le \max|f| \int_0^{\epsilon} \frac{4\pi r^2}{4\pi r}\, dr = \frac{\max|f|}{2}\,\epsilon^2$$

(L'hypothèse « f de classe C^1 » plutôt que « f continue » garantit que u est bien de classe C^2.)

4. Résolution exacte par méthode intégrale

Complément – culture générale

Démonstration (formelle) du théorème : soit F le support (compact) de f et soit $\mathbf{x}$ un point situé en dehors de F. On a :

$$(22) \quad |u(\mathbf{x})| \leq \frac{1}{4\pi \operatorname{dist}(\mathbf{x}, F)} \int_{\mathbb{R}^3} |f(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y}$$

On a donc bien $\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} u(\mathbf{x}) = 0$. De plus, d'après (21), on a (formellement), en utilisant le théorème de dérivation sous le signe somme :

$$\Delta_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \Delta_{\mathbf{x}} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \, f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$$

ce qui conclut la démonstration (formelle).

□

Interprétation du théorème : (21) traduit le fait que le problème (16) étant linéaire, sa solution peut s'écrire comme une **combinaison linéaire de solutions particulières** (les fonctions $K(\cdot, \mathbf{y})$, avec $\mathbf{y}$ décrivant tout l'espace), $f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}$ correspondant au poids de la fonction $K(\cdot, \mathbf{y})$ dans l'expression de la solution (principe de superposition).

La fonction $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est appelée fonction de Green (ou noyau de Green, ou encore solution fondamentale du Laplacien) associée au problème (16). Elle dépend, comme on va le voir, de la dimension de l'espace, de la forme du domaine Ω et des conditions aux limites du problème.

4. Résolution exacte par méthode intégrale

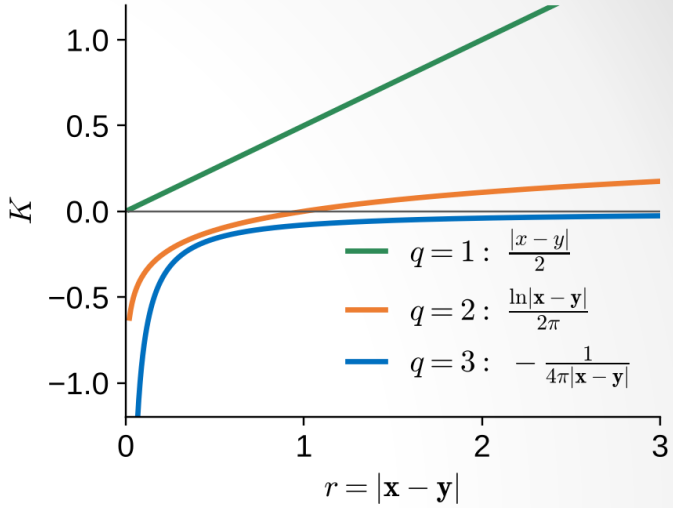
Complément – culture générale

- On peut reproduire la même démarche (laissée en exercice) en dimension $q = 2$ et en dimension $q \geq 3$. On trouve respectivement que :

  ✓ $K(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\ln|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{2\pi}$ pour $q = 2$

  ✓ $K(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{-1}{q(q-2)\,\omega_q}\,|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{2-q}$ pour $q \geq 3$

  où ω_q désigne le volume de la boule unité de dimension q ($\omega_3 = 4\pi/3$: on retrouve (20)).



- En dimension 2, K ne tend pas vers 0 à l'infini : la condition (17-b) doit être remplacée par une condition de croissance au plus logarithmique à l'infini.
- En dimension 1, il n'existe pas de fonction $K(x,y)$ vérifiant à la fois $\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,y) = \delta(x-y)$ et $\lim_{|x|\to\infty} K(x,y) = 0$. La fonction $K(x,y) = \frac{|x-y|}{2}$ vérifie la première relation.

Pour aller plus loin : une démonstration rigoureuse du théorème (hors programme) consiste à écrire $u(\mathbf{x}) = \int K(\mathbf{z},\mathbf{0})\, f(\mathbf{x}-\mathbf{z})\, d\mathbf{z}$, à dériver sous le signe somme sur f, puis à appliquer la formule de Green (12) sur la couronne $\{\varepsilon < |\mathbf{z}| < R\}$ avant de faire tendre ε vers 0 (voir L.C. Evans, chap. 2).

4. Résolution exacte par méthode intégrale

Complément – culture générale

Considérons maintenant le cas d'un domaine borné Ω avec une condition de Dirichlet $u = g_D$ sur $\partial\Omega$, où g_D est une fonction régulière.

- Soit u_D un **relèvement** régulier de g_D, c'est-à-dire une fonction régulière sur $\overline{\Omega}$ telle que $u_D = g_D$ sur $\partial\Omega$ (si $\partial\Omega$ et g_D sont assez régulières, on peut montrer que u_D existe).
- En posant $w = u - u_D$, le problème

$$(23\text{–a})\ \ \Delta u = f \ \text{ sur } \Omega \qquad \text{et} \qquad (23\text{–b})\ \ u = g_D \ \text{ sur } \partial\Omega$$

  est équivalent au problème :

$$(24\text{–a})\ \ \Delta w = f - \Delta u_D \ \text{ sur } \Omega \qquad \text{et} \qquad (24\text{–b})\ \ w = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega$$

- Par ce changement d'inconnue, on a donc ramené le problème (23) à un problème analogue mais avec une condition aux limites **homogène**.

4. Résolution exacte par méthode intégrale

Complément – culture générale

- Pour tout $\mathbf{y} \in \Omega$, soit $G(\cdot, \mathbf{y})$ la fonction définie (à $\mathbf{y}$ fixé) par :

$$(25\text{–a})\ \ \forall \mathbf{x} \in \Omega,\ \ \Delta_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \qquad (25\text{–b})\ \ \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega,\ \ G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$$

$G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est appelée **fonction de Green** associée au problème (23).

- On admettra que G vérifie les deux propriétés suivantes :

(i) pour tout $\mathbf{y} \in \Omega$, $\mathbf{x} \mapsto G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est C^∞ sur $\overline{\Omega} \backslash \{\mathbf{y}\}$ (si $\partial\Omega$ est régulière) ;
(ii) G est **symétrique** : pour tout $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega \times \Omega$ avec $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

- **Structure de** G : pour $\mathbf{y} \in \Omega$ fixé, $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - h_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$, où $h_{\mathbf{y}}$ est la solution du problème $\Delta h_{\mathbf{y}} = 0$ dans Ω, $h_{\mathbf{y}} = K(\cdot, \mathbf{y})$ sur $\partial\Omega$. Comme $\mathrm{dist}(\mathbf{y}, \partial\Omega) > 0$, la donnée $K(\cdot, \mathbf{y})$ est régulière sur $\partial\Omega$, donc $h_{\mathbf{y}}$ est régulière sur $\overline{\Omega}$ (si $\partial\Omega$ est régulière). La singularité de G en $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ est donc celle de K.

- Sauf si Ω est de forme simple (boule ou demi-espace par exemple, grâce à la « méthode des images »), il n'est pas possible en général de résoudre exactement le problème (25), donc de calculer l'expression exacte de la fonction de Green. On ne peut que l'approcher numériquement.

4. Résolution exacte par méthode intégrale

Complément – culture générale

L'intérêt de la fonction de Green repose sur le théorème fondamental suivant :

Théorème : si les données f, g_D, $\partial\Omega$ sont régulières, la solution du problème

$$(23\text{−a})\ \ \Delta u = f \ \text{ sur } \Omega \qquad \text{et} \qquad (23\text{−b})\ \ u = g_D \ \text{ sur } \partial\Omega$$

a pour expression :

$$(26)\quad u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G\,(\mathbf{x},\mathbf{y})\, f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} + \int_{\partial\Omega} \vec{\nabla}_{\mathbf{y}}\, G(\mathbf{y},\mathbf{x}) \cdot \vec{n}(\mathbf{y})\, g_D(\mathbf{y})\, dS(\mathbf{y})$$

On remarque que l'expression de la solution comporte deux termes :

- une intégrale « volumique » sur Ω, qui prend en compte l'influence de la source volumique f ;
- une intégrale « surfacique » sur $\partial\Omega$, qui prend en compte l'influence de la condition aux limites de Dirichlet $u = g_D$.

La formule (26) se généralise aux cas des conditions aux limites de Neumann et de Fourier-Robin.

4. Résolution exacte par méthode intégrale

Complément – culture générale

Démonstration formelle de (26).

Soit w la fonction définie sur $\overline{\Omega}$ par :

$$(27) \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{\Omega}, \qquad w(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})[f(\mathbf{y}) - \Delta u_D(\mathbf{y})]\, d\mathbf{y}$$

Comme $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ pour tout couple $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \partial\Omega \times \Omega$ d'après (25-b), on constate que w vérifie la condition aux limites (24-b) : $w = 0$ sur $\partial\Omega$.

Par ailleurs, en utilisant le théorème de dérivation sous le signe somme, on obtient (formellement) :

$$(28) \quad \Delta w(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \Delta_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})[f(\mathbf{y}) - \Delta u_D(\mathbf{y})]\, d\mathbf{y}$$

$$= \int_{\Omega} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x})[f(\mathbf{y}) - \Delta u_D(\mathbf{y})]\, d\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) - \Delta u_D(\mathbf{x})$$

qui n'est autre que l'équation (24-a). La solution du problème (24) étant unique (§3), on en déduit que $w = u - u_D$. On a donc pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$:

$$(29) \quad u(\mathbf{x}) - u_D(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})[f(\mathbf{y}) - \Delta u_D(\mathbf{y})]\, d\mathbf{y}$$

4. Résolution exacte par méthode intégrale

Complément – culture générale

Démonstration formelle de (26) (suite).

D'autre part, puisque G est symétrique :

$$\int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\Delta u_D(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} = \int_\Omega G(\mathbf{y},\mathbf{x})\,\Delta u_D(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}$$

D'où, en appliquant la formule de Green (12) dans la variable $\mathbf{y}$ (à $\mathbf{x}$ fixé) :

$$\int_\Omega G(\mathbf{y},\mathbf{x})\,\Delta u_D(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} = \int_\Omega \Delta_{\mathbf{y}}\, G(\mathbf{y},\mathbf{x})\,u_D(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}$$

$$-\int_{\partial\Omega} \vec{\nabla}_{\mathbf{y}}\, G(\mathbf{y},\mathbf{x})\cdot\vec{n}(\mathbf{y})\,g_D(\mathbf{y})\,dS(\mathbf{y}) + \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{y},\mathbf{x})\,\frac{\partial u_D}{\partial n}(\mathbf{y})\,dS(\mathbf{y})$$

$$= 0 \text{ d'après } (25\text{–b})$$

D'où finalement, en se servant de (25-a) :

$$\int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\Delta u_D(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} = u_D(\mathbf{x}) - \int_{\partial\Omega} \vec{\nabla}_{\mathbf{y}}\, G(\mathbf{y},\mathbf{x})\cdot\vec{n}(\mathbf{y})\,g_D(\mathbf{y})\,dS(\mathbf{y})$$

En reportant cette expression dans (29), les termes $u_D(\mathbf{x})$ se simplifient et on obtient (26).

□

Plan du chapitre – Section 5

1 Définition et exemples d'application en physique de l'équation de Poisson

2 Conditions aux limites usuelles

3 Unicité de la solution et principe du maximum

4 Résolution exacte par méthode intégrale — Complément – culture générale

5 Résolution exacte par méthode spectrale

6 Généralisation de l'équation de Poisson – Notion d'EDP elliptique

R Quelques références bibliographiques

5. Résolution exacte par méthode spectrale

- Nous allons maintenant étudier une autre méthode générale permettant de calculer la solution exacte du problème* :

$$(30) \quad -\Delta u = f \ \text{dans}\ \Omega \qquad \text{et} \qquad (31) \quad u = 0 \ \text{sur}\ \partial\Omega$$

à condition que Ω soit un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^q$.

- Cette méthode consiste à chercher la solution sous la forme d'une série de fonctions :

$$(32) \quad u = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f_k}{\lambda_k} \phi_k$$

où :

- ✓ les fonctions ϕ_k sont des fonctions particulières, appelées **fonctions propres du problème**, qui seront définies plus loin ;
- ✓ les λ_k sont les **valeurs propres associées** ;
- ✓ les coefficients f_k sont reliés à la fonction f par la relation :

$$(33) \quad f_k = \int_\Omega f(\mathbf{x})\, \phi_k(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

*On écrit ici l'équation sous la forme $-\Delta u = f$ afin que les valeurs propres associées au problème soient positives comme on le verra dans la suite.

5. Résolution exacte par méthode spectrale

Remarques :

- La méthode s'applique également pour des conditions aux limites homogènes de type Neumann ou Fourier-Robin (avec d'autres fonctions propres, cf. TD1, exercice 3).
- Dans le cas de conditions aux limites non homogènes, on peut toujours se ramener au cas homogène en retranchant à la solution u une fonction particulière vérifiant la condition aux limites (relèvement, cf. §4 et TD1, exercice 2).
- Par rapport à la méthode intégrale basée sur la notion de fonction de Green, la méthode spectrale présente plusieurs avantages (en particulier lorsque le domaine est de forme complexe et qu'il n'est possible de calculer de façon exacte ni la fonction de Green, ni les fonctions propres) :
  - ✓ les fonctions propres étant des fonctions régulières de $\mathbf{x}$, contrairement à la fonction de Green qui est singulière en $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, il est plus facile d'en calculer une approximation numérique ;
  - ✓ les coefficients du développement en série de u convergeant en général très vite vers 0, il est possible, pour les besoins pratiques, de remplacer la somme infinie par une somme finie ;
  - ✓ les fonctions propres ϕ_k et les valeurs propres associées λ_k jouent aussi (comme on le verra dans le chapitre 2) un rôle important pour la résolution des EDP instationnaires associées à l'opérateur Δ (équations de la chaleur et des ondes).

5. Résolution exacte par méthode spectrale

Définition : soit A un opérateur linéaire aux dérivées partielles et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On dit que λ est une **valeur propre** de l'opérateur A sur Ω, avec conditions de Dirichlet sur $\partial\Omega$, si et seulement s'il existe une fonction ϕ de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{C}$, **non identiquement nulle**, régulière sur $\overline{\Omega}$, telle que :

$$(34) \quad A\phi = \lambda\phi \ \text{ dans } \Omega \qquad \text{et} \qquad \phi = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega$$

Une telle fonction ϕ est appelée **fonction propre** associée à λ.

Théorème 1 sur les valeurs propres de l'opérateur $-\Delta$ (partiellement admis) : si $A = -\Delta$, les valeurs propres vérifient les propriétés suivantes :

- ✓ (i) toute valeur propre est un réel strictement positif ;
- ✓ (ii) toute valeur propre est de multiplicité finie (l'espace des fonctions propres associées est de dimension finie) ;
- ✓ (iii) l'ensemble des valeurs propres est infini, dénombrable et sans point d'accumulation ;
- ✓ (iv) on peut donc classer les valeurs propres par ordre croissant en les comptant autant de fois que leur multiplicité, de sorte qu'on ait : $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots$;
- ✓ (v) les valeurs propres ainsi classées forment une suite croissante tendant vers $+\infty$: $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$.

5. Résolution exacte par méthode spectrale

On note $L^2(\Omega, \mathbb{C})$ l'espace des fonctions à valeurs complexes **de (module) carré intégrable** sur Ω (il contient en particulier toutes les fonctions continues sur $\overline{\Omega}$), muni du produit scalaire et de la norme :

$$(u|v)_{L^2} \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega u(\mathbf{x})\,\overline{v(\mathbf{x})}\,d\mathbf{x}, \qquad \| u \|_{L^2} = \sqrt{(u|u)_{L^2}}$$

Théorème 2 sur les fonctions propres de l'opérateur $-\Delta$ (partiellement admis) : si $A = -\Delta$, les fonctions propres vérifient les propriétés suivantes :

- ✓ (i) si ϕ et ψ sont des fonctions propres associées à des valeurs propres **distinctes** $\lambda \neq \mu$, alors ϕ et ψ sont orthogonales dans $L^2(\Omega, \mathbb{C})$: $(\phi|\psi)_{L^2} = 0$;
- ✓ (ii) on peut choisir les fonctions propres ϕ_k (associées aux λ_k) **réelles** et de sorte qu'elles forment une **base orthonormée** de $L^2(\Omega, \mathbb{R})$, au sens où :

$$(a)\ \ (\phi_k|\phi_l)_{L^2} = \delta_{kl} \qquad (b)\ \ \forall u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}),\ \lim_{K\to+\infty} \| u - \sum_{k=1}^{K} (u|\phi_k)_{L^2}\ \phi_k \|_{L^2} = 0$$

Attention : Deux fonctions propres associées à une même valeur propre multiple ne sont pas nécessairement orthogonales ; on les orthonormalise (procédé de Gram-Schmidt) dans l'espace propre, qui est de dimension finie.

5. Résolution exacte par méthode spectrale

Remarques : les propriétés (i) des théorèmes 1 et 2 sont purement algébriques et se démontrent comme en dimension finie (matrices symétriques). Elles résultent du fait que l'opérateur $A = -\Delta$ avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes :

- ✓ **est auto-adjoint** pour le produit scalaire de $L^2(\Omega, \mathbb{C})$: pour tout couple de fonctions $(u, v) \in C^2(\overline{\Omega}) \times C^2(\overline{\Omega})$ avec u et v nulles sur $\partial\Omega$, on a d'après la formule de Green (12) :

$$(35) \quad (Au|v)_{L^2} = \int_\Omega -\Delta u(\mathbf{x})\, \overline{v}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_\Omega -u(\mathbf{x})\, \Delta\overline{v}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = (u|Av)_{L^2}$$

- ✓ **est défini positif** pour le produit scalaire de $L^2(\Omega, \mathbb{C})$: pour toute fonction $u \in C^2(\overline{\Omega})$, nulle sur $\partial\Omega$ et non identiquement nulle sur Ω, on a d'après la formule de Green (11) :

$$(36) \quad (Au|u)_{L^2} = \int_\Omega -\Delta u(\mathbf{x})\, \overline{u}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_\Omega |\vec{\nabla} u|^2\, d\mathbf{x} > 0$$

(l'intégrale ne pourrait être nulle que si u était constante sur chaque composante connexe de Ω, donc nulle puisque $u = 0$ sur $\partial\Omega$).

- ○ Les autres propriétés sont difficiles à démontrer. Elles font appel à la théorie des opérateurs compacts auto-adjoints et sortent du cadre de ce cours. **L'hypothèse Ω borné joue un rôle essentiel.**

5. Résolution exacte par méthode spectrale

Preuve des propriétés (i) à partir de (35)-(36). Soit ϕ une fonction propre associée à la valeur propre λ ; on note $\|\cdot\|=\|\cdot\|_{L^2}$, on a $\|\phi\| \neq 0$.

- λ **est réel :** $\lambda \|\phi\|^2 = (A\phi|\phi) = (\phi|A\phi) = \overline{\lambda} \|\phi\|^2$, donc $\lambda = \overline{\lambda}$.
- λ **est strictement positif :** $\lambda \|\phi\|^2 = (A\phi|\phi) > 0$ d'après (36).
- **Orthogonalité :** si $A\phi = \lambda\phi$ et $A\psi = \mu\psi$ avec $\lambda \neq \mu$ (réels), alors

$$\lambda\,(\phi|\psi) = (A\phi|\psi) = (\phi|A\psi) = \mu\,(\phi|\psi) \quad \Rightarrow \quad (\lambda-\mu)\,(\phi|\psi) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\phi|\psi) = 0$$

- **Fonctions propres réelles :** l'opérateur $-\Delta$ étant à coefficients réels, si ϕ est une fonction propre associée à $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\mathrm{Re}\phi$ et $\mathrm{Im}\phi$ vérifient aussi (34), et l'une au moins des deux est non identiquement nulle. On peut donc toujours choisir des fonctions propres réelles.

Ce sont exactement les arguments utilisés en algèbre linéaire pour montrer qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée (voir aussi TD1, exercice 1).

5. Résolution exacte par méthode spectrale

Grâce aux résultats des théorèmes 1 et 2, on peut maintenant justifier la formule (32) donnant l'expression de la solution du problème (30)-(31).

Proposition. Si $u \in C^2(\overline{\Omega})$ est solution de (30)-(31), alors ses coordonnées dans la base (ϕ_k) sont $u_k = (u|\phi_k)_{L^2} = \frac{f_k}{\lambda_k}$, et donc, au sens de la norme de $L^2(\Omega)$:

$$u = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f_k}{\lambda_k}\, \phi_k$$

Preuve. Les fonctions u et ϕ_l sont de classe C^2 sur $\overline{\Omega}$ et nulles sur $\partial\Omega$: on peut donc utiliser la propriété (35) d'auto-adjonction. Les λ_l et les ϕ_l étant réels :

$$\lambda_l\, u_l = \lambda_l\, (u|\phi_l)_{L^2} = (u|A\phi_l)_{L^2} = (Au|\phi_l)_{L^2} = (f|\phi_l)_{L^2} = \int_\Omega f\,(\mathbf{x})\, \phi_l(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = f_l$$

On conclut avec la propriété (ii-b) du théorème 2.

□

Remarque (preuve formelle). On retrouve le même résultat en écrivant $u = \sum_k u_k\ \phi_k$ et en **admettant** qu'on puisse permuter le signe $\sum$ et l'opérateur Δ : $-\Delta u = \sum_k \lambda_k\ u_k\, \phi_k = f$, puis en prenant le produit scalaire avec ϕ_l. L'argument ci-dessus évite cette permutation, qu'il serait difficile de justifier dans le cadre de ce cours, mais rend la preuve moins intuitive.

5. Résolution exacte par méthode spectrale

Sens de la série. La proposition montre que **si** le problème (30)-(31) possède une solution régulière, **alors** celle-ci est donnée par (32), la série convergeant au sens de la norme L^2.

- Le fait que la somme de la série vérifie la condition aux limites de Dirichlet n'est pas immédiat, car il s'agit d'une somme infinie. Cela résulte du fait que les ϕ_k vérifient chacune la condition aux limites et du fait que les coefficients f_k/λ_k décroissent vite vers 0 quand $k \to +\infty$, grâce à la croissance vers l'infini des valeurs propres.
- La justification complète (existence et régularité de la solution, convergence de la série dans des normes plus fortes) fait appel aux espaces de Sobolev, qui dépassent le cadre de ce cours.

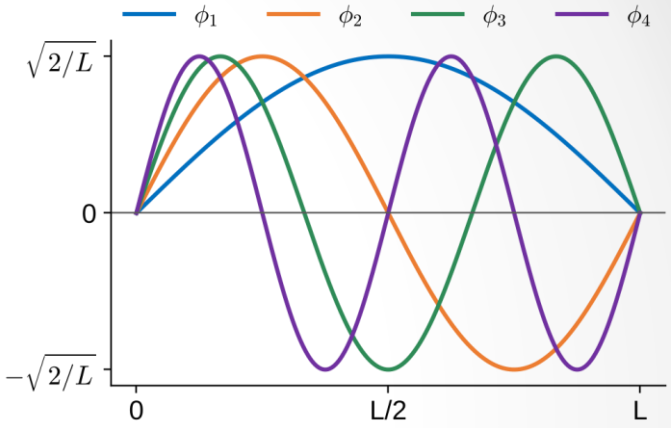
En pratique (calcul scientifique) : on tronque la série à K termes. La vitesse de décroissance des coefficients f_k/λ_k détermine le nombre de termes nécessaires pour atteindre une précision donnée (voir l'exemple qui suit et le TP1).

5. Résolution exacte par méthode spectrale

Exemple : le cas monodimensionnel. On prend $\Omega =]0, L[$ et $A = -\frac{d^2}{dx^2}$: on cherche λ et ϕ non identiquement nulle tels que

$$-\phi'' = \lambda\,\phi \ \text{ sur }]0, L[, \qquad \phi(0) = \phi(L) = 0$$

- D'après le théorème 1, $\lambda > 0$; on pose $\lambda = \omega^2$ avec $\omega > 0$. Alors $\phi(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$.
- $\phi(0) = 0$ donne $a = 0$, puis $\phi(L) = b\sin(\omega L) = 0$ avec $b \neq 0$ impose $\omega L = k\pi$, $k \in \mathbb{N}^*$.
- La normalisation $\int_0^L b^2 \sin^2(k\pi x/L)\,dx = b^2 L/2 = 1$ donne $b = \sqrt{2/L}$.



$$(37) \quad \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2, \qquad \phi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \qquad k \in \mathbb{N}^*$$

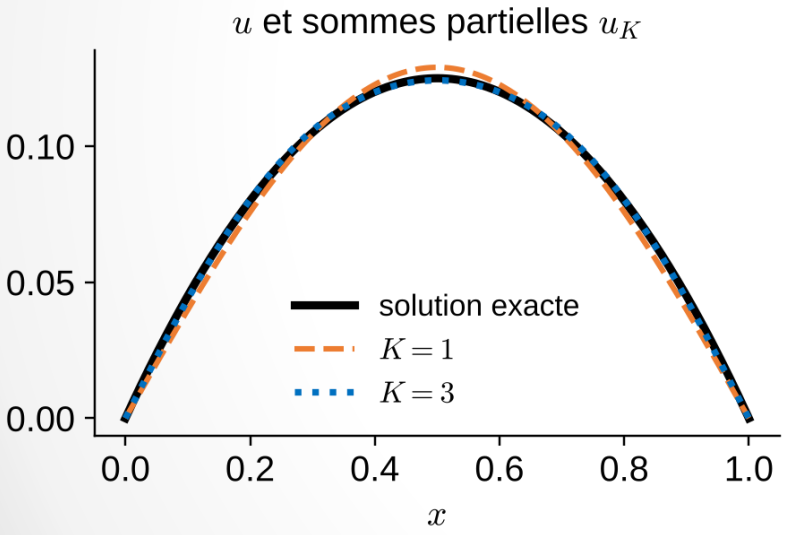
Dans ce cas, la méthode spectrale n'est autre que le **développement en série de Fourier en sinus** de la solution. En dimension 2, sur un rectangle, les fonctions propres s'obtiennent par séparation des variables à partir de (37) (TD1, exercice 4) ; avec des conditions de Neumann, on obtient des cosinus (TD1, exercice 3).

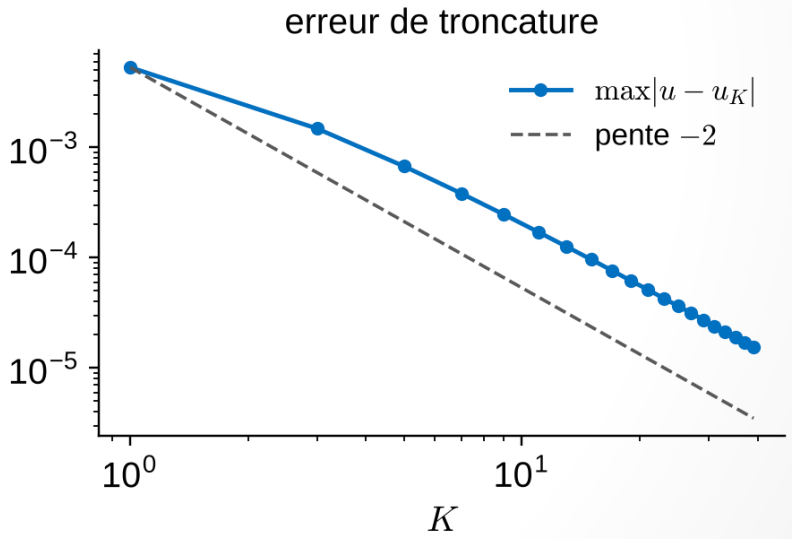
5. Résolution exacte par méthode spectrale

Application : $-u'' = 1$ sur $]0,1[$, $u(0) = u(1) = 0$, dont la solution exacte est $u(x) = \frac{x(1-x)}{2}$.

- Avec $L = 1$: $f_k = \int_0^1 \sqrt{2}\,\sin(k\pi x)\,dx = \frac{\sqrt{2}\,(1-(-1)^k)}{k\pi}$, d'où $\frac{f_k}{\lambda_k} = \frac{2\sqrt{2}}{k^3\pi^3}$ pour k impair et 0 pour k pair. Ainsi :

$$(38) \qquad \frac{x(1-x)}{2} = \sum_{k\ \text{impair}} \frac{4}{k^3\pi^3}\sin(k\pi x)$$





- Les coefficients décroissent comme $1/k^3$: en $x = 1/2$, **un seul terme** donne $4/\pi^3 \approx 0{,}129$ au lieu de $1/8 = 0{,}125$ (erreur d'environ 3 %), et l'erreur de troncature décroît comme $1/K^2$.

Plan du chapitre – Section 6

1 Définition et exemples d'application en physique de l'équation de Poisson

2 Conditions aux limites usuelles

3 Unicité de la solution et principe du maximum

4 Résolution exacte par méthode intégrale — Complément – culture générale

5 Résolution exacte par méthode spectrale

6 Généralisation de l'équation de Poisson – Notion d'EDP elliptique

R Quelques références bibliographiques

6. Généralisation – Notion d'EDP elliptique

- On a vu (§1) que dans le cas de la conduction de la chaleur dans un solide, l'équation de Poisson peut également s'écrire sous la forme :

$$(39) \quad \mathrm{div}(\vec{q}) = f$$

où $\vec{q}$ désigne le flux de chaleur, relié à la température par la relation linéaire (loi de Fourier) :

$$(40) \quad \vec{q} = -k\,\vec{\nabla}T$$

où k est une constante strictement positive appelée conductivité thermique du milieu (notée λ au §1).

- La relation (40) est valable uniquement dans un milieu **homogène et isotrope**, c'est-à-dire un milieu dont les propriétés sont invariantes par translation et par rotation.
- (40) exprime le fait que le flux de chaleur est proportionnel (et opposé) au gradient de température et que la relation de proportionnalité ne dépend ni de la position dans le solide (homogénéité) ni de la direction du gradient de température (isotropie).
- Dans de nombreuses applications, on rencontre des milieux **hétérogènes** et/ou **anisotropes** : matériaux composites à fibres, bois, roches sédimentaires, milieux stratifiés…

6. Généralisation – Notion d'EDP elliptique

- Tout en restant dans un cadre linéaire, on peut généraliser la relation (40) de deux façons :
  - ✓ en faisant simplement dépendre k de $\mathbf{x}$ (milieu **hétérogène**) ;
  - ✓ en remplaçant k par une matrice $\mathbf{K}$, éventuellement fonction de $\mathbf{x}$ (milieu **anisotrope**).
- Dans le cas général, on obtient donc le modèle suivant (en notant u l'inconnue) à la place de l'équation de Poisson :

$$(41) \quad -\operatorname{div}\left(\mathbf{K}\,\vec{\nabla}u\right) = f$$

associé à l'expression suivante pour le flux : $(42)\ \ \vec{q}(\mathbf{x}) = -\mathbf{K}(\mathbf{x})\,\vec{\nabla}u(\mathbf{x})$.

- Dans la majorité des cas, la matrice $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ est **symétrique définie positive** en tout $\mathbf{x} \in \Omega$ et de plus il existe une constante $\alpha > 0$ telle que (**uniforme ellipticité**) :

$$(43) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,\ \ \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^q, \qquad {}^t\boldsymbol{\xi}\,\mathbf{K}(\mathbf{x})\,\boldsymbol{\xi} \geq \alpha\,|\boldsymbol{\xi}|^2$$

- En développant l'expression des opérateurs div et grad, l'équation (41) s'écrit également :

$$(44) \quad -\sum_{i=1}^{q} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{q} K_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = f$$

6. Généralisation – Notion d'EDP elliptique

- Si $\mathbf{K}$ est une matrice **constante**, l'équation (44) est équivalente à :

$$(45) \quad -\sum_{i,j=1}^{q} K_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} = f$$

D'après le théorème de Schwarz (u de classe C^2), seule la partie symétrique $\frac{1}{2}(\mathbf{K} + {}^t\mathbf{K})$ de $\mathbf{K}$ intervient dans (45) : on peut donc supposer $\mathbf{K}$ symétrique sans perte de généralité.

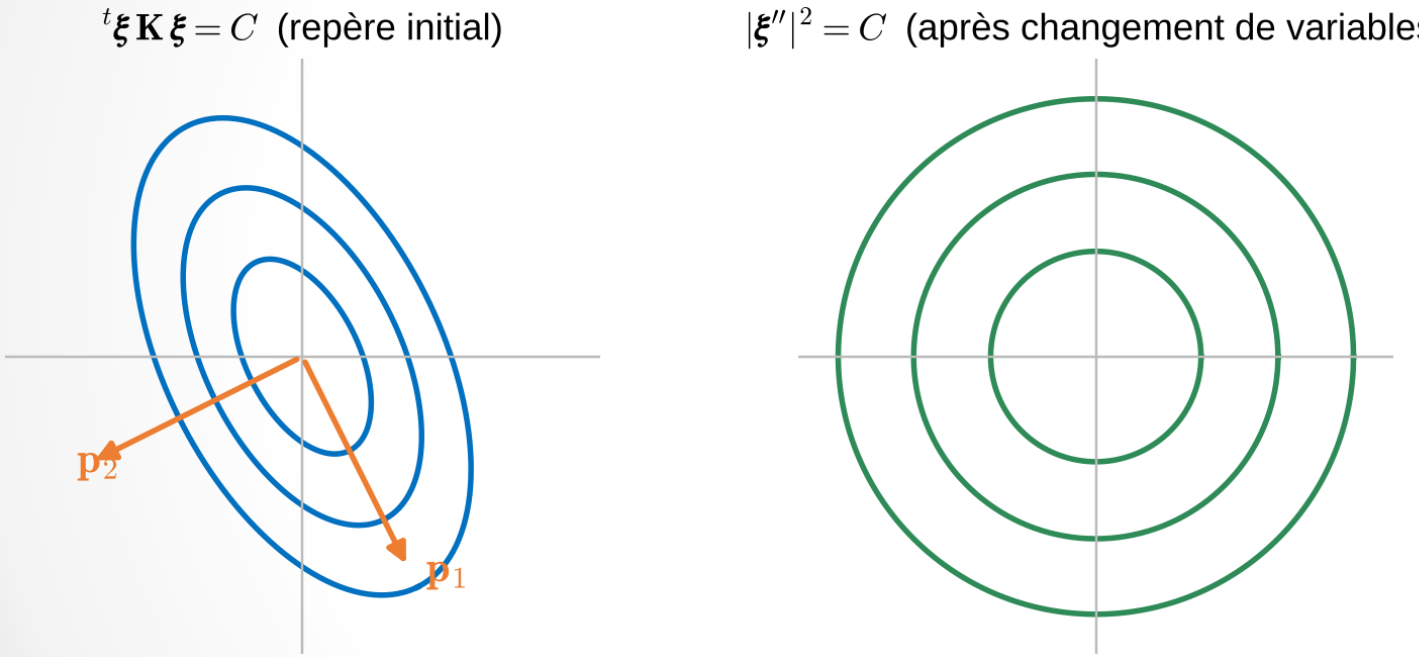
- Si de plus $\mathbf{K}$ est symétrique définie positive, il existe un changement de repère orthonormé $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}'$ tel que, dans le nouveau repère, (45) s'écrive :

$$(46) \quad -\sum_{j=1}^{q} \lambda_j \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial {x'_j}^2} = \tilde{f}$$

où les λ_j sont les valeurs propres de $\mathbf{K}$ (réels strictement positifs), et où $\tilde{u}(\mathbf{x}') = u(\mathbf{x})$ et $\tilde{f}(\mathbf{x}') = f(\mathbf{x})$.

6. Généralisation – Notion d'EDP elliptique

- L'hypersurface de $\mathbb{R}^q$ définie par l'équation ${}^t\boldsymbol{\xi}\,\mathbf{K}\,\boldsymbol{\xi} = C$, où C est une constante strictement positive, est un **ellipsoïde**. Pour cette raison, l'équation (46) et, par extension, les équations (44) et (45), lorsque $\mathbf{K}$ est une matrice symétrique définie positive, sont appelées **équations elliptiques** du second ordre.



Ci-dessus (exemple en dimension 2) : lignes de niveau de la forme quadratique associée à $\mathbf{K}$, dont les axes sont dirigés par les vecteurs propres $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ de $\mathbf{K}$, et les mêmes lignes de niveau après le changement de variables décrit dans les pages suivantes, qui transforme l'équation (45) en l'équation de Poisson.

6. Généralisation – Notion d'EDP elliptique

Preuve de (46).

$\mathbf{K}$ étant symétrique réelle, on sait qu'elle est diagonalisable dans une base orthonormée. Soit $\mathbf{P}$ la matrice (orthogonale) de changement de base et λ_i $(i = 1, \dots, q)$ les valeurs propres (toutes strictement positives) de $\mathbf{K}$. On a la formule de changement de base :

$$ {}^t\mathbf{P}\,\mathbf{K}\,\mathbf{P} = \mathbf{D} = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \dots, \lambda_q\right) $$

que l'on peut encore écrire sous la forme :

$$ (47) \qquad \sum_{k,l=1}^{q} P_{ki}\ K_{kl}\ P_{lj} = \lambda_i\ \delta_{ij} $$

Soit le changement de coordonnées $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}'$ défini par $\mathbf{x}' = {}^t\mathbf{P}\,\mathbf{x}$, soit :

$$ (48) \qquad x'_j = \sum_{i=1}^{q} P_{ij}\ x_i $$

On pose $\tilde{u}(\mathbf{x}') = u(\mathbf{x})$. D'après le théorème de dérivation des fonctions composées, et puisque $\partial x'_k / \partial x_i = P_{ik}$, on a :

$$ (49) \qquad \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x'_k} = \sum_{k=1}^{q} P_{ik} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x'_k} $$

6. Généralisation – Notion d'EDP elliptique

Preuve de (46) (suite).

En appliquant (49) deux fois, on en déduit que :

$$(45) \Leftrightarrow (50) \quad -\sum_{i,j=1}^{q} K_{ij} \sum_{k=1}^{q} P_{ik} \frac{\partial}{\partial {x'}_k} \left(\sum_{l=1}^{q} P_{jl} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial {x'}_l} \right) = \tilde{f}$$

soit, en se servant du fait que les coefficients de $\mathbf{P}$ sont constants :

$$(51) \quad -\sum_{i,j,k,l=1}^{q} P_{ik}\ P_{jl}\ K_{ij}\ \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial {x'}_k\, \partial {x'}_l} = \tilde{f}$$

soit encore, en permutant les indices muets i et k ainsi que j et l :

$$(52) \quad -\sum_{i,j,k,l=1}^{q} P_{ki}\ P_{lj}\ K_{kl}\ \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial {x'}_i\, \partial {x'}_j} = \tilde{f}$$

Or, d'après (47), $\sum_{k,l} P_{ki}\ K_{kl}\ P_{lj} = \lambda_i\, \delta_{ij}$. On en déduit donc que :

$$(52) \Leftrightarrow -\sum_{i,j=1}^{q} \lambda_i\ \delta_{ij}\ \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial {x'}_i\, \partial {x'}_j} = \tilde{f} \Leftrightarrow -\sum_{i=1}^{q} \lambda_i\ \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial {x'}_i^{\,2}} = \tilde{f}$$

ce qui est l'équation (46).

□

6. Généralisation – Notion d'EDP elliptique

Remarque : en posant $x''_i = x'_i/\sqrt{\lambda_i}$ et $\hat{u}(\mathbf{x}'') = \tilde{u}(\mathbf{x}')$, $\hat{f}(\mathbf{x}'') = \tilde{f}(\mathbf{x}')$, l'équation (46) est équivalente à :

$$(53) \quad -\sum_{i=1}^{q} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x''_i{}^2} = \hat{f} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad -\Delta\hat{u} = \hat{f}$$

qui n'est autre que l'équation de Poisson. On voit donc qu'à un changement de variables près, **toute équation elliptique du second ordre à coefficients constants est équivalente à l'équation de Poisson.**

- **Attention :** le domaine Ω est lui aussi transformé (rotation, puis dilatations dans les directions propres de $\mathbf{K}$). Les conditions aux limites se transforment également : une condition de Dirichlet reste une condition de Dirichlet, et une condition de flux nul $\mathbf{K}\vec{\nabla}u \cdot \vec{n} = 0$ devient une condition de Neumann homogène.
- Si $\mathbf{K}$ dépend de $\mathbf{x}$, un tel changement de variables global n'existe plus en général : c'est pourquoi on résout en pratique ces équations numériquement (différences finies, volumes finis, éléments finis).
- L'unicité de la solution de (41) avec condition de Dirichlet se démontre comme au §3, grâce à (43) (TD1, exercice 5).

Ce qu'il faut retenir

- **Modèle :** loi de comportement $\vec{q} = -\mathbf{K}\vec{\nabla}u$ + loi de conservation $\mathrm{div}(\vec{q}) = f$ ⇒ EDP elliptique ; si $\mathbf{K} = k\,\mathbf{I}$ avec k constant, on obtient l'équation de Poisson.
- **Conditions aux limites** (Dirichlet, Neumann, Robin) : elles font partie du modèle et assurent l'unicité de la solution (à une constante près dans le cas Neumann pur).
- **Outils :** formules de Green (intégrations par parties) ; principe du maximum (unicité, stabilité, positivité).
- **Solutions exactes :** formule intégrale à l'aide d'une fonction de Green (culture générale) ; développement sur les fonctions propres de $-\Delta$ ($0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \to +\infty$, base orthonormée de $L^2(\Omega)$).
- **Changement de variables :** toute équation elliptique à coefficients constants se ramène à l'équation de Poisson.

Classification des EDP linéaires du second ordre (voir chapitre 2) :

- ✓ **elliptique** : $-\Delta u = f$ (régimes stationnaires, équilibres) ;
- ✓ **parabolique** : $\partial_t u - \Delta u = f$ (diffusion : équation de la chaleur) ;
- ✓ **hyperbolique** : $\partial_t^2 u - \Delta u = f$ (propagation : équation des ondes).

Les valeurs et fonctions propres de $-\Delta$ seront réutilisées pour résoudre ces deux dernières équations.

Ressources en accès libre pour approfondir

- **MIT OpenCourseWare 18.152** – *Introduction to Partial Differential Equations* (J. Speck, 2011) : notes de cours sur les équations de Laplace et de Poisson, le principe du maximum et les fonctions de Green. https://ocw.mit.edu/courses/18-152-introduction-to-partial-differential-equations-fall-2011/

- **R. Herman** – *Introduction to Partial Differential Equations* : séries de Fourier, problèmes aux valeurs propres (Sturm-Liouville), fonctions de Green. https://math.libretexts.org/Bookshelves/Differential_Equations/Introduction_to_Partial_Differential_Equations_(Herman)

- **FreeFEM** – logiciel libre d'éléments finis ; tutoriel de résolution numérique de l'équation de Poisson. https://doc.freefem.org/tutorials/poisson.html

- **Wikipédia** – articles « Équation de Poisson » et « Fonction de Green »

Quelques ouvrages de référence pour aller encore plus loin ….

- H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, 1983.
- R. Dautray et J.-L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, tomes 1, 2 et 7, Masson, 1987.
- P.-A. Raviart et J.-M. Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, 1988.
- L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, 2e édition, American Mathematical Society, 2010 (chapitre 2 : équation de Laplace, solution fondamentale, principe du maximum, fonctions de Green).