
Modélisation des actions mécaniques

Modélisation d'une action mécanique

La statique est une partie de la mécanique qui étudie la relation de cause à effet entre l'équilibre relatif d'un système matériel et les actions mécaniques auxquelles ce système est soumis. L'un des objectifs de la statique est de conduire à la détermination de toute action mécanique nécessaire au dimensionnement ou à la prédiction de déformations (résistance des matériaux). En préalable à l'étude et à l'application du principe fondamental de la statique, il est nécessaire de définir la notion « d'action mécanique » d'un point de vue physique mais aussi d'un point de vue mathématique. L'objet de ce cours est donc de mettre en place les bases de la modélisation analytique des principales actions mécaniques qui seront utilisées lors de problèmes de statique.

1. Définition

On appelle action mécanique tout phénomène susceptible de **déplacer** un corps, de le déformer ou de le **maintenir en équilibre**.

Conséquence1 : Pour parler d'action mécanique, il faut nécessairement ISOLER un solide ou un ensemble de solides.

Conséquence2 : On distingue deux types d'actions mécaniques. Les actions mécaniques de contact ou surfaciques (elles agissent sur un élément de surface) et les actions mécaniques à distance ou volumiques (elles agissent sur un élément de volume).

Classification des actions mécaniques

Les actions mécaniques identifiées à ce jour peuvent être classées en deux sortes :

- Les **actions mécaniques à distance**. Elles s'exercent au niveau du volume du solide. *Exemples : actions magnétiques, action de la pesanteur, ...*
- Les **actions mécaniques de contact**. Elles s'appliquent directement sur la surface du solide (action ponctuelle, linéique ou surfacique). *Exemples : pression d'un fluide sur un solide, actions de contact entre deux solides, ...*



Action mécanique à distance
Exemple : champ magnétique



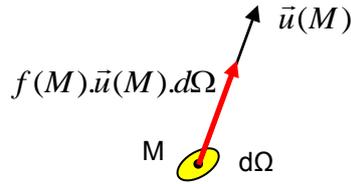
Action mécanique de contact
Exemple : Air sur un parachute

2. Modélisation locale des actions mécaniques

Etant donnée la définition, on considère que l'on peut modéliser une force élémentaire s'exerçant sur un élément de surface ou un élément de volume par un vecteur avec :

- Une direction (celle suivant laquelle tend à se déplacer ou se déformer l'élément)
- Un sens (vers lequel l'élément tend à se déplacer ou se déformer)
- Une norme (liée à l'intensité avec laquelle l'extérieur agit sur l'élément)

Etape 1 : On définit à partir du modèle général ci-contre les actions mécaniques élémentaires sur chaque élément de domaine



$\vec{u}(M)$: Vecteur unitaire quelconque

$f(M)$: Fonction (qui dépend de M) appelée densité d'effort



L'élément de domaine $d\Omega$ peut correspondre à un volume élémentaire dV (cas des actions à distance) ou une surface élémentaire dS (cas des actions de contact).



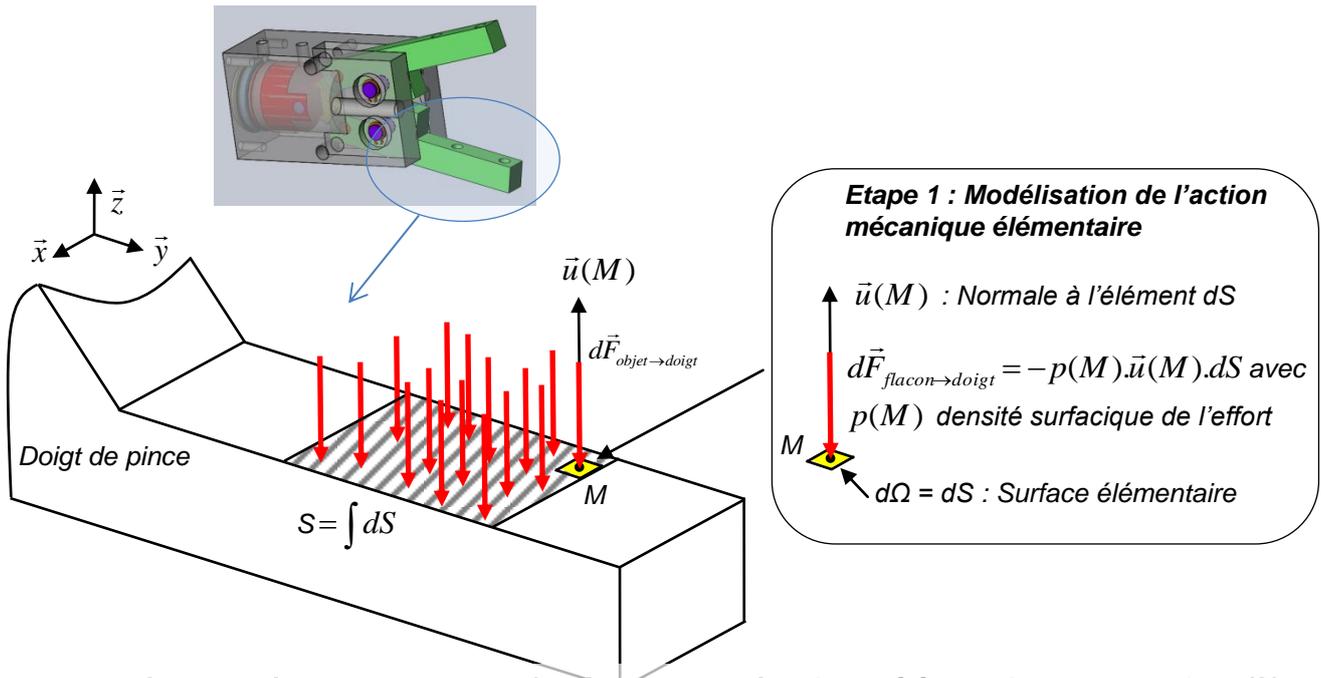
Pour une action mécanique à distance, $f(M)$ correspond à une densité volumique.

Pour une action mécanique de contact surfacique, $f(M)$ correspond à une densité surfacique

Pour une action mécanique de contact linéique, $f(M)$ correspond à une densité linéique.

Etape 2 : On considère que l'on a une infinité d'actions mécaniques élémentaires sur le domaine étudié, la répartition de ces actions mécaniques élémentaires permet d'obtenir un champ vectoriel qui correspond à la modélisation locale des actions mécaniques.

Exemple : Modélisation locale de l'action mécanique d'un objet sur un doigt de la pince Schrader par un champ de pression uniforme.



Etape 2 : On considère que l'on a une infinité d'actions mécaniques élémentaires sur la surface (S) On obtient donc au final un champ de pression comme modèle d'action mécanique.

3. Modélisation globale des actions mécaniques

3-1 Notion de force

Lorsque l'on étudie un ensemble de **solides indéformables**, il est suffisant d'utiliser un modèle global pour les actions mécaniques. Il permet notamment de représenter globalement les actions mécaniques sous forme de forces.



Rappel : Une force est une action mécanique représentée par un vecteur lié (P, \vec{F}_{12}) où P est le point d'application de la force et \vec{F}_{12} est un vecteur dont la direction, le sens et la norme permettent de quantifier l'effet mécanique constaté sur le système subissant la force.

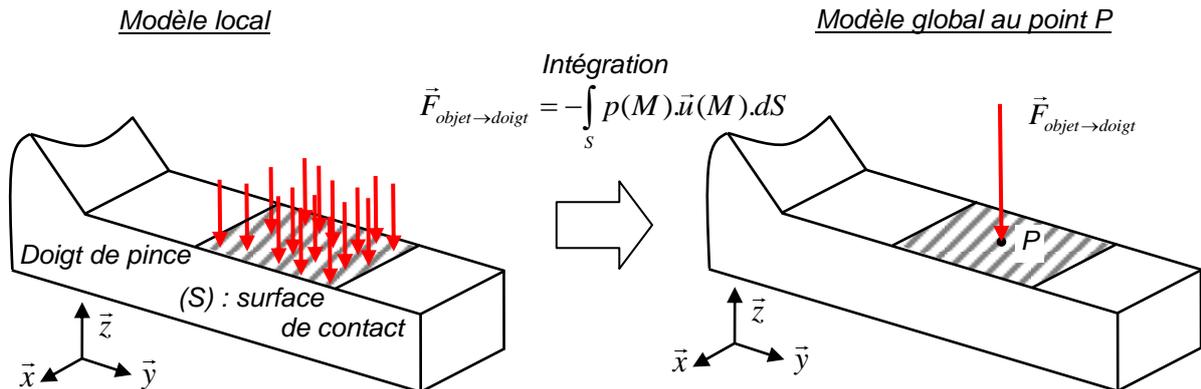


Une force est obtenue à partir de l'intégration de l'ensemble des actions élémentaires sur le domaine du modèle local. On parle également de résultante :

$$\vec{F}_{12} = \int_{\Omega} f(M) \cdot \vec{u}(M) \cdot d\Omega$$

où Ω peut être soit un volume V (on se retrouve alors à calculer soit une intégrale de volume), soit une surface de contact S (on se retrouve alors à calculer une intégrale de surface).

Exemple : Modélisation globale de l'action mécanique sur le doigt de la pince Schrader au point P.



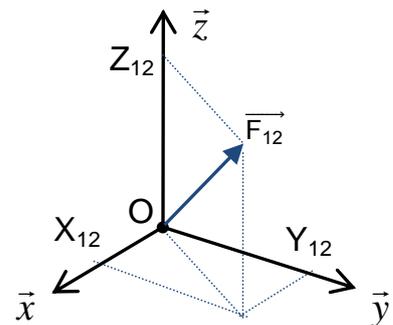
Notation et vocabulaire

On définit ainsi la force exercée par un solide 1 sur un solide 2 : \vec{F}_{12}

Cette force résulte de la somme de toutes les forces élémentaires. On l'appelle également "résultante des forces élémentaires".

C'est une grandeur vectorielle qui est définie

- ✓ Soit par ses composantes dans une base donnée : $\vec{F}_{12} = \begin{pmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \\ Z_{12} \end{pmatrix}_{xyz}$
- ✓ Soit par
 - Une direction
 - Un sens
 - Une intensité (norme) $\|\vec{F}_{12}\|$ (en Newton)



Cas d'une force modélisée dans le plan

Lorsque la force ne possède que deux composantes dans le plan, elle peut se représenter facilement par ses composantes.

X_{12} et Y_{12} sont les composantes du vecteur force. Ce sont des valeurs algébriques.

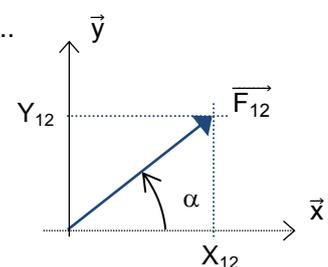
On peut également définir la force par sa norme $\|\vec{F}_{12}\|$, une direction Δ et un sens..

On démontre facilement les relations :

$$X_{12} = \|\vec{F}_{12}\| \cdot \cos\alpha \quad \text{et} \quad Y_{12} = \|\vec{F}_{12}\| \cdot \sin\alpha$$

ou

$$\|\vec{F}_{12}\| = \sqrt{X_{12}^2 + Y_{12}^2} \quad \text{et} \quad \text{tg}\alpha = \frac{Y_{12}}{X_{12}}$$



3-2 Notion de moment d'une force par rapport à un point

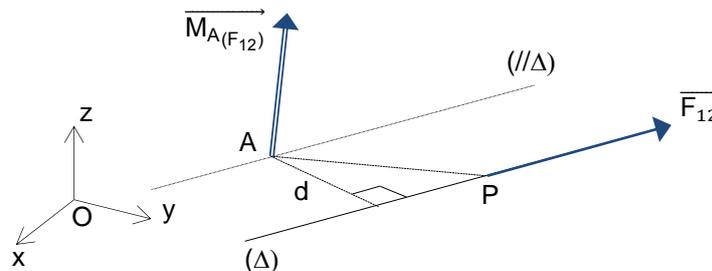
La notion de force sous forme de vecteur lié (P, \vec{F}_{12}) est cependant insuffisante pour permettre de représenter d'un point de vue global toutes les actions mécaniques et notamment la tendance que peut avoir une force à modifier le mouvement de rotation du système sur lequel elle agit, on introduit donc la notion de moment d'une force.



Rappel : On appelle moment en A d'une force \vec{F}_{12} appliquée en P le vecteur noté $\vec{M}_{A(F_{12})}$ défini par :

$$\vec{M}_{A(F_{12})} = \vec{AP} \wedge \vec{F}_{12}$$

(Unité : Newton mètre (N.m)).



Le moment de la force \vec{F}_{12} appliquée en P par rapport au point A peut alors être modélisé par un vecteur avec :

- ✓ Une origine au point A
- ✓ Une direction perpendiculaire au plan formé par les vecteurs \vec{AP} et \vec{F}_{12}
- ✓ Un sens, le trièdre $(\vec{AP}, \vec{F}_{12}, \vec{M}_{A(F_{12})})$ est direct
- ✓ Une intensité égale à la force fois le bras de levier d. $\|\vec{F}_{12}\|$ (en N.m)

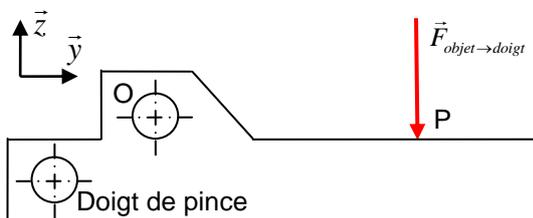


Dans le cas général, la détermination du vecteur moment n'est pas immédiate et on utilise la formulation du produit vectoriel permettant de traduire les caractéristiques vues précédemment.

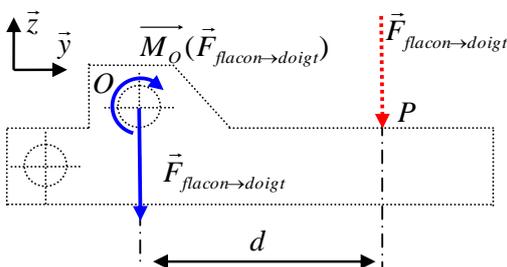
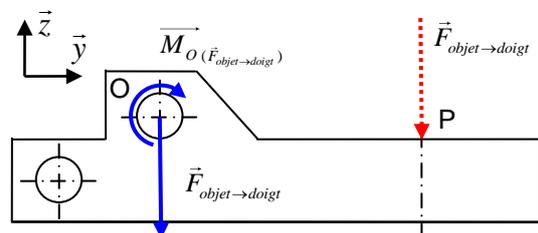
$$\vec{M}_{A(F_{12})} = \vec{AP} \wedge \vec{F}_{12}$$

Exemple : Si l'on s'intéresse à l'effet de l'action mécanique de l'objet sur le doigt de la pince au point O, on constate que celle-ci a tendance à pousser le doigt suivant la direction de $\vec{F}_{\text{objet} \rightarrow \text{doigt}}$; mais aussi à faire tourner le doigt autour de l'axe $(O\vec{x})$. Par conséquent, il faut modéliser au point O l'action mécanique du flacon sur le doigt par une force $\vec{F}_{\text{objet} \rightarrow \text{doigt}}$ et un moment en O $\vec{M}_{O(\vec{F}_{\text{objet} \rightarrow \text{doigt}})}$ tel que $\vec{M}_{O(\vec{F}_{\text{objet} \rightarrow \text{doigt}})} = \vec{OP} \wedge \vec{F}_{\text{objet} \rightarrow \text{doigt}}$.

Modèle global de l'action mécanique de l'objet sur le doigt au point P



Modèle global de l'action mécanique de l'objet sur le doigt au point O



$$\vec{M}_{O(\vec{F}_{\text{objet} \rightarrow \text{doigt}})} = \vec{OP} \wedge \vec{F}_{\text{objet} \rightarrow \text{doigt}}$$

$$\vec{M}_{O(\vec{F}_{\text{objet} \rightarrow \text{doigt}})} = (d \cdot \vec{y} - a \cdot \vec{z}) \wedge -F_{\text{objet} \rightarrow \text{doigt}} \cdot \vec{z}$$

$$\vec{M}_{O(\vec{F}_{\text{objet} \rightarrow \text{doigt}})} = -d \cdot F_{\text{objet} \rightarrow \text{doigt}} \cdot \vec{x}$$

Avec le bras de levier on peut directement écrire en s'aidant du schéma :

$$M_{O(\vec{F}_{\text{objet} \rightarrow \text{doigt}})} = d \cdot F_{\text{objet} \rightarrow \text{doigt}} \text{ autour de } -\vec{x}$$

3-3 Caractérisation d'une action mécanique

L'action mécanique exercée sur un système isolé peut donc être caractérisée par deux vecteurs, un vecteur force et un vecteur moment par rapport à un point.

- ✓ Le vecteur force est obtenu à partir de la somme des forces élémentaires appliquées sur le solide considéré (S) $\vec{F}_{\rightarrow S}$:

$$\vec{F}_{\rightarrow S} = \int_{\Omega} f(M) \cdot \vec{u}(M) \cdot d\Omega = \int_{\Omega} \vec{df}$$

- ✓ Un moment d'une force en A (où A est un point quelconque) est obtenu à partir de la somme de l'ensemble des actions élémentaires sur le domaine du modèle local au point A $\vec{M}_{A(\rightarrow S)}$:

$$\vec{M}_{A(\vec{F})} = \int_{\Omega} \vec{AM} \wedge f(M) \cdot \vec{u}(M) \cdot d\Omega = \int_{\Omega} \vec{AM} \wedge \vec{df}$$



Par construction, le champ de moments d'une force est un champ de moment d'un torseur (champ de moment antisymétrique) car il vérifie la relation de changement de point d'un torseur :

$$\vec{M}_B = \int \vec{BM} \wedge \vec{dF} = \int \vec{BA} \wedge \vec{dF} + \int \vec{AM} \wedge \vec{dF} = \vec{BA} \wedge \int \vec{dF} + \int \vec{AM} \wedge \vec{dF} = \vec{BA} \wedge \vec{F} + \vec{M}_A$$

Par conséquent toute action mécanique appliquée sur un système mécanique S est caractérisée par un torseur d'action mécanique :

$$\{\mathfrak{T}_{\rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{\rightarrow S} = \int \vec{dF} \\ \vec{M}_{A(\rightarrow S)} = \int \vec{AM} \wedge \vec{dF} \end{array} \right\}_A$$

Notations

La notation condensée de l'action mécanique sous forme de torseur peut se faire de deux manières :

- ✓ En colonne : En bas à droite on indique le point où on exprime le torseur et la base dans laquelle on exprime les vecteurs force et moment $\vec{F}_{\rightarrow S}$ et $\vec{M}_{A(\rightarrow S)}$ de composantes respectives (X,Y,Z) et (L,M,N).

$$\{\mathfrak{T}_{\rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{array} \right\}_{A,xyz}$$

- ✓ En ligne : en bas à droite, on indique le point où on exprime le torseur. Il n'est plus utile de préciser la base d'expression des vecteurs puisque celle-ci est clairement explicitée dans le torseur.

$$\{\mathfrak{T}_{\rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{\rightarrow S} = X \cdot \vec{x} + Y \cdot \vec{y} + Z \cdot \vec{z} \\ \vec{M}_{A(\rightarrow S)} = L \cdot \vec{x} + M \cdot \vec{y} + N \cdot \vec{z} \end{array} \right\}_A$$

Actions mécaniques particulières

- ✓ Un torseur couple est de la forme $\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{C} \end{array} \right\}_A$ et s'écrit de la même manière en tout point. L'action mécanique correspond à un couple pure correspondant par exemple à un couple moteur.
- ✓ Un glisseur est de la forme $\left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$ au point d'application de la force (ici en A). L'action mécanique correspond à une force appliquée en un point (qui résulte d'une somme de forces élémentaires)

Cas d'un problème statiquement plan

Un problème qui traite de l'équilibre d'un système est assimilable à un problème statiquement plan s'il présente un plan de symétrie géométrique et de chargement. Dans ce cas, les actions mécaniques qui le sollicitent sont telles que :

- ✓ les forces appliquées sont dans le plan de symétrie du système
- ✓ les moments des forces appliquées sont portés par un axe perpendiculaire à ce plan.



Dans le cas, la détermination est alors simplifiée et il est judicieux d'utiliser dans ce cas le calcul direct avec le bras de levier sans passer par le produit vectoriel.

Les différentes actions mécaniques

1. Les actions à distance – Action de la pesanteur

Définition du modèle local et du modèle global

L'effet de la pesanteur est une action mécanique à distance, elle se manifeste par un champ d'accélération. Ce champ produit en tout point M d'un solide S de volume V une force élémentaire $-dm.g.\vec{z}_i$ dirigée vers le centre de la terre proportionnelle à la masse élémentaire dm et à l'accélération de la pesanteur g.



Pour les applications classiques, on suppose que l'accélération de la pesanteur g et la direction des forces appliquées sont constantes (la différence de distance entre les éléments de masse et le centre de la terre ainsi que la différence d'orientation sont suffisamment faibles pour être négligées).

On peut alors écrire :

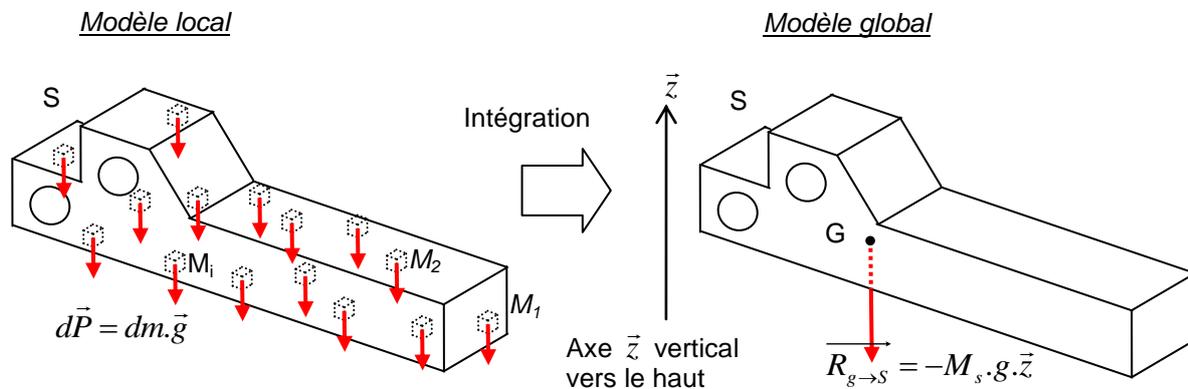
✓ Force résultante : $\vec{F}_{\text{pes} \rightarrow (S)} = \int_{\text{vol}} -dm.g.\vec{z}_i = -M.g.\vec{z}$

✓ Moment résultant /A : $\vec{M}_{A \text{ pes} \rightarrow (S)} = \int_{\text{vol}} \{\overrightarrow{AP}_i \wedge -dm.g.\vec{z}_i\} = \int_{\text{vol}} \{\overrightarrow{AP}_i dm\} \wedge -g.\vec{z}_i = \overrightarrow{AG} \wedge -M.g.\vec{z}$

L'action de la pesanteur est modélisable par une force $-M.g.\vec{z}$ appliquée au centre de gravité du solide G.

On peut éventuellement écrire le torseur correspondant en G (glisseur) : $\{\mathfrak{S}_{\text{pes} \rightarrow (S)}\} = \begin{Bmatrix} -M.g.\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$

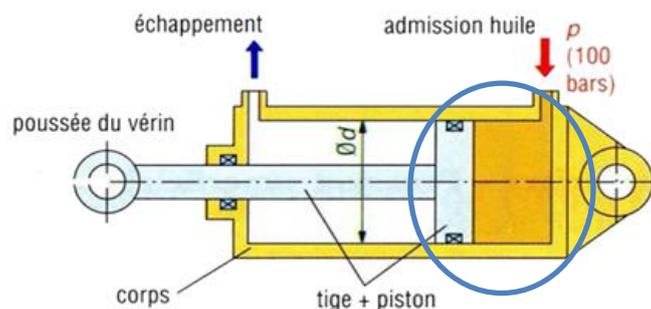
Exemple du doigt de la pince



Remarque : les autres actions à distance comme celle exercée par un champ magnétique ne sont pas abordées dans ce cours. On peut noter simplement qu'elles se définissent de la même façon.

2. Les actions de contact fluide/solide

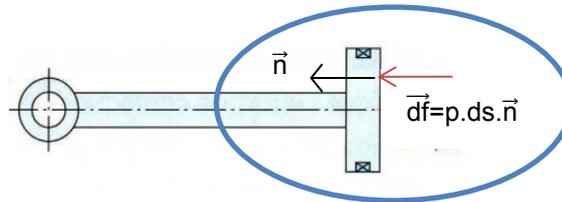
Exemple de l'huile sur un piston



L'action mécanique exercée par le fluide résulte de la somme des forces de pression exercées par l'huile sur le piston. Ces forces élémentaires sont

- ✓ normales à la surface de contact,
- ✓ proportionnelles à la pression fluide et à l'élément de surface ds.

$$\vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow (S)} = \int_{\text{surface}} \vec{df} = \int_{\text{surface}} p \cdot ds \cdot \vec{n}$$



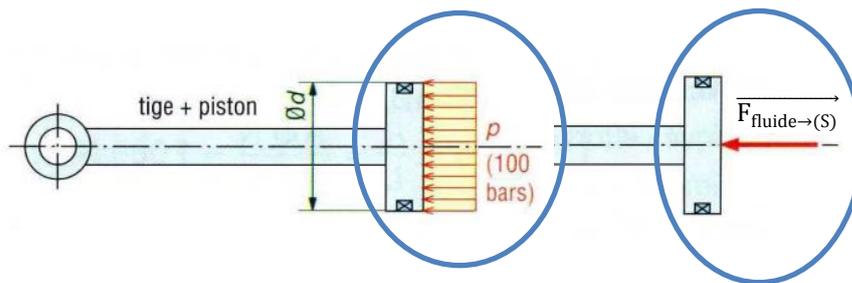
En posant l'hypothèse d'une répartition uniforme des forces de pression et d'une surface de contact plane, la résultante des forces de pression fluide vaut :

$$\vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow (S)} = \int_{\text{surface}} p \cdot ds \cdot \vec{n} = p \cdot S \cdot \vec{n}$$

S est l'aire de la surface de contact et \vec{n} le vecteur normal au contact.
La force est appliquée au centre de la surface plane C.

L'action exercée par une pression fluide uniforme sur une surface plane de normale \vec{n} est modélisable par une force $p \cdot S \cdot \vec{n}$ appliquée au centre de surface C.

On peut éventuellement écrire le torseur correspondant en G (glisseur) : $\{\mathfrak{F}_{\text{fluide} \rightarrow (S)}\} = \left\{ \begin{matrix} p \cdot S \cdot \vec{n} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_C$



Dans un cas général, la différence de pression entre les différents points de la surface de contact ne peut être négligée. Dans ce cas, il faut déterminer le champ de pression en chaque point de contact en traduisant l'équation fondamentale de la statique des fluides :

$$p + \rho \cdot g \cdot z = \text{cste (dans un même milieu)}$$



La force hydrostatique ne s'exerce alors plus au centre du piston. Dans le cas général, le point d'application C de la force hydrostatique s'obtient en utilisant l'équation des moments. Ce point est appelé centre de poussée.

$$\vec{OC} \wedge \vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow (S)} = \int \vec{OP} \wedge \vec{df} = \int \vec{OP} \wedge p \cdot ds \cdot \vec{n}$$

Remarque : Dans le cas général, le fluide exerce également sur le solide des forces tangentielles appelées forces de cisaillement ou forces de viscosité. Dans la plupart des écoulements industriels, les forces d'inertie et les forces dues au champ de pression p sont prépondérantes devant les forces de viscosité

Remarque : il existe d'autres forces de contact fluide / solide qui ne sont pas explicitées dans ce cours mais qui seront abordées dans d'autres enseignement notamment en mécanique des fluides.
Il s'agit notamment des forces aérodynamiques dont le modèle global conduit à la force de portance et à la force de traînée.

3. Actions de contact solide/solide – liaisons supposées parfaites

3-1 Liaisons parfaites : intérêt et hypothèses

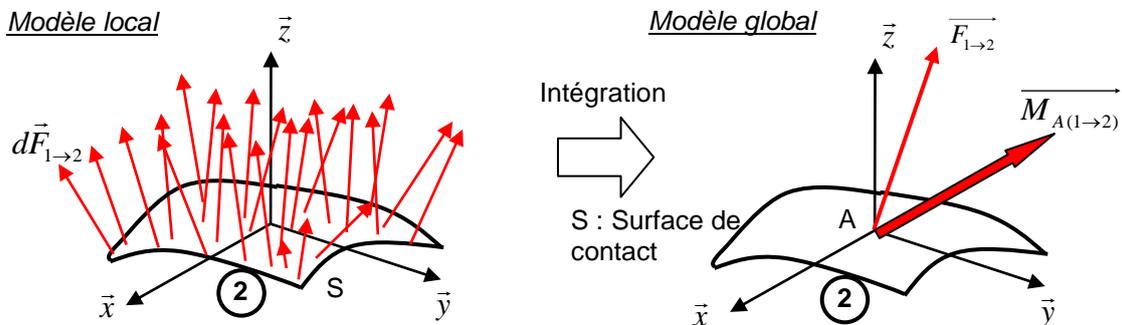
La modélisation par liaisons simples parfaites permet de définir et de calculer de façon relativement simple les actions mécaniques transmissibles par une liaison. Les liaisons simples parfaites constituent donc un modèle de référence utile et commode.



Le modèle de liaisons parfaites s'appuie sur 4 hypothèses fondamentales :

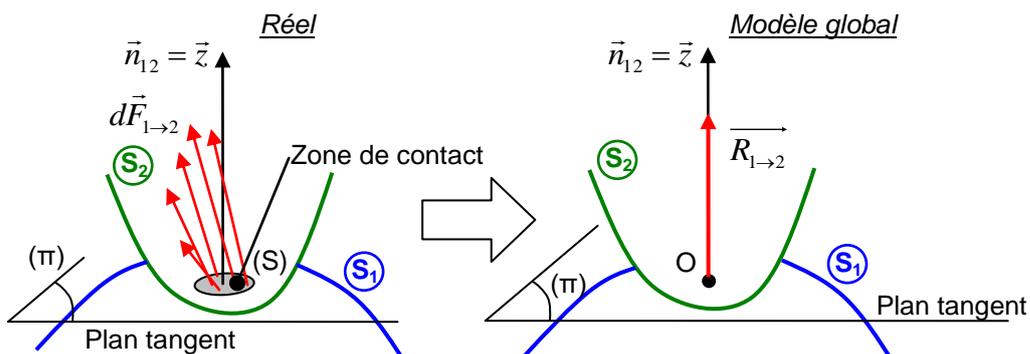
- l'hypothèse de géométrie parfaite (par exemple dans l'association de 2 cylindres)
- l'hypothèse de liaison sans jeu
- les déformations au contact supposées nulles
- le frottement négligé

Comme précédemment, on peut mettre en évidence un modèle local utile en phase de dimensionnement et un modèle global utilisé pour déterminer les actions mécaniques



3-2 Actions mécaniques transmises par une liaison parfaite

Dans le cas de la liaison ponctuelle, étant données les hypothèses, la surface de contact se réduit à un point et la force exercée est suivant la normale au contact.



$$\text{Force résultante : } \vec{F}_{12} = \int d\vec{F} = Z_{12} \cdot \vec{z}$$

$$\text{Moment résultant en O : } \vec{M}_{O12} = \int \vec{AM} \wedge d\vec{F} = \vec{0}$$

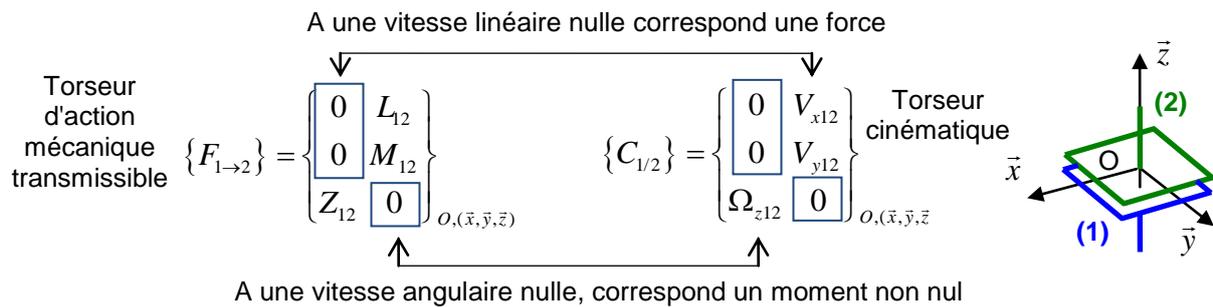
$$\text{On peut écrire le torseur correspondant en G : } \{\mathfrak{S}_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{O,xyz}$$

Torseur d'action mécanique transmissible des liaisons normalisées – Tableau récapitulatif

<p>(2)/(1) : Liaison ponctuelle en O de normale (O, \vec{z}) :</p> $\{\mathfrak{S}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{c c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{array} \right\}_{O,xyz}$	<p>Symbole</p>	<p>(2)/(1) : Liaison rotule en O :</p> $\{\mathfrak{S}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{c c} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{array} \right\}_{O,xyz}$	<p>Symbole</p>
<p>(2)/(1) : Liaison L.R. d'axe (O, \vec{x}) de normale (O, \vec{z}) :</p> $\{\mathfrak{S}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{c c} 0 & 0 \\ 0 & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{array} \right\}_{O,xyz}$	<p>Symbole</p>	<p>(2)/(1) : Liaison pivot glissant d'axe (O, \vec{x}) :</p> $\{\mathfrak{S}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{c c} 0 & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{array} \right\}_{O,xyz}$	<p>Symbole</p>
<p>(2)/(1) : Liaison linéaire annulaire d'axe (O, \vec{x}) :</p> $\{\mathfrak{S}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{c c} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{array} \right\}_{O,xyz}$	<p>Symbole</p>	<p>(2)/(1) : Liaison pivot d'axe (O, \vec{x})</p> $\{\mathfrak{S}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{c c} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{array} \right\}_{O,xyz}$	<p>Symbole</p>
<p>(2)/(1) : Liaison appui plan de normale (O, \vec{z}) :</p> $\{\mathfrak{S}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{c c} 0 & L_{12} \\ 0 & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{array} \right\}_{O,xyz}$	<p>Symbole</p>	<p>(2)/(1) : Liaison glissière d'axe (O, \vec{x}) :</p> $\{\mathfrak{S}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{c c} 0 & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{array} \right\}_{O,xyz}$	<p>Symbole</p>
<p>(2)/(1) : Liaison hélicoïdale d'axe (O, \vec{x}) : $\{\mathfrak{S}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{c c} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{array} \right\}_{O,xyz}$</p> <p>+1 relation de dépendance entre X_{12} et L_{12} : $L_{12} = -X_{12} \cdot \text{pas} / (2 \cdot \pi)$ (pas en mm/tr)</p>			<p>Symbole</p>



Dans le cas de l'hypothèse de liaison parfaite, il y a une complémentarité entre le torseur cinématique et le torseur d'action mécanique transmissible.



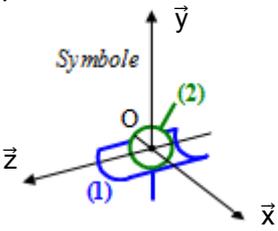
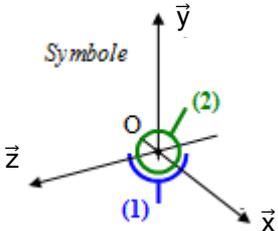
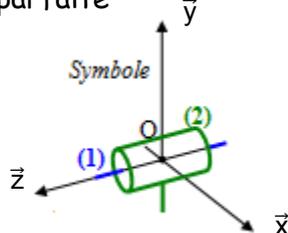
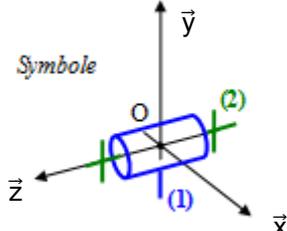
3-3 Cas particulier d'un problème statiquement plan

Un problème qui traite de l'équilibre d'un système est assimilable à un problème statiquement plan s'il Dans le cas de problèmes plan, nous avons vu que les forces sont situées dans un même plan et les vecteurs moment ont tous la même direction.

Si le plan considéré est repéré par Oxy, les forces n'ont pas de composantes suivant z et les moments ont une seule composante suivant z.

Exemple de la liaison articulation : les actions mécaniques des liaisons linéaire annulaire d'axe Oz, rotule de centre O, pivot glissant d'axe Oz et pivot d'axe Oz peuvent toutes être modélisées par une force appliquée en O avec deux composantes

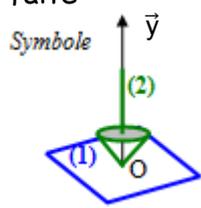
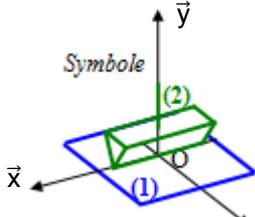
$$\vec{F}_{12} = \begin{pmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \end{pmatrix}_{xy}$$

<p>Liaison annulaire parfaite</p>  <p>Force résultante $\vec{F}_{12} = \begin{pmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \end{pmatrix}_{xy}$</p> <p>Moment résultant /O $\vec{M}_{O_{12}} = \vec{0}$</p>	<p>Liaison rotule parfaite</p>  <p>Force résultante $\vec{F}_{12} = \begin{pmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \end{pmatrix}_{xy}$</p> <p>Moment résultant /O $\vec{M}_{O_{12}} = \vec{0}$</p>
<p>Liaison pivot glissant parfaite</p>  <p>Force résultante $\vec{F}_{12} = \begin{pmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \end{pmatrix}_{xy}$</p> <p>Moment résultant /O $\vec{M}_{O_{12}} = \vec{0}$</p>	<p>Liaison pivot parfaite</p>  <p>Force résultante $\vec{F}_{12} = \begin{pmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \end{pmatrix}_{xy}$</p> <p>Moment résultant /O $\vec{M}_{O_{12}} = \vec{0}$</p>

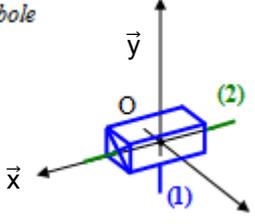
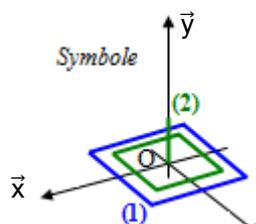
Cette liaison dans le plan est parfois appelé articulation d'axe Oz. Elle est souvent utilisée notamment en résistance des matériaux.

Exemple de la liaison ponctuelle : les actions mécaniques des liaisons ponctuelles de normale Oy et linéique de normale Oy et d'axe Oz peuvent être modélisées par une force appliquée en O de direction Oy.

$$\vec{F}_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ Y_{12} \end{pmatrix}_{xy}$$

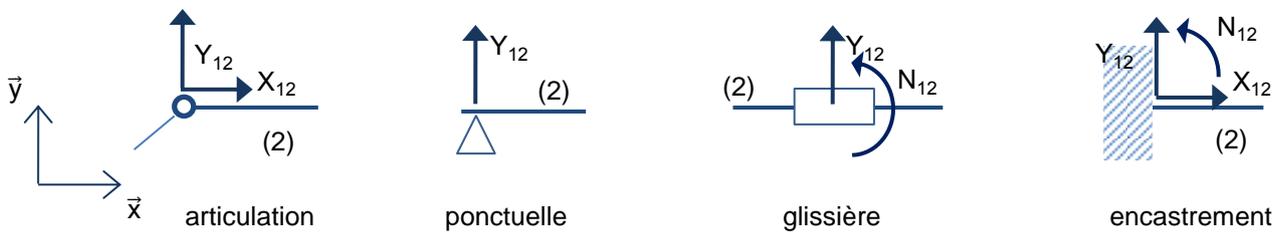
<p>Liaison ponctuelle parfaite</p>  <p>Force résultante $\vec{F}_{12} = Y_{12} \cdot \vec{y}$</p> <p>Moment résultant /O $\vec{M}_{O_{12}} = \vec{0}$</p>	<p>Liaison linéique parfaite</p>  <p>Force résultante $\vec{F}_{12} = Y_{12} \cdot \vec{y}$</p> <p>Moment résultant /O $\vec{M}_{O_{12}} = \vec{0}$</p>
---	--

Exemple de la liaison glissière : les actions mécaniques des liaisons glissière d'axe Ox ou plan de normale Oy peuvent être modélisées par une composante de force appliquée en O de direction Oy et par une composante de moment autour de Oz.

Liaison glissière parfaite	Liaison plane parfaite
<p><i>Symbole</i></p> 	<p><i>Symbole</i></p> 
<p>Force résultante $\vec{F}_{12} = Y_{12} \cdot \vec{y}$</p>	<p>Force résultante $\vec{F}_{12} = Y_{12} \cdot \vec{y}$</p>
<p>Moment résultant /O $\vec{M}_{O_{12}} = N_{12} \cdot \vec{z}$</p>	<p>Moment résultant /O $\vec{M}_{O_{12}} = N_{12} \cdot \vec{z}$</p>



Pour les cas correspondants à un problème plan, l'outil torseur s'avère assez lourd et il est souvent utile de représenter les actions mécaniques appliquées sur une figure.



3-4 Actions de contact solide/solide avec frottement – Modèle de Coulomb

Dans le cas de liaisons non parfaites, le frottement entre solide ne peut plus être négligé et le torseur statique ne prend plus la forme définie précédemment dans le cas des liaisons parfaites.

Les lois de Coulomb sont des lois expérimentales qui permettent de définir des relations entre les différentes composantes d'actions mécaniques de contact dans le cas d'un contact ponctuel avec frottement.

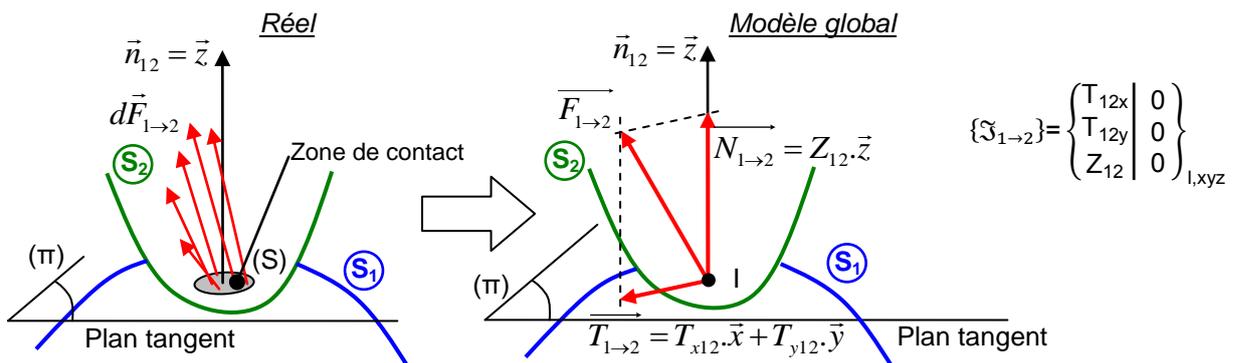
Pour le contact ponctuel, trois phénomènes peuvent apparaître : le glissement, le roulement et le pivotement. Chacun de ces phénomènes conduit à des modèles différents décrits ci-dessous.

3-4-1 Lois du frottement pour un contact ponctuel

Lois du frottement de glissement (lois de Coulomb)

Si le frottement n'est pas négligeable, il existe une composante tangentielle à l'action mécanique.

(2)/(1) : Liaison ponctuelle en I de normale (l, \vec{z}) avec frottement entre les solide S_2 et S_1 :





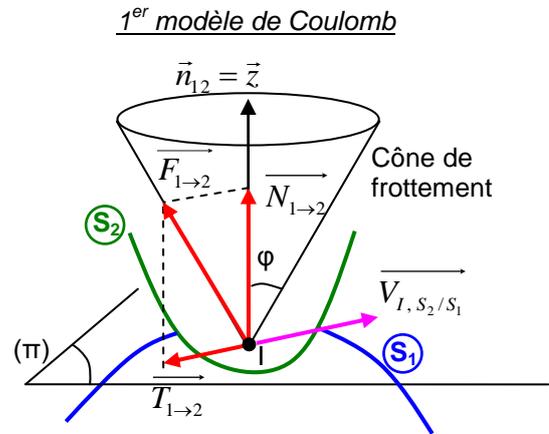
Les lois (expérimentales) de Coulomb permettent de relier les composantes de \vec{T}_{12} à la composante normale Z_{12} . Il existe deux cas de figure.

1^{ère} loi de Coulomb : Glissement en I $\rightarrow \vec{V}_{1,2/1} \neq \vec{0}$

On définit un coefficient de frottement f tel que $f = \tan\varphi$ où φ est le demi angle au sommet du cône de frottement.

- La composante tangentielle \vec{T}_{12} est opposée à la vitesse de glissement $\vec{V}_{1,2/1}$.
- \vec{F}_{12} est toujours sur le cône de frottement.
- Ce sont les lois de Coulomb qui donnent \vec{T}_{12} :

$$\|\vec{T}_{12}\| = f \cdot N_{12}$$

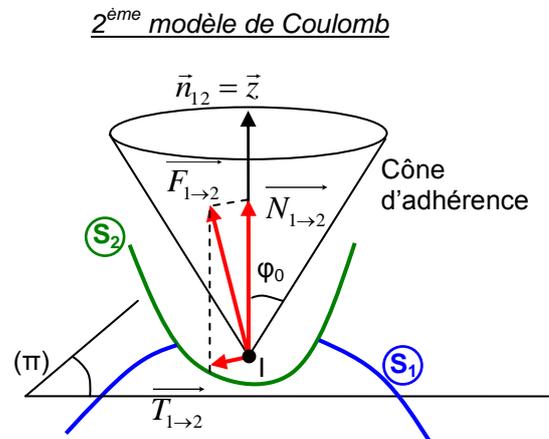


2^{ème} loi de Coulomb : Non glissement en I $\rightarrow \vec{V}_{1,2/1} = \vec{0}$

On définit un coefficient d'adhérence f_0 tel que $f_0 = \tan\varphi_0$ où φ_0 est le demi angle au sommet du cône d'adhérence.

- \vec{F}_{12} est toujours situé à l'intérieur du cône d'adhérence.
- Ce ne sont pas les lois de Coulomb qui donnent \vec{T}_{12} :

$$\|\vec{T}_{12}\| \leq f_0 \cdot N_{12}$$



Attention aux indices pour la 1^{ère} loi de Coulomb.

La composante tangentielle \vec{T}_{12} (1 \rightarrow 2) est opposée à la vitesse de glissement $\vec{V}_{1,2/1}$ (2/1).



Le coefficient de frottement f est en général inférieur au coefficient d'adhérence f_0 ($f_0 > f$) mais dans la pratique, on confond (parfois abusivement!) f et f_0 et on utilise uniquement le coefficient de frottement f .



Expérimentalement, on constate que le coefficient de frottement f dépend de la nature de surfaces de contact (matériaux en contact, état de la surface de contact, présence ou non de lubrifiant,...). On peut noter



En première approximation, on considère que le facteur prépondérant du coefficient de frottement concerne uniquement la nature des matériaux en contact.

Matériaux en contact	Coefficient de frottement
Acier sur acier	De 0,1 à 0,2
Acier sur bronze	De 0,12 à 0,2
Acier sur PTFE	De 0,02 à 0,08
Acier sur garniture de friction	De 0,25 à 0,4
Pneu neuf sur chaussée	De 0,3 à 0,6



Le coefficient de frottement f est un coefficient adimensionnel qui ne dépend pas de l'effort normal appliqué !!!

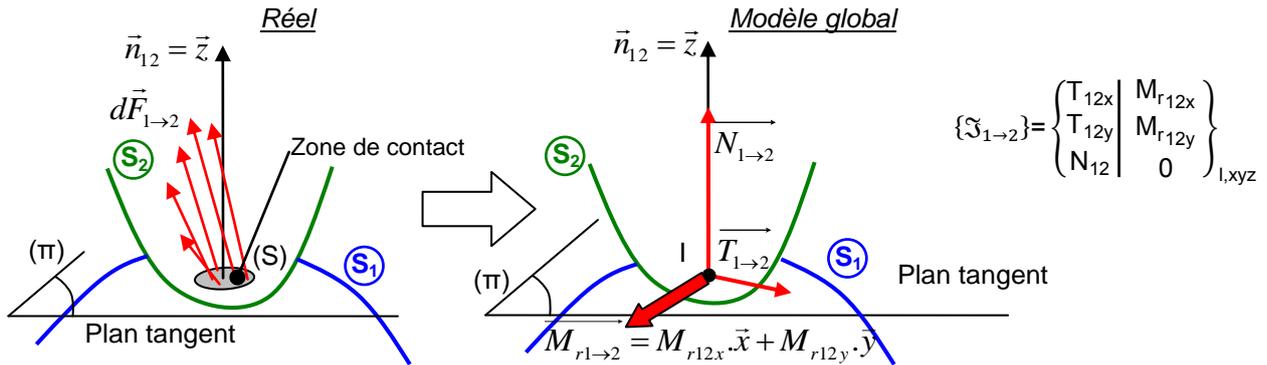


Pour étudier l'équilibre d'un solide lorsque celui-ci adhère (non glissement en I), on peut se placer à la limite du glissement (c'est-à-dire dans l'hypothèse limite où le solide commence à glisser). Se placer à la limite du glissement revient donc à considérer que \vec{F}_{12} est sur le cône de frottement.

Lois du frottement de roulement et le pivotement

Si le roulement n'est pas négligeable, il existe deux composantes de moment dans le plan tangent.

(2)/(1) : Liaison ponctuelle en I de normale (l, \vec{z}) avec frottement et roulement entre les solide S_2 et S_1 :

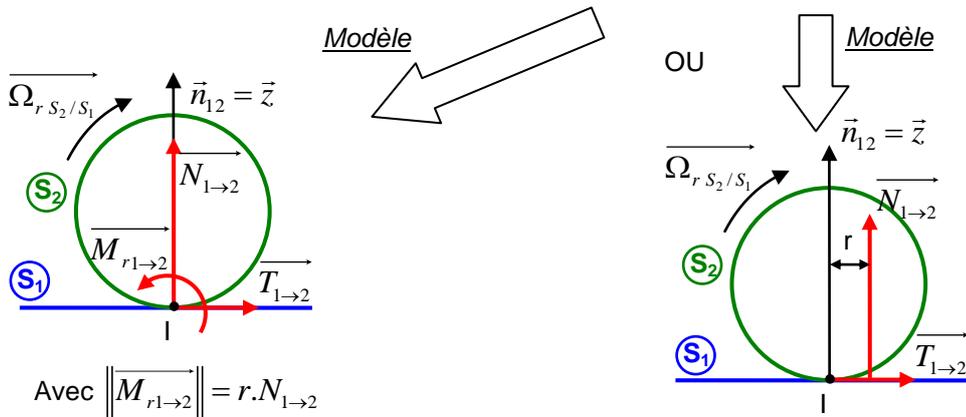
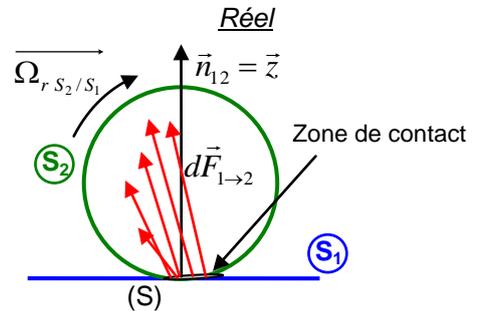


Des lois (expérimentales) permettent de relier les composantes de \vec{M}_{r12} à la composante normale Z_{12} de l'action mécanique.

Roulement en I : $\vec{\Omega}_{r,2/1} \neq \vec{0}$

On définit un coefficient de résistance au roulement r .

- $\|\vec{M}_{r12}\| = r \cdot N_{12}$
- \vec{M}_{r12} s'oppose à $\vec{\Omega}_{r,2/1}$.



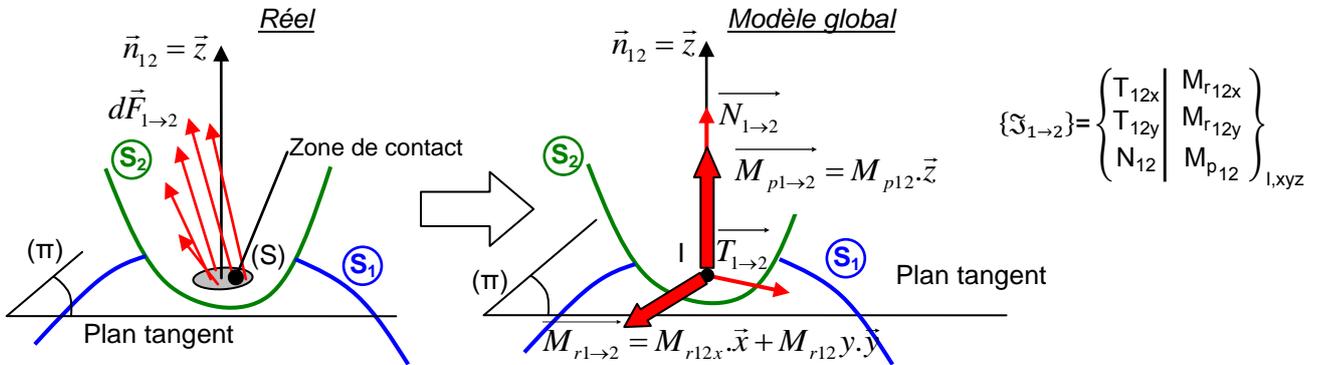
Le frottement de roulement est dû à la déformation des surfaces en contact. Expérimentalement, on constate que le coefficient de résistance au roulement r dépend de la nature de surfaces de contact (matériaux en contact, état de la surface de contact, présence ou non de lubrifiant,...).



Le coefficient de résistance au roulement r est homogène à une longueur.

Si le pivotement n'est pas négligeable, il existe une composante de moment normale au plan tangent.

(2)/(1) : Liaison ponctuelle de normale (l, \vec{z}) avec frottement, roulement et pivotement entre les solide S_2 et S_1 :

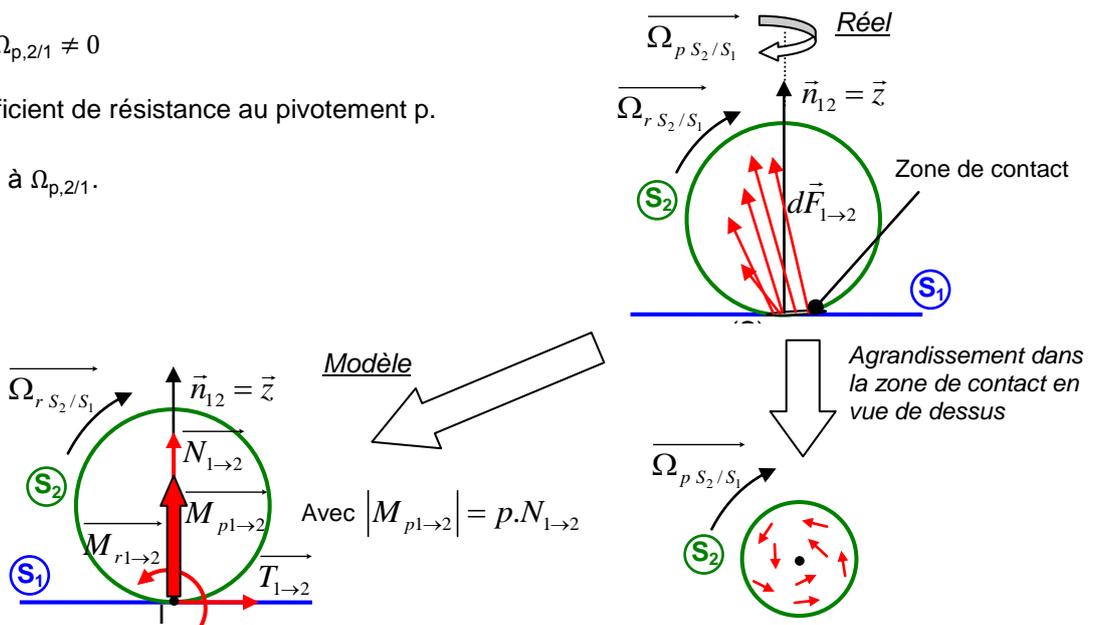


Des lois (expérimentales) permettent de relier la composante du moment M_{p12} à la composante normale de l'action mécanique Z_{12} .

Pivotement en I : $\Omega_{p,2/1} \neq 0$

On définit un coefficient de résistance au pivotement p .

- $|M_{p12}| = p \cdot N_{12}$
- M_{p12} s'oppose à $\Omega_{p,2/1}$.



Le frottement de roulement est dû à la déformation des surfaces en contact. Expérimentalement, on constate que le coefficient de résistance au pivotement p dépend de la nature de surfaces de contact (matériaux en contact, état de la surface de contact, présence ou non de lubrifiant,...).



Le coefficient de résistance au pivotement p est homogène à une longueur.

3-4-2 Utilisation des lois de Coulomb dans le cas de contacts surfaciques

Les lois de Coulomb concernant le frottement de glissement ne sont valables que pour un contact ponctuel. Or on constate que très souvent le contact entre deux solides n'est pas ponctuel et s'effectue sur une surface étendue. Pour déterminer les actions mécaniques de contact dans ce cas de figure, on considère alors de petites zones « quasi ponctuelles » autour de chaque point de la zone de contact et on écrit les lois de Coulomb sur des densités surfaciques d'effort.



Ce dernier paragraphe permet de faire le lien entre le cours sur la modélisation des actions mécaniques et le cours de technologie en particulier concernant les systèmes de frein et d'embrayage.

Définition du modèle local avec frottement

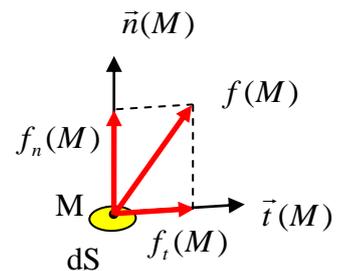
On définit l'action mécanique élémentaire de l'élément de surface $\overrightarrow{df_{12}} = \vec{f}(M) \cdot dS$ avec $\vec{f}(M) = f_n(M) \cdot \vec{n}(M) + f_t(M) \cdot \vec{t}(M)$ où :

$f_n(M)$: densité surfacique normale d'effort en M ($f_n(M) = -p(M)$ dans le cas de pression de contact sur une surface)

$\vec{n}(M)$: vecteur unitaire normal au plan tangent de la surface

$f_t(M)$: densité surfacique tangentielle d'effort en M

$\vec{t}(M)$: vecteur unitaire d'une direction du plan tangent de la surface



On applique ensuite les lois de Coulomb sur l'action mécanique élémentaire et on considère que l'on a une infinité d'actions mécaniques élémentaires sur la surface étudiée. La répartition de ces actions mécaniques élémentaires permet d'obtenir un champ vectoriel qui correspond à la modélisation locale des actions mécaniques.



Les lois de Coulomb pour le modèle local sont les mêmes que celles présentée pour le contact ponctuel mais elles portent cette fois-ci sur les densités d'effort.

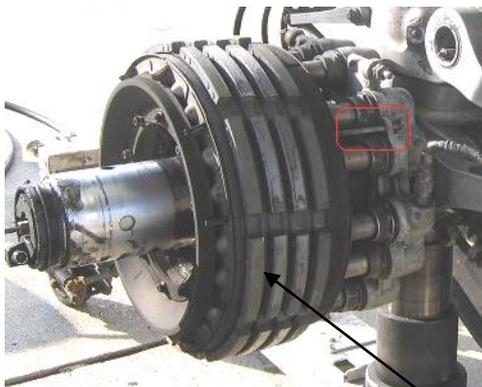
Définition du modèle global avec frottement

On note $\{\mathfrak{S}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{F_{12}} \\ \overrightarrow{M_{A(12)}} \end{matrix} \right\}_A$ l'action mécanique du solide 1 sur le solide 2 sur une surface S. Le modèle global est

obtenu à partir du modèle local : $\{\mathfrak{S}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{F_{12}} = \int d\overrightarrow{F_{12}} \\ \overrightarrow{M_{A(12)}} = \int \overrightarrow{AM} \wedge d\overrightarrow{F_{12}} \end{matrix} \right\}_A$

Exemple du bloc de freinage de l'A320.

Système réel



Contacts surfaciques

Modèle

