Modélisation et Calcul Scientifique

Equations aux dérivées partielles

Chapitre 2 : Problèmes linéaires instationnaires. Equations paraboliques et hyperboliques du 2nd ordre.

Philippe Villedieu
Philippe.villedieu@insa-toulouse.fr

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Plan du chapitre

1 **Généralités**

2 **Unicité de la solution**

3 **Résolution par décomposition spectrale**

4 **Autres exemples de problèmes instationnaires**

R **Références et ressources pédagogiques**

Plan du chapitre – Section 1

1 **Généralités**

2 Unicité de la solution

3 Résolution par décomposition spectrale

4 Autres exemples de problèmes instationnaires

R Références et ressources pédagogiques

1. Généralités

- Au chapitre 1, on s'est intéressé uniquement à des EDP modélisant des phénomènes (physiques ou biologiques) qui ne dépendent pas du temps.
- Ces phénomènes sont appelés **phénomènes stationnaires**. Inversement, on parle de **phénomène instationnaire** pour un phénomène dépendant du temps.
- Lorsqu'un système part d'un certain état initial, on verra qu'il ne tend pas toujours vers un état stationnaire. Il peut notamment osciller autour d'une solution stationnaire, ou même diverger si le système est instable.
- Lorsqu'un système tend vers un état stationnaire, la phase intermédiaire pendant laquelle l'état du système varie est appelée **phase transitoire**.
- Lorsqu'elle a lieu, la convergence vers un état stationnaire est asymptotique : elle prend donc en théorie un temps infini. Toutefois, en pratique, on peut considérer que l'état stationnaire est atteint dès lors que les variations de l'état du système sont négligeables (pour un niveau de précision donné). Ce temps est fini ; il est appelé **temps de relaxation** du système.
- Dans ce cours introductif à la théorie des EDP, **on se limite au cas des problèmes linéaires scalaires**. Des exemples de **problèmes scalaires non linéaires** ou de **systèmes d'EDP linéaires et non-linéaires** seront abordés plus tard, dans la partie du cours réservée aux méthodes numériques.

1. Généralités

Dans ce deuxième chapitre, nous allons nous intéresser principalement aux EDP de la forme suivante :

$$(1)\quad \frac{\partial u}{\partial t} + Au = f \qquad (2)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au = f \qquad \text{sur }]0,+\infty[\times \Omega$$

avec :

- ✓ u une fonction de $(t,\mathbf{x}) \in [0,+\infty[\times \overline{\Omega}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, où Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$;
- ✓ A un opérateur elliptique du second ordre de la forme :

$$Au = -\mathrm{div}\left(\mathbf{K}\,\vec{\nabla} u\right) = -\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{d} K_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$$

où la matrice $\mathbf{K}$ de coefficients K_{ij} est symétrique, fonction de $\mathbf{x}$ uniquement, et **uniformément définie positive** : il existe $\alpha > 0$ tel que ${}^t\boldsymbol{\xi}\,\mathbf{K}(\mathbf{x})\,\boldsymbol{\xi} \geq \alpha\,|\boldsymbol{\xi}|^2$ pour tous $\mathbf{x} \in \Omega$ et $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$ (cf. chapitre 1, §6) ;

- ✓ f une fonction de $(t,\mathbf{x}) \in [0,+\infty[\times \Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (terme source).

L'équation (1) est d'ordre 1 en temps, l'équation (2) d'ordre 2 en temps. Lorsque u ne dépend pas de t, toutes deux se réduisent à l'équation elliptique $Au = f$ étudiée au chapitre 1 (problème stationnaire).

1. Généralités

Si $A = -k\,\Delta$ avec $k > 0$, l'équation (1) s'écrit :

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - k\,\Delta u = f$$

- (3) modélise la **diffusion de la chaleur** au sein d'un solide homogène isotrope (voir page suivante). On l'appelle **équation de la chaleur**.
- Formellement, en remplaçant $\partial/\partial t$ par τ et $\partial/\partial x_i$ par ξ_i, l'équation $\tau - k\,|\boldsymbol{\xi}|^2 = C$ est celle d'un **paraboloïde** de $\mathbb{R}^{d+1}$, d'où la dénomination « **équation parabolique** » pour les EDP de type (1).

Si $A = -c^2\,\Delta$ avec $c > 0$, l'équation (2) s'écrit :

$$(4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\,\Delta u = f$$

- (4) modélise la **propagation d'une onde** au sein d'un milieu homogène isotrope (corde ou membrane vibrante, acoustique…). On l'appelle **équation des ondes** (c désigne la vitesse des ondes).
- De même, l'équation $\tau^2 - c^2\,|\boldsymbol{\xi}|^2 = C$ est celle d'un **hyperboloïde** de $\mathbb{R}^{d+1}$, d'où la dénomination « **équation hyperbolique** » pour les EDP de type (2).

1. Généralités

Établissement de l'équation de la chaleur. Comme au chapitre 1, on combine une loi de conservation et une loi de comportement. Soit $\omega \subset \Omega$ un volume de contrôle quelconque, ρ la masse volumique et c_p la capacité thermique massique du solide :

- **Bilan d'énergie** sur ω : le taux de variation de l'énergie interne est égale à la puissance produite dans ω moins le flux sortant,

$$\frac{d}{dt}\int_\omega \rho\ c_p\, T\, d\mathbf{x} = \int_\omega P\ d\mathbf{x} - \int_{\partial\omega} \vec{q}\cdot\vec{n}\, dS$$

  d'où, avec la formule d'Ostrogradski, $\int_\omega \left(\rho\, c_p\, \frac{\partial T}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{q}) - P\right) d\mathbf{x} = 0$ pour tout ω.

  L'intégrande étant continue, elle est nulle (sinon elle garderait un signe strict sur une petite boule ω).

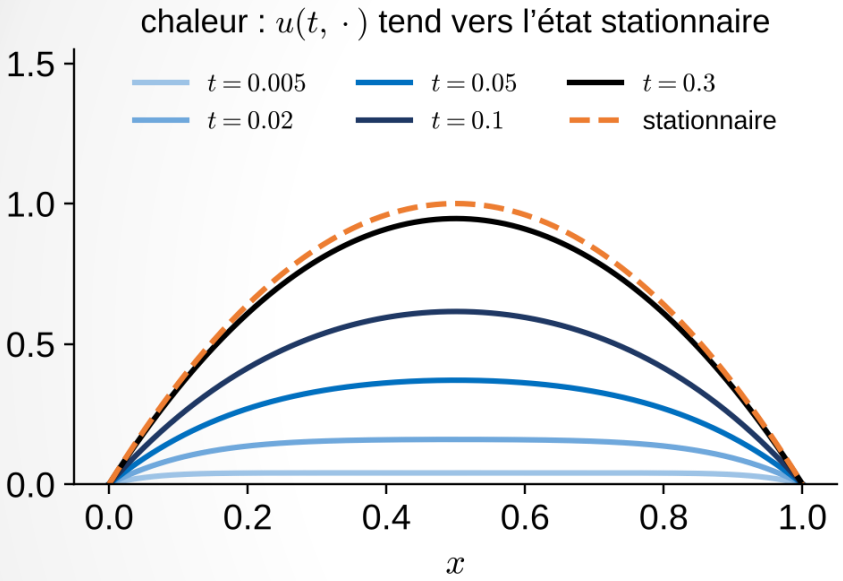
- **Loi de Fourier** : $\vec{q} = -\lambda\, \vec{\nabla} T$. Pour un solide homogène, on obtient :

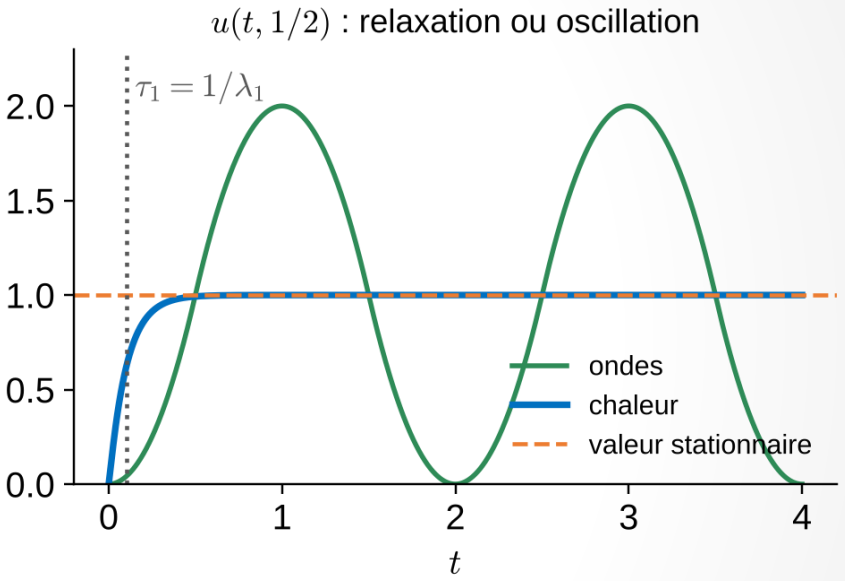
$$\frac{\partial T}{\partial t} - k\, \Delta T = \frac{P}{\rho\, c_p} \qquad \text{avec} \qquad k = \frac{\lambda}{\rho\, c_p}\ \ (\text{diffusivité thermique, en } \mathrm{m^2\ s^{-1}})$$

Ordres de grandeur de k : environ $1{,}2 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^2\ s^{-1}}$ pour l'acier, 10^{-4} pour le cuivre, 10^{-7} pour le bois ou le béton. En régime stationnaire, on retrouve l'équation de Poisson (6) du chapitre 1.

1. Généralités

- Bien que les EDP (1) et (2) se ressemblent beaucoup, on verra que les comportements en temps de leurs solutions sont **très différents**. Exemple sur $\Omega =]0,1[$, avec $f = 8$, $u = 0$ au bord, $u = 0$ (et $\partial u/\partial t = 0$) à $t = 0$:





- **Équation de la chaleur** : la solution converge vers la solution stationnaire $u_\infty(x) = 4x(1-x)$ (phase transitoire de durée caractéristique τ_1, cf. §3).
- **Équation des ondes** : la solution oscille indéfiniment autour de la solution stationnaire, sans converger vers elle.

Plan du chapitre – Section 2

1 Généralités

2 Unicité de la solution

3 Résolution par décomposition spectrale

4 Autres exemples de problèmes instationnaires

R Références et ressources pédagogiques

2. Unicité de la solution

- On vérifie immédiatement les propriétés suivantes (analogues à celles des équations différentielles linéaires) :
  - ✓ l'ensemble des solutions de l'EDP homogène ($f = 0$) forme un **espace vectoriel** ;
  - ✓ si u est une solution de l'EDP non homogène ($f \neq 0$), alors pour toute fonction v solution de l'EDP homogène, $u + v$ est également solution de l'EDP non homogène.
- Les EDP (1) et (2) possèdent donc une infinité de solutions. **Pour avoir unicité de la solution, il faut imposer des conditions supplémentaires, appelées conditions initiales** (en $t = 0$) **et aux limites** (pour $\mathbf{x} \in \partial\Omega$).
- Comme pour les EDO, **le nombre de conditions initiales à imposer est égal à l'ordre de l'EDP par rapport à la variable t.**

2. Unicité de la solution

- Pour les EDP du type (1), on impose donc une condition initiale de la forme :

$$(5) \quad u(0,\cdot) = u_0(\cdot) \ \text{ sur } \Omega$$

où u_0 est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.

- Alors que pour les EDP du type (2), on impose des conditions initiales de la forme :

$$(6) \quad u(0,\cdot) = u_0(\cdot) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0,\cdot) = u_1(\cdot) \ \text{ sur } \Omega$$

où u_0 et u_1 sont des fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$ (position et vitesse initiales, pour une corde vibrante par exemple).

- Pour ce qui est des conditions aux limites, les conditions à imposer sont analogues à celles du problème stationnaire (de type Dirichlet, Neumann, Fourier-Robin…), mais les données peuvent dépendre du temps : par exemple $u(t,\mathbf{x}) = g_D(t,\mathbf{x})$ pour $\mathbf{x} \in \Gamma_D$.

Compatibilité. Pour que la solution soit continue jusqu'en $t = 0$ sur le bord, les données doivent être compatibles : par exemple, avec une condition de Dirichlet, $u_0(\mathbf{x}) = g_D(0,\mathbf{x})$ pour $\mathbf{x} \in \Gamma_D$. Avec des données incompatibles (choc thermique), la solution n'est pas continue au voisinage du bord en $t = 0$.

2. Unicité de la solution

Nous admettrons que, si Ω est un ouvert borné régulier, si f est régulière sur $[0,+\infty[\times\overline{\Omega}$ et si les données initiales et aux limites sont régulières et compatibles, les problèmes associés aux équations (1) et (2) possèdent une **unique** solution régulière sur $[0,+\infty[\times\overline{\Omega}$.

À titre d'exemple, nous allons démontrer l'**unicité** de la solution de l'équation de la chaleur 1D ($D>0$) :

$$\frac{\partial u}{\partial t}-D\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f \qquad \text{pour } t\in\,]0,+\infty[,\ x\in\,]0,1[$$

avec pour conditions aux limites $u(t,0)=u_l(t)$, $u(t,1)=u_r(t)$ et pour condition initiale $u(0,x)=u_0(x)$.

Proposition. Ce problème possède au plus une solution de classe C^2 sur $[0,+\infty[\times[0,1]$.

Démonstration. Supposons que le problème possède deux solutions u et v de classe C^2 et posons $w=u-v$. Par linéarité du problème, w vérifie l'EDP homogène :

$$\frac{\partial w}{\partial t}-D\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0, \qquad w(t,0)=w(t,1)=0, \qquad w(0,x)=0$$

2. Unicité de la solution

Démonstration (suite). On introduit l'**énergie** $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 w^2\,(t,x)\,dx \geq 0$.

- w et $\partial w/\partial t$ étant continues sur $[0,T]\times[0,1]$ pour tout $T>0$, on peut dériver sous le signe somme. En multipliant l'EDP par w :

$$E'(t) = \int_0^1 w\,\frac{\partial w}{\partial t}\,dx = D\int_0^1 w\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,dx$$

- Une intégration par parties donne, puisque $w(t,0) = w(t,1) = 0$:

$$E'(t) = -D\int_0^1 (\frac{\partial w}{\partial x})^2 dx + D[w\,\frac{\partial w}{\partial x}]_{x=0}^{x=1} = -D\int_0^1 (\frac{\partial w}{\partial x})^2 dx \;\leq\; 0$$

- E est donc décroissante, positive, et $E(0)=0$: ainsi $E(t)=0$ pour tout $t\geq 0$.

- Pour tout t, $x\mapsto w^2(t,x)$ est continue, positive et d'intégrale nulle : elle est identiquement nulle. Donc $w=0$, c'est-à-dire $u=v$.

□

Interprétation : l'égalité $E'(t) = -D\int(\partial w/\partial x)^2 dx \leq 0$ traduit le caractère **dissipatif** de l'équation de la chaleur. Le même calcul montre que, pour $f=0$ et des conditions de Dirichlet homogènes, $\|\,u(t,\cdot)\,\|_{L^2} \leq \|\,u_0\,\|_{L^2}$: la solution est **stable** par rapport à la donnée initiale (c'est-à-dire en dépend continument).

2. Unicité de la solution

Généralisation : la méthode d'énergie. La même démarche s'applique en dimension d, grâce à la formule de Green (11) du chapitre 1.

- **Équation de la chaleur** (3) avec condition de Dirichlet : pour la différence w de deux solutions, l'énergie $E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega w^2 \, d\mathbf{x}$ vérifie $E'(t) = -k\int_\Omega \left|\vec{\nabla} w\right|^2 \, d\mathbf{x} \leq 0$, d'où l'unicité (TD2, exercice 1 et TD2, execice 2 pour l'équation de convection-diffusion).

- **Équation des ondes** (4) avec condition de Dirichlet $u = g$ sur $\partial\Omega$ et conditions initiales (6) :

Proposition. Soit Ω un ouvert borné de frontière régulière. Le problème formé de l'équation des ondes (4), des conditions initiales (6) et d'une condition de Dirichlet sur $\partial\Omega$ possède **au plus une** solution de classe C^2 sur $[0, +\infty[\times \overline{\Omega}$.

Pour la différence w de deux solutions, on introduit cette fois une énergie **à deux termes** :

$$E(t) = \underbrace{\frac{1}{2}\int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 d\mathbf{x}}_{E_c(t)\,:\,\text{énergie cinétique}} + \underbrace{\frac{c^2}{2}\int_\Omega \left|\vec{\nabla} w\right|^2 d\mathbf{x}}_{E_p(t)\,:\,\text{énergie potentielle}} \geq 0$$

Pour une corde ou une membrane de masse surfacique ρ et de tension τ ($c^2 = \tau/\rho$), $\rho\, E(t)$ est exactement (à une constante multiplicative près) l'énergie mécanique : énergie cinétique du mouvement transverse plus énergie élastique due à la déformation (allongement) de la membrane.

2. Unicité de la solution

Démonstration. Soient u et v deux solutions de classe C^2 et $w = u - v$. Par linéarité, w vérifie :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2\,\Delta w = 0 \ \text{ dans }]0,+\infty[\times\Omega, \qquad w = 0 \ \text{ sur } [0,+\infty[\times\partial\Omega, \qquad w(0,\cdot) = \frac{\partial w}{\partial t}(0,\cdot) = 0$$

- **Étape 1 : dérivée de l'énergie.** w étant de classe C^2 sur $[0,T]\times\overline{\Omega}$ pour tout $T > 0$, les intégrandes de E sont de classe C^1 et on peut dériver sous le signe somme. Avec $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\left|\vec{\nabla} w\right|^2\right) = \vec{\nabla} w \cdot \vec{\nabla}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)$ (théorème de Schwarz) :

$$E'(t) = \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,d\mathbf{x} + c^2\int_\Omega \vec{\nabla} w \cdot \vec{\nabla}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) d\mathbf{x}$$

- **Étape 2 : formule de Green.** On applique (11) du chapitre 1 à $w(t,\cdot)$ (de classe C^2) et à $\frac{\partial w}{\partial t}(t,\cdot)$ (de classe C^1, ce qui suffit) :

$$\int_\Omega \vec{\nabla} w \cdot \vec{\nabla}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) d\mathbf{x} = -\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial t}\,\Delta w\,d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial n}\,dS$$

- **Étape 3 : condition aux limites.** Comme $w(t,\mathbf{x}) = 0$ pour tout $t \geq 0$ et tout $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, on a aussi $\frac{\partial w}{\partial t}(t,\mathbf{x}) = 0$ sur $\partial\Omega$: le terme de bord est nul. Il reste :

$$E'(t) = \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2\,\Delta w\right) d\mathbf{x} = 0$$

2. Unicité de la solution

Démonstration (suite).

- **Étape 4 : conditions initiales.** E est donc constante. Or $w(0,\cdot) = 0$ sur $\overline{\Omega}$, donc $\vec{\nabla} w(0,\cdot) = \vec{0}$, et $\frac{\partial w}{\partial t}(0,\cdot) = 0$: ainsi $E(t) = E(0) = 0$ pour tout $t \geq 0$.
- **Étape 5 : conclusion.** E_c et E_p sont positives et de somme nulle, donc toutes deux nulles. En particulier, $(\frac{\partial w}{\partial t})^2$ est continue, positive et d'intégrale nulle : $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$ sur $[0, +\infty[\times \overline{\Omega}$. Donc $w(t, \mathbf{x}) = w(0, \mathbf{x}) = 0$, c'est-à-dire $u = v$.

□

Remarque (conservation de l'énergie). Le même calcul, appliqué directement à une solution u de (4) avec $f = 0$ et $u = 0$ sur $\partial\Omega$, montre que **l'énergie est conservée** (les ondes ne s'amortissent pas) :

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + c^2 \left|\vec{\nabla} u\right|^2\right](t, \mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[u_1^2 + c^2 \left|\vec{\nabla} u_0\right|^2\right] d\mathbf{x} \qquad \text{pour tout } t \geq 0$$

Ce résultat démontre également la dépendance continue de la solution (pour une certaine norme) par rapport aux données initiales.

2. Unicité de la solution

Remarque : pourquoi l'énergie associée à l'équation des ondes comporte-t-elle deux termes et non pas un seul comme dans le cas de l'équation de la chaleur ?

- ✓ **Chaleur (ordre 1 en temps)** : on multiplie l'EDP par w. Le terme $w\,\partial_t w = \frac{1}{2}\partial_t(w^2)$ est une dérivée exacte en temps et le terme spatial donne après intégration par partie $-k\int_\Omega \left|\vec{\nabla} w\right|^2 \, d\mathbf{x}$ qui est négatif ce qui prouve la décroissance de l'énergie. Une seule quantité, $\frac{1}{2}\int_\Omega w^2$, suffit.
- ✓ **Ondes (ordre 2 en temps)** : multiplier par w ne fonctionne plus, car $w\,\partial_t^2 w$ n'est pas une dérivée exacte en temps. Par contre, si on multiplie par la **vitesse** $\partial_t w$ alors $\partial_t w\,\partial_t^2 w = \frac{1}{2}\partial_t\left((\partial_t w)^2\right)$ donne l'énergie cinétique, et le terme spatial devient lui aussi, après multiplication par $\partial_t w$ et intégration par parties, une dérivée exacte en temps, $\frac{c^2}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left|\vec{\nabla} w\right|^2 \, d\mathbf{x}$ correspondant à l'énergie potentielle. Il n'apparaît par contre aucun terme négatif correspondant à une dissipation d'énergie.
- ✓ E_c et E_p ne sont pas conservées séparément : elles s'échangent en permanence (comme pour un pendule), seule leur somme est constante.
- ✓ C'est l'analogue des EDO : pour $y' + \lambda y = 0$, on suit $E = \frac{1}{2}y^2$, qui décroît ; pour l'oscillateur $y'' + \omega^2 y = 0$, On suit $E = \frac{1}{2}y'^2 + \frac{1}{2}\omega^2 y^2$ (somme de deux termes), qui est conservée.

À retenir : Pour l'équation de la chaleur, l'énergie se dissipe (comportement irréversible), pour l'équation des ondes, elle se **conserve** (comportement réversible). Le cas de la corde vibrante est traité en détail dans le TD2, exercice 3.

Plan du chapitre – Section 3

1 Généralités

2 Unicité de la solution

3 Résolution par décomposition spectrale

4 Autres exemples de problèmes instationnaires

R Références et ressources pédagogiques

3. Résolution par décomposition spectrale

Avant de résoudre le problème général, commençons par la recherche de solutions particulières très simples. Si les conditions aux limites sont homogènes et si $f = 0$, on peut chercher des solutions particulières de (1) ou de (2) dites **à variables séparées**, c'est-à-dire de la forme :

$$u(t, \mathbf{x}) = v(\mathbf{x})\, w(t) \qquad \text{avec } v \text{ et } w \text{ non identiquement nulles}$$

- En injectant cette expression dans (1), on trouve : $v(\mathbf{x})\, w'(t) + w(t)\, Av(\mathbf{x}) = 0$ pour tous t et $\mathbf{x}$.
- Choisissons t_0 tel que $w(t_0) \neq 0$. Alors $Av = \lambda\, v$ avec $\lambda = -w'(t_0)/w(t_0)$, **constante**. En reportant, $v(\mathbf{x})\big(w'(t) + \lambda\, w(t)\big) = 0$, et en choisissant $\mathbf{x}_0$ tel que $v(\mathbf{x}_0) \neq 0$: $w' + \lambda\, w = 0$.
- De même, en injectant dans (2) : $Av = \lambda\, v$ et $w'' + \lambda\, w = 0$.
- Enfin, u vérifiant les conditions aux limites homogènes pour tout t, v les vérifie aussi.

Conclusion : v doit nécessairement être une **fonction propre de l'opérateur** A pour les conditions aux limites du problème considéré, et λ la valeur propre associée.

Comme pour $-\Delta$ (chapitre 1, théorèmes 1 et 2), on admettra que, $\mathbf{K}$ étant symétrique et uniformément définie positive, et Ω borné, les valeurs propres de A avec conditions de Dirichlet sont **réelles et strictement positives** ($0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \to +\infty$) et que l'on peut choisir les fonctions propres ϕ_k de façon à former une **base orthonormée** de $L^2(\Omega)$.

3. Résolution par décomposition spectrale

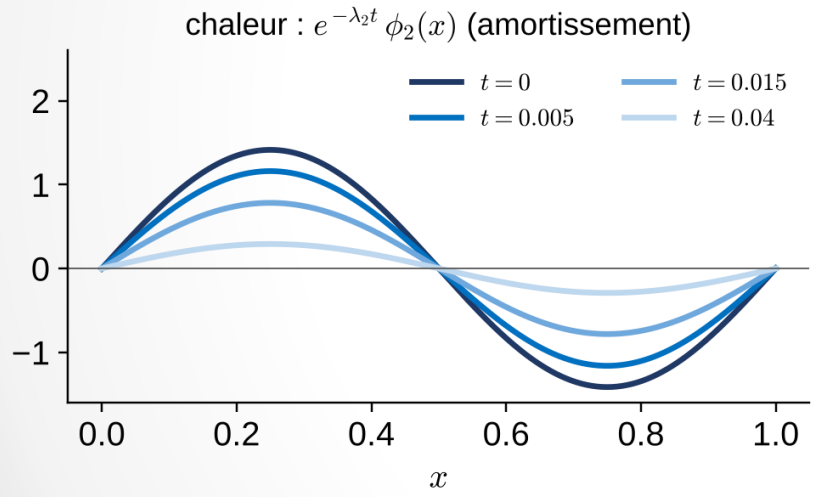
La fonction w doit quant à elle vérifier une **équation différentielle linéaire, du 1er ou du 2nd ordre**, selon qu'il s'agit du problème (1) (type équation de la chaleur) ou du problème (2) (type équation des ondes). Comme $\lambda > 0$, on pose $\lambda = \omega^2$ pour le problème (2) :

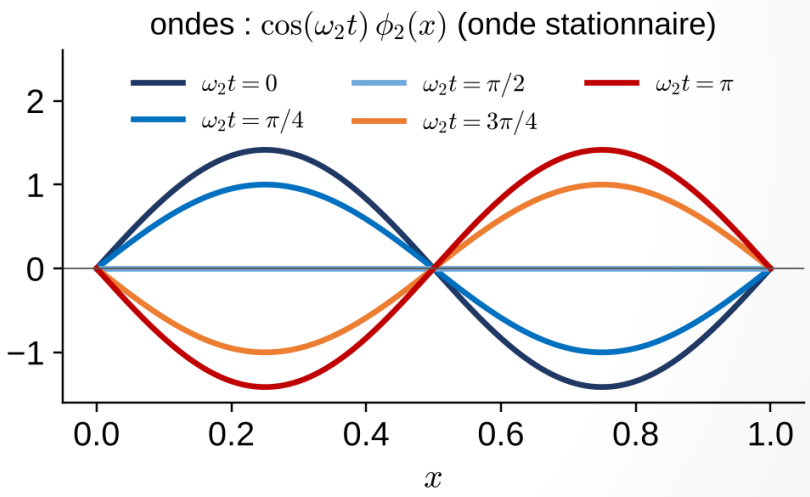
Problème (1)

$$w' + \lambda w = 0$$
$$w(t) = w_0\, e^{-\lambda t}$$

Problème (2)

$$w'' + \omega^2 w = 0$$
$$w(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$





On note une différence radicale du comportement en temps : **solutions amorties exponentiellement pour (1)** et **solutions oscillantes, appelées ondes stationnaires, pour (2)**. Les nœuds de l'onde stationnaire (points où $\phi_k = 0$) restent immobiles.

3. Résolution par décomposition spectrale

Nous allons maintenant montrer comment résoudre les deux problèmes suivants, si Ω est un **ouvert borné régulier** de $\mathbb{R}^d$ et f une fonction régulière de $[0,+\infty[\times\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}$:

Problème (P1) : l'équation (1) sur $]0,+\infty[\times\Omega$, la condition initiale (5) et la condition aux limites

$$(7)\quad u=0 \text{ sur } [0,+\infty[\times\partial\Omega$$

Problème (P2) : l'équation (2) sur $]0,+\infty[\times\Omega$, les conditions initiales (6) et la condition aux limites (7).

L'idée de la méthode de décomposition spectrale consiste à chercher dans les deux cas la solution sous la forme :

$$(8)\quad u(t,\mathbf{x})=\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t)\,\phi_k(\mathbf{x})$$

où les ϕ_k sont les fonctions propres (réelles, orthonormées) associées à l'opérateur A et à la condition aux limites sur $\partial\Omega$:

$$(9)\quad A\phi_k=\lambda_k\phi_k \text{ dans } \Omega \qquad \phi_k=0 \text{ sur } \partial\Omega$$

Autrement dit, $u_k(t)=(u(t,\cdot)|\phi_k)_{L^2}$ est la coordonnée de $u(t,\cdot)$ dans la base (ϕ_k). On note de même $f_k(t)=(f(t,\cdot)|\phi_k)_{L^2}$, $u_{0k}=(u_0|\phi_k)_{L^2}$ et $u_{1k}=(u_1|\phi_k)_{L^2}$.

3. Résolution par décomposition spectrale

Proposition. Si u est une solution régulière de (P1), ses coordonnées $u_k(t)$ vérifient, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$(10) \qquad \frac{du_k}{dt}(t) + \lambda_k\, u_k(t) = f_k(t), \qquad u_k(0) = u_{0k}$$

Preuve. En dérivant sous le signe somme (u et $\partial u/\partial t$ continues sur $[0,T]\times\overline{\Omega}$), puis en utilisant l'équation (1) :

$$u_k{}'(t) = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(t,\mathbf{x})\,\phi_k(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = (f(t,\cdot)|\phi_k)_{L^2} - (Au(t,\cdot)|\phi_k)_{L^2}$$

Comme $u(t,\cdot)$ et ϕ_k sont nulles sur $\partial\Omega$, l'opérateur A est **auto-adjoint** (formule de Green généralisée, $\mathbf{K}$ étant symétrique) :

$$(Au|\phi_k)_{L^2} = \int_\Omega \mathbf{K}\,\vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}\phi_k\,d\mathbf{x} = (u|A\phi_k)_{L^2} = \lambda_k\,(u|\phi_k)_{L^2} = \lambda_k\,u_k(t)$$

d'où (10). La condition initiale découle de (5).

□

Remarque (calcul formel). On obtient le même résultat en injectant (8) dans (1) « comme si la somme était finie » : $\sum_k (u_k{}' + \lambda_k u_k - f_k)\,\phi_k = 0$, puis en utilisant le fait que les ϕ_k forment une base. L'argument ci-dessus évite de permuter $\sum$ et les dérivées.

3. Résolution par décomposition spectrale

Cas du problème (P2). Le même raisonnement, appliqué cette fois à $u_k''(t) = \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\phi_k\,d\mathbf{x}$, donne, en posant $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$:

$$(11) \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{d^2 u_k}{dt^2}(t) + \omega_k^2\, u_k(t) = f_k(t), \qquad u_k(0) = u_{0k}, \quad u_k'(0) = u_{1k}$$

Conclusion :

- Dans les deux cas, la résolution du problème se ramène à la résolution d'un système d'une infinité d'**équations différentielles linéaires indépendantes** (découplées) par rapport à la variable t.
- Comme dans le cas des solutions à variables séparées, les équations différentielles obtenues sont du 1er ordre pour l'équation (1) et du 2nd ordre pour l'équation (2).
- Chaque mode ϕ_k évolue indépendamment des autres : c'est tout l'intérêt de la base des fonctions propres (analogue de la diagonalisation d'une matrice pour un système d'EDO).

3. Résolution par décomposition spectrale

Solution du problème (P1). La solution de (10) a pour expression (méthode de variation de la constante) :

$$(12) \quad u_k(t) = u_{0k}\, e^{-\lambda_k t} + \int_0^t e^{-\lambda_k (t-s)}\, f_k(s)\, ds$$

Si les f_k ne dépendent pas du temps (c'est-à-dire si f est fonction de $\mathbf{x}$ seulement), (12) entraîne :

$$(13) \quad u_k(t) = u_{0k}\, e^{-\lambda_k t} + \frac{f_k}{\lambda_k}\left(1 - e^{-\lambda_k t}\right)$$

Les λ_k étant tous strictement positifs, $u_k(t) \to f_k/\lambda_k$ lorsque $t \to +\infty$, et donc

$$u(t,\cdot) \;\to\; u_\infty = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f_k}{\lambda_k}\, \phi_k$$

qui n'est autre que la **solution du problème stationnaire** $Au_\infty = f$, $u_\infty = 0$ sur $\partial\Omega$ (chapitre 1, §5).

3. Résolution par décomposition spectrale

Proposition (convergence exponentielle). Si f ne dépend pas du temps :

$$\| u(t,\cdot) - u_\infty \|_{L^2} \leq e^{-\lambda_1 t} \| u_0 - u_\infty \|_{L^2} \qquad \text{pour tout } t \geq 0$$

Preuve. D'après (13), $u_k(t) - u_{\infty k} = u_k(t) - \frac{f_k}{\lambda_k} = \left(u_{0k} - \frac{f_k}{\lambda_k}\right) e^{-\lambda_k t}$, et $e^{-\lambda_k t} \leq e^{-\lambda_1 t}$ car $\lambda_k \geq \lambda_1$. On conclut avec l'égalité de Parseval $\| v \|_{L^2}^2 = \sum_k (v|\phi_k)^2$ (conséquence de la propriété de base orthonormée) :

$$\| u(t,\cdot) - u_\infty \|_{L^2}^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(u_{0k} - \frac{f_k}{\lambda_k}\right)^2 e^{-2\lambda_k t} \leq e^{-2\lambda_1 t} \| u_0 - u_\infty \|_{L^2}^2$$

□

- La vitesse de convergence vers la solution stationnaire est donc gouvernée par la **plus petite valeur propre** λ_1 : plus λ_1 est grande, plus la convergence est rapide.
- Les valeurs propres de A ayant la dimension de l'inverse d'un temps, on peut interpréter physiquement $\tau_1 = 1/\lambda_1$ comme le **temps de relaxation** du système vers la solution stationnaire.
- La stricte positivité des valeurs propres de l'opérateur A joue un rôle essentiel pour la convergence de la série (8) et pour la convergence vers une solution stationnaire.

3. Résolution par décomposition spectrale

Exemple : barre de longueur L ($A = -k\, d^2/dx^2$, conditions de Dirichlet). D'après le chapitre 1 (exemple 1D), les valeurs propres sont $\lambda_n = k\,(n\pi/L)^2$, d'où :

$$\tau_1 = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{L^2}{\pi^2\, k}$$

- **Le temps de relaxation croît comme le carré de la taille du système** : doubler la longueur multiplie par 4 le temps nécessaire pour atteindre le régime stationnaire.
- Pour une barre d'acier ($k \approx 1{,}2 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^2\,s^{-1}}$) de longueur $L = 1$ m : $\tau_1 \approx 8\,400$ s, soit environ 2 h 20 min. Pour $L = 10$ cm : $\tau_1 \approx 84$ s.
- Le mode n décroît comme $e^{-\lambda_n t} = e^{-n^2 t/\tau_1}$: les modes de haute fréquence (variations spatiales rapides) disparaissent beaucoup plus vite que le premier. C'est l'**effet régularisant** de l'équation de la chaleur.

Conséquence pratique pour le numéricien : Au niveau discret, l'échelle de temps caractéristique pour que la chaleur se propage d'une cellule à sa voisine est donc de l'ordre de $\frac{h^2}{k}$ ou h correspond à la taille caractéristique d'une cellule. On verra que cette échelle de temps joue un rôle important sur la stabilité des méthodes numériques pour la résolution de l'équation de la chaleur et conditionne en particulier le choix entre méthode explicite et méthode implicite.

3. Résolution par décomposition spectrale

Solution du problème (P2). La solution de (11) associée aux conditions initiales $u_k(0) = u_{0k}$ et $u_k{}'(0) = u_{1k}$ a pour expression :

$$(14) \quad u_k(t) = u_{0k}\cos(\omega_k t) + \frac{u_{1k}}{\omega_k}\sin(\omega_k t) + \int_0^t \frac{\sin\big(\omega_k(t-s)\big)}{\omega_k} f_k(s)\, ds$$

Si les f_k ne dépendent pas du temps, (14) entraîne :

$$(15) \quad u_k(t) = u_{0k}\cos(\omega_k t) + \frac{u_{1k}}{\omega_k}\sin(\omega_k t) + \frac{f_k}{\omega_k^2}\big(1 - \cos(\omega_k t)\big)$$

On constate cette fois qu'il n'existe pas de limite stationnaire : **chaque coefficient u_k est une fonction périodique de pulsation** ω_k, qui oscille autour de $f_k/\omega_k^2 = f_k/\lambda_k$ (coordonnée de la solution stationnaire). La solution u est une superposition d'ondes stationnaires de pulsations ω_k (les **pulsations propres** du système) ; elle n'est pas périodique en général, sauf si les ω_k sont commensurables (cas 1D).

3. Résolution par décomposition spectrale

Cas particulier important (résonnance) : si $f_k(t)$ est une fonction sinusoïdale de pulsation ω_k, de la forme $f_k(t) = F_k \sin(\omega_k t)$

On déduit de (14) que :

$$u_k(t) = u_{0k}\cos(\omega_k t) + \frac{u_{1k}}{\omega_k}\sin(\omega_k t) + \frac{F_k}{\omega_k}\int_0^t \sin\big(\omega_k(t-s)\big)\sin(\omega_k s)\,ds$$

soit encore, avec $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$:

$$u_k(t) = u_{0k}\cos(\omega_k t) + \frac{u_{1k}}{\omega_k}\sin(\omega_k t) + \frac{F_k}{2\,\omega_k}\int_0^t [\cos(\omega_k t - 2\omega_k s) - \cos(\omega_k t)]\,ds$$

D'où finalement, puisque $\int_0^t \cos\big(\omega_k(t-2s)\big)\,ds = [-\frac{\sin(\omega_k(t-2s))}{2\,\omega_k}]_{s=0}^{s=t} = \frac{\sin(\omega_k t)}{\omega_k}$, et : $\int_0^t \cos(\omega_k t)\,ds = t\cos(\omega_k t)$:

$$\boxed{u_k(t) = u_{0k}\cos(\omega_k t) + \frac{u_{1k}}{\omega_k}\sin(\omega_k t) + \frac{F_k}{2\,\omega_k^2}\sin(\omega_k t) - \frac{F_k}{2\,\omega_k}\,t\cos(\omega_k t)}$$

3. Résolution par décomposition spectrale

- On voit que l'amplitude du dernier terme, $\frac{F_k}{2\,\omega_k}\,t$, tend vers $+\infty$ lorsque $t \to +\infty$. Ce phénomène est appelé **résonance**. Il correspond à un transfert d'énergie entre une source externe (dont l'action est modélisée par le second membre f) et le k-ième mode du système. C'est un phénomène que l'on rencontre dans de très nombreux systèmes physiques (en acoustique, en mécanique des structures, en électromagnétisme…).

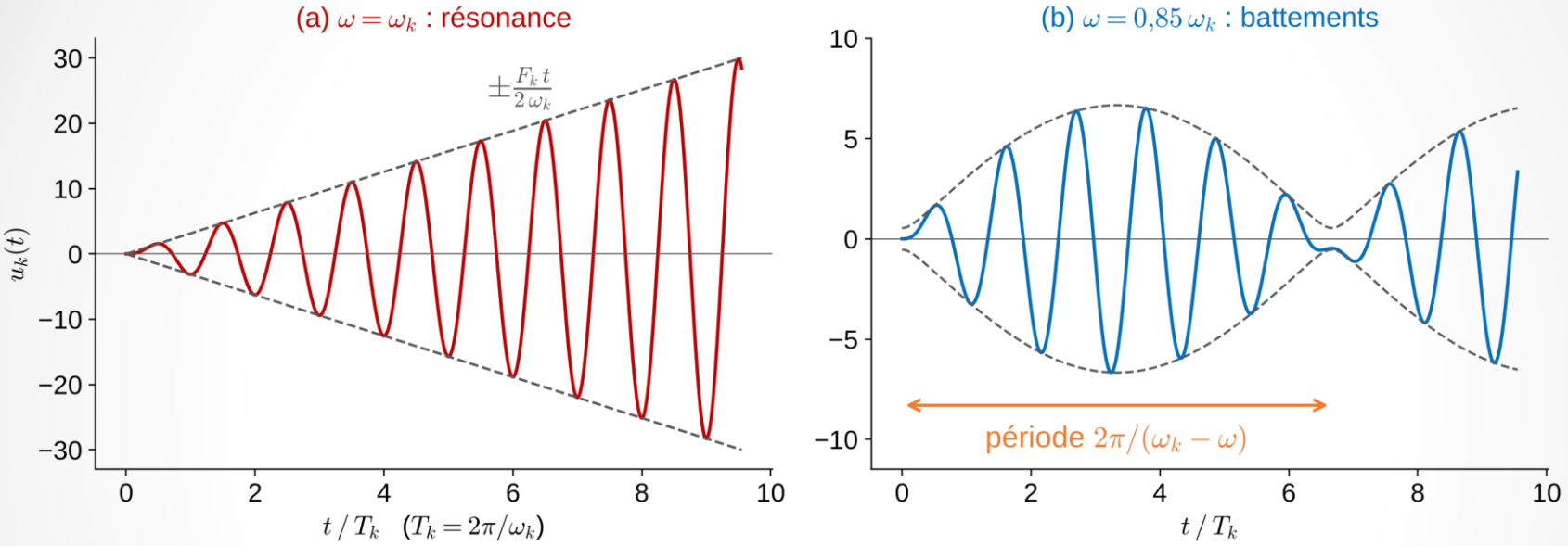
- Dans un système réel, il existe toujours des mécanismes dissipatifs qui font que l'amplitude ne croît pas indéfiniment. Il n'en demeure pas moins que la résonance peut conduire à de très fortes oscillations : il faut donc éviter d'« exciter » un système à une fréquence proche de l'une de ses fréquences propres.

- Si la pulsation d'excitation ω est différente de la pulsation propre ω_k, la solution $u_k(t)$ correspondant au mode k a pour expression : $u_k(t) = \frac{F_k}{\omega_k^2-\omega^2}\left(\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_k}\sin(\omega_k t)\right)$ (pour $u_{0k} = u_{1k} = 0$). L'amplitude reste bornée (proportionnelle à $1/\left|\omega_k^2 - \omega^2\right|$) et présente des **battements** lorsque ω est proche de ω_k (voire figure de la page suivante)

Application en génie civil et en ingénierie mécanique: le calcul des premières fréquences propres $\omega_k/2\pi$ d'une structure (analyse modale effectuée souvent par éléments finis) est une étape systématique de la conception de ponts, bâtiments, machines tournantes, structures d'avion … pour éviter tout risque de résonnance.

3. Résolution par décomposition spectrale

Réponse d'un mode k initialement au repos à une excitation sinusoïdale $f_k(t) = F_k sin(\omega t)$



- **(a) Résonance ($\omega = \omega_k$).** L'amplitude croît **linéairement** en temps, entre les droites $\pm F_k\, t/(2\,\omega_k)$: la force reste en phase avec la vitesse du mode et lui fournit de l'énergie à chaque période.
- **(b) Battements (ω proche de ω_k).** La solution, $u_k(t) = \frac{F_k}{\omega_k^2 - \omega^2}\left(\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_k}\sin(\omega_k t)\right)$, reste **bornée**. L'excitation et le mode se déphasent lentement : l'énergie est fournie puis reprise, avec la période $2\pi/(\omega_k - \omega)$; plus ω est proche de ω_k, plus les battements sont lents et amples.

Plan du chapitre – Section 4

1 Généralités

2 Unicité de la solution

3 Résolution par décomposition spectrale

4 **Autres exemples de problèmes instationnaires**

R Références et ressources pédagogiques

4. Autres exemples de problèmes instationnaires

- Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des EDP du second ordre mais, dans de nombreux problèmes de physique ou de biologie, on peut également rencontrer des EDP (ou des systèmes d'EDP) ne contenant que des termes du premier ordre.
- L'exemple le plus simple parmi les EDP de ce type est l'équation suivante, où a est une constante réelle :

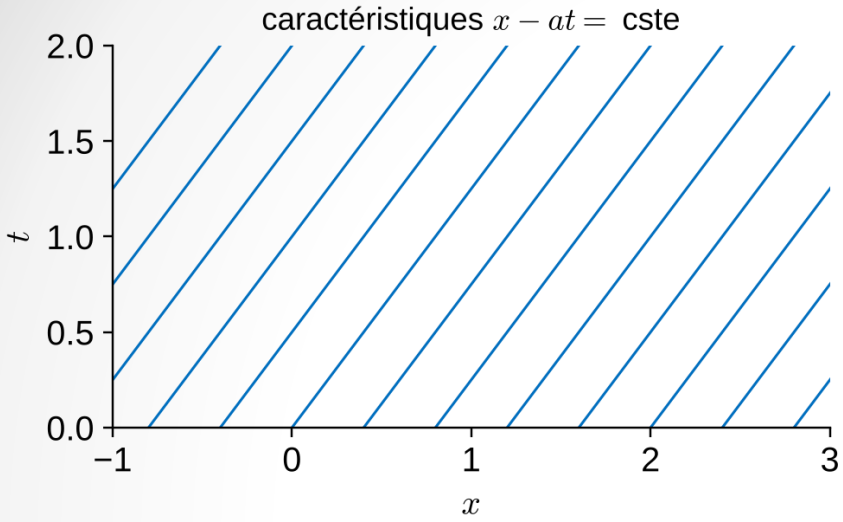
$$(16) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + a\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{sur }]0,+\infty[\times\mathbb{R}, \qquad u(0,x) = u_0(x)$$

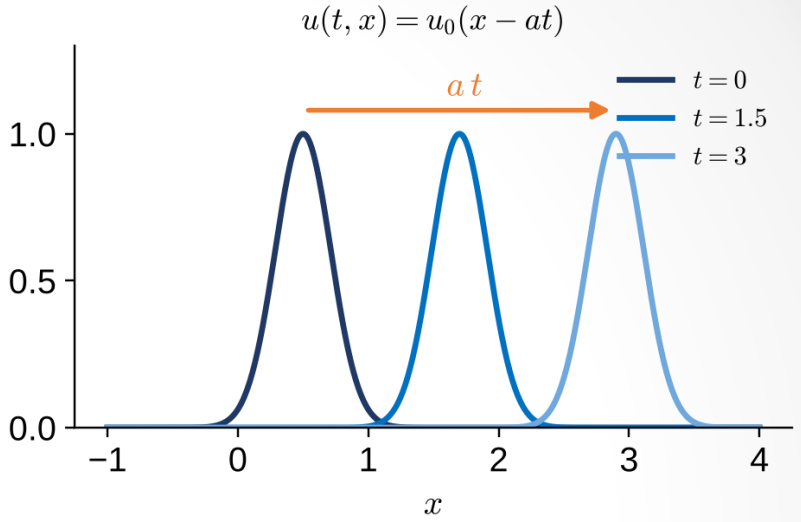
Proposition. Si $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, le problème (16) possède une unique solution de classe C^1 sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}$, donnée par :

$$(17) \quad u(t,x) = u_0(x-at)$$

Preuve. (17) est solution : $\partial_t u = -a\,u_0{}'(x-at)$ et $\partial_x u = u_0{}'(x-at)$. Unicité : si u est une solution C^1, pour x_0 fixé, la fonction $g(t) = u(t, x_0 + at)$ vérifie $g'(t) = \partial_t u + a\,\partial_x u = 0$. Donc $u(t, x_0 + at) = g(0) = u_0(x_0)$, c'est-à-dire $u(t,x) = u_0(x-at)$. □

4. Autres exemples de problèmes instationnaires





- La solution est **constante le long des droites caractéristiques** $x - at =$ cste : la condition initiale est translatée de at. Cette EDP modélise donc le transport, à la vitesse a le long de l'axe des x, d'une grandeur représentée par le champ $u(t,x)$.
- Contrairement à l'équation de la chaleur, l'équation de transport n'a pas d'effet régularisant : si u_0 présente une discontinuité, elle est transportée telle quelle (on parle alors de solution au sens « faible », notion qui sera traitée dans l'UF consacrée à la méthode des éléments finis).

4. Autres exemples de problèmes instationnaires

Unicité par la méthode d'énergie. La méthode du §2 s'applique aussi à l'équation de transport (16).

Proposition. Soient u et v deux solutions de classe C^1 de (16), nulles pour $|x|$ grand (c'est-à-dire telles que pour tout $T > 0$, il existe $R > 0$ tel que $u(t,x) = v(t,x) = 0$ pour $|x| \geq R$ et $t \in [0,T]$). Alors $u = v$.

Démonstration. $w = u - v$ vérifie $\frac{\partial w}{\partial t} + a\,\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ et $w(0,\cdot) = 0$. On pose $E(t) = \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} w^2\,(t,x)\,dx \left(= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} w^2\,dx\right)$.

- En multipliant l'EDP par w : $w\,\frac{\partial w}{\partial t} + a\,w\,\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial (w^2)}{\partial t} + \frac{a}{2}\,\frac{\partial (w^2)}{\partial x} = 0$.
- w et $\partial w/\partial t$ étant continues sur $[0,T] \times [-R,R]$, on peut dériver sous le signe somme :

$$E'(t) = \int_{-R}^{R} w\,\frac{\partial w}{\partial t}\,dx = -\frac{a}{2}\int_{-R}^{R} \frac{\partial (w^2)}{\partial x}\,dx = -\frac{a}{2}\left[w^2(t,R) - w^2(t,-R)\right] = 0$$

- E est donc constante et $E(0) = 0$, d'où $E(t) = 0$: $w^2(t,\cdot)$ est continue, positive et d'intégrale nulle, donc $w = 0$.

□

4. Autres exemples de problèmes instationnaires

Remarques la démonstration d'unicité par la méthode d'énergie.

- ✓ Comme pour l'équation des ondes, l'énergie est **conservée** : il n'y a pas de terme dissipatif, l'équation est réversible.
- ✓ Contrairement à l'équation des ondes, l'énergie ne comporte qu'un seul terme car l'équation est d'ordre 1 en temps.
- ✓ Contrairement à l'équation de la chaleur, le terme spatial ne donne pas une intégrale de signe fixé mais un **terme de bord** : sur un intervalle fixe $[-R,R]$, $E'(t) = \frac{a}{2}(w^2(t,-R) - w^2)(t,R)$; l'énergie entre par une extrémité et sort par l'autre.
- ✓ **Sans l'hypothèse « nulle pour $|x|$ grand » il suffit de considérer l'énergie associée à un intervalle qui se déplace à la vitesse** a, $[\alpha + at, \beta + at]$, au lieu d'un intervalle fixe $[-R,R]$. En utilisant la formule de dérivation d'une intégrale à bornes variables, on obtient :

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\alpha+at}^{\beta+at} w^2\ dx \ \Rightarrow\ E'(t) = \frac{a}{2}[w^2]_{x=\alpha+at}^{x=\beta+at} + \int_{\alpha+at}^{\beta+at} w\,\frac{\partial w}{\partial t}\,dx$$

$$= \frac{a}{2}[w^2]_{\alpha+at}^{\beta+at} - \frac{a}{2}[w^2]_{\alpha+at}^{\beta+at} = 0 \qquad \left(\text{car } w\,\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{a}{2}\,\frac{\partial(w^2)}{\partial x}\right)$$

Les flux entrant et sortant se compensent exactement : $E(t) = E(0) = 0$, donc $w = 0$ sur $[\alpha + at, \beta + at]$, et ce pour tout couple (α, β) avec $\alpha < \beta$. Donc $w = 0$ partout. Voir aussi TD2, exercice 2 (équation de convection-diffusion).

4. Autres exemples de problèmes instationnaires

- En dimension $d > 1$, la généralisation de l'équation (16) s'écrit :

$$(18) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} u = 0 \quad \text{sur }]0, +\infty[\times \mathbb{R}^d$$

avec $\vec{V} = (V_1, \dots, V_d)$ un vecteur constant. Sa solution a pour expression (même preuve, le long des droites $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \vec{V}\, t$) :

$$(19) \quad u(t, \mathbf{x}) = u_0(x_1 - V_1 t, \dots, x_d - V_d t) = u_0\left(\mathbf{x} - \vec{V}\, t\right)$$

où u_0 désigne la condition initiale.

- On peut généraliser encore plus le problème et considérer le transport par un champ de vecteurs $\vec{V}(t, \mathbf{x})$ dépendant du temps et des variables d'espace, comme par exemple dans le cas du transport d'un polluant par un fluide. On obtient toujours l'EDP (18), mais avec cette fois $\vec{V}$ fonction de t et $\mathbf{x}$.

- Si $\vec{V}$ est le champ de vitesse associé à un écoulement de fluide incompressible, on peut montrer que $\vec{V}$ vérifie l'équation :

$$(20) \quad \operatorname{div}\left(\vec{V}\right) = 0$$

Comme $\operatorname{div}\left(u\, \vec{V}\right) = \vec{V} \cdot \vec{\nabla} u + u \operatorname{div}\left(\vec{V}\right)$, on obtient en combinant (20) avec (18) l'équation suivante, équivalente à (18) :

$$(21) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}\left(u\, \vec{V}\right) = 0 \quad \text{sur }]0, +\infty[\times \mathbb{R}^d$$

4. Autres exemples de problèmes instationnaires

- L'équation (21) est appelée **forme conservative** de l'équation (18) : elle exprime directement un bilan de la quantité u sur tout volume de contrôle, $u\vec{V}$ étant le flux convectif. On verra que c'est la forme la plus adaptée pour une résolution numérique par la méthode des volumes finis, alors que (18) est en général la forme utilisée lorsqu'on applique la méthode des différences finies.
- L'équation (18) (ou sa variante (21)) est appelée **équation linéaire de convection** (ou d'**advection**). Comme son nom l'indique, elle modélise **le transport d'une grandeur u par convection**, c'est-à-dire son entraînement par le **mouvement d'ensemble du milieu** la contenant (un fluide en général), caractérisé par le champ de vitesse $\vec{V}$.
- L'autre mode de transport couramment rencontré dans les applications est le **transport par diffusion**. Dans ce cas, le transport n'est pas associé à un mouvement d'ensemble, mais à un **mouvement aléatoire désordonné** à l'échelle moléculaire ou mésoscopique (turbulence dans un fluide par exemple).
- Si ce mouvement aléatoire ne privilégie aucune direction (milieu isotrope), son intensité peut être caractérisée par une simple grandeur scalaire (strictement positive) D, appelée **coefficient de diffusion** ou **diffusivité** du milieu, mesurée en $\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-1}$.

4. Autres exemples de problèmes instationnaires

- Dans ce cas, le flux diffusif est donné par la **loi de Fick** $\vec{q} = -D\,\vec{\nabla}u$ (analogue de la loi de Fourier, §1), et l'EDP associée s'écrit, en l'absence de source volumique :

$$(22) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - D\,\Delta u = 0 \quad \text{sur }]0,+\infty[\times \mathbb{R}^d$$

  ou encore sous sa forme conservative (valable aussi lorsque D dépend de $\mathbf{x}$ contrairement à (22)) :

$$(23) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}\left(D\,\vec{\nabla}u\right) = 0 \quad \text{sur }]0,+\infty[\times \mathbb{R}^d$$

- On peut montrer que, si u_0 est continue et bornée, la solution (bornée) de (22) associée à la condition initiale u_0 a pour expression :

$$(24) \quad u(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{(4\pi D t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} u_0(\mathbf{y}) \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4Dt}\right) d\mathbf{y} \qquad (t>0)$$

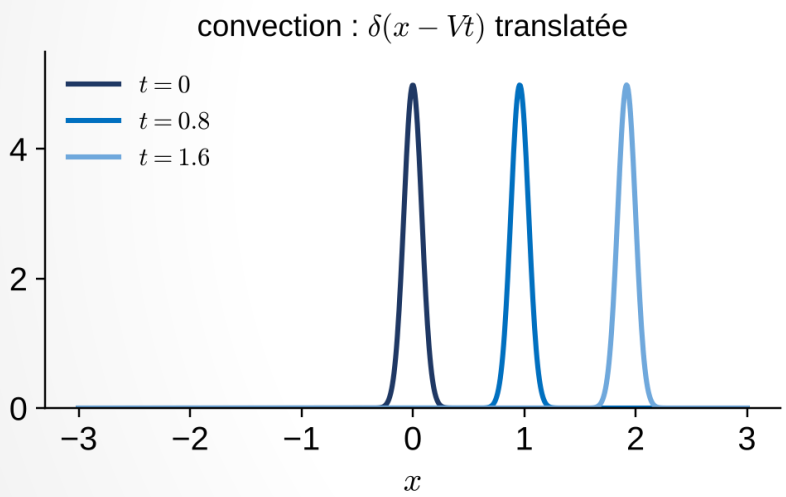
- On vérifie directement que le noyau $(t,\mathbf{x}) \mapsto (4\pi D t)^{-d/2}\, e^{-|\mathbf{x}|^2/(4Dt)}$ est solution de (22) pour $t>0$ et que son intégrale sur $\mathbb{R}^d$ vaut 1 pour tout t (**conservation de la masse**).

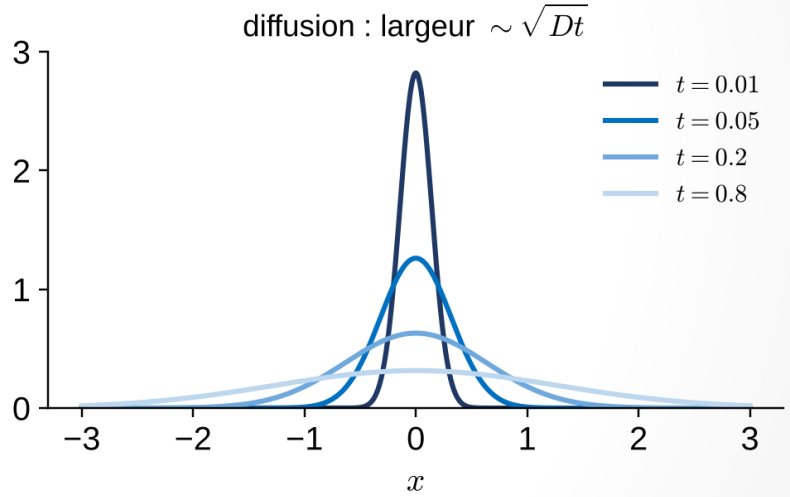
4. Autres exemples de problèmes instationnaires

On appelle **solutions élémentaires** des EDP (18) et (22) les solutions correspondant (formellement) à la condition initiale $u_0(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$ (mesure de Dirac, cf. chapitre 1). En utilisant les formules générales (19) et (24), on obtient :

$$(25) \quad g(t,\mathbf{x}) = \delta\left(\mathbf{x} - \vec{V}\,t\right) \qquad \text{pour la solution élémentaire de (18)}$$

$$(26) \quad g(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{(4\pi D t)^{d/2}}\, e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4Dt}} \qquad \text{pour la solution élémentaire de (22)}$$





- Pour l'équation de convection, la condition initiale est simplement **translatée** à la vitesse $\vec{V}$.
- Pour l'équation de diffusion, la solution reste centrée en $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mais **s'étale** sur une distance de l'ordre de $\sqrt{D\,\Delta t}$ pendant un temps Δt. Elle est strictement positive partout dès que $t > 0$: la diffusion propage l'information à **vitesse infinie**.

4. Autres exemples de problèmes instationnaires

Dans le cas général, les deux modes de transport sont souvent présents simultanément, $\vec{V}$ et D varient en temps et en espace, et on doit également tenir compte de la présence de sources volumiques. On obtient alors l'**équation de convection-diffusion** :

$$(27) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div}\left(u\,\vec{V}\right) - \mathrm{div}\left(D\,\vec{\nabla} u\right) = f \quad \text{sur }]0,+\infty[\times \mathbb{R}^d$$

ou, plus généralement encore, si la diffusion est anisotrope :

$$(28) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div}\left(u\,\vec{V}\right) - \mathrm{div}\left(\mathbf{K}\,\vec{\nabla} u\right) = f \quad \text{sur }]0,+\infty[\times \mathbb{R}^d$$

Nombre de Péclet. Pour un écoulement de vitesse caractéristique V sur une longueur L, on peut comparer les temps de transport par convection, L/V, et par diffusion, L^2/D en introduisant le rapport :

$$\mathrm{Pe} = \frac{L^2/D}{L/V} = \frac{V\,L}{D}$$

Par définition ce rapport, appelé nombre de Péclet, est un **nombre sans dimension**. Si $\mathrm{Pe} \gg 1$, la convection domine (comportement proche de (18)) ; si $\mathrm{Pe} \ll 1$, la diffusion domine (comportement proche de (22)). On verra que les problèmes à grand nombre de Péclet sont plus délicats à résoudre numériquement.

Ce qu'il faut retenir

Chaleur (parabolique)

$$\partial_t u - k\,\Delta u = f$$

- 1 condition initiale
- énergie **dissipée**
- convergence vers l'état stationnaire en $e^{-\lambda_1 t}$
- effet régularisant
- vitesse de propagation infinie

Ondes (hyperbolique)

$$\partial_t^2 u - c^2 \Delta u = f$$

- 2 conditions initiales
- énergie **conservée**
- oscillations de pulsations propres $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$
- Phénomène de résonance
- vitesse de propagation finie c

Convection (1er ordre)

$$\partial_t u + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} u = 0$$

- 1 condition initiale
- énergie **conservée**
- pas d'effet régularisant : simple transport de la condition initiale le long des caractéristiques
- vitesse de propagation finie $\vec{V}$

- **Méthode spectrale** : pour (1) ou pour (2) sur un domaine borné, la décomposition sur les fonctions propres de l'opérateur spatial A ramène l'EDP à une famille d'EDO **découplées** : $u_k{}' + \lambda_k u_k = f_k$ ou $u_k{}'' + \omega_k^2 u_k = f_k$.
- **Unicité** : On peut la démontrer à partir de la décroissance (équation de type « chaleur ») ou de la conservation (équation de type sondes ») de l'énergie associée au problème.

Ressources en accès libre pour approfondir

- **MIT OpenCourseWare 18.152** – *Introduction to Partial Differential Equations* (J. Speck, 2011) : équation de la chaleur, équation des ondes, méthodes d'énergie. https://ocw.mit.edu/courses/18-152-introduction-to-partial-differential-equations-fall-2011/

- **R. Herman** – *Introduction to Partial Differential Equations*, LibreTexts : séparation des variables pour les équations de la chaleur et des ondes, séries de Fourier. https://math.libretexts.org/Bookshelves/Differential_Equations/Introduction_to_Partial_Differential_Equations_(Herman)

- **FreeFEM** – logiciel libre d'éléments finis ; exemples de problèmes instationnaires. https://doc.freefem.org/examples/index.html

Quelques ouvrages de référence pour aller encore plus loin ….

- H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, 1983.
- L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, 2e édition, American Mathematical Society, 2010 (chapitre 2 : équation de transport, équation de la chaleur, équation des ondes ; méthodes d'énergie).
- R. Dautray et J.-L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Masson, 1987.
- P.-A. Raviart et J.-M. Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, 1988.