

Mécanique du point matériel
Travaux dirigés
Année 2026/2027

Département STPI
1^{ère} Année
UE I1ANETMP
Responsable : I. Gerber (igerber@insa-toulouse.fr)

Cinématique d'un point matériel – Chapitre 1

Analyse vectorielle, Mouvements, Trajectoires

Exercice 1 : Mouvement circulaire, coordonnées polaires

Nous nous intéressons au mouvement circulaire d'un point matériel M dans un référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, t)$ doté d'un repère d'observation cartésien. La position du point M est repérée sur son orbite, de rayon R , grâce à l'angle $\theta(t)$ entre l'axe (Ox) et le vecteur position $\vec{OM}$.

1. Faire une représentation schématique de la situation, on y reportera les axes, les vecteurs unitaires $\vec{e}_x, \vec{e}_y$, le point M repéré par l'angle θ , ainsi que sa trajectoire.
2. Sur ce même schéma, représenter les vecteurs de la base polaire $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$.
3. Etablir l'expression du vecteur position $\vec{OM}$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ puis dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$ en fonction de R et $\theta(t)$.
4. Dériver le vecteur position $\vec{OM}$ par rapport au temps et établir les expressions du vecteur vitesse qu'on notera $\vec{v}_M$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ puis dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$, en fonction de $R, \theta(t)$ et $\dot{\theta}(t)$.
5. En déduire une expression simple de la norme du vecteur vitesse.
6. Déterminer l'expression de l'accélération $\vec{a}_M$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ puis dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$, en fonction de $R, \theta(t), \dot{\theta}(t)$ et $\ddot{\theta}(t)$.
7. Représenter les vecteurs de la base de Frenet $(\vec{e}_N, \vec{e}_T)$, dans le cas où $\dot{\theta}(t) > 0$.
8. Déterminer les composantes de l'accélération dans le repère de Frenet.

Exercice 2 : Mouvement en spirale

On considère un point matériel M , décrivant une spirale dans le plan (xOy) dont les équations paramétriques sont :

$$\begin{cases} x = b \theta \cos(\theta) \\ y = b \theta \sin(\theta) \end{cases},$$

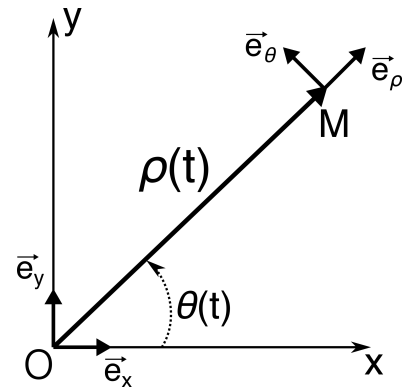
avec b une constante, l'angle θ comme repéré sur le schéma. On notera $\omega = \frac{d\theta}{dt} (= \dot{\theta})$ qui sera une constante positive. A l'origine du temps $t = 0$, nous avons $\theta(0) = 0$.

$(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ et ainsi que $(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$, constituent des repères d'observation, pour le référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, t)$ dans lequel est étudié le mouvement.

1. Déterminer, dans le repère $(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$, les expressions

- (a) du vecteur position $\vec{OM}$,
- (b) du vecteur vitesse $\vec{v}_M$,
- (c) du vecteur accélération $\vec{a}_M$.

2. En déduire l'expression de la norme du vecteur vitesse, notée $\|\vec{v}_M\|$.



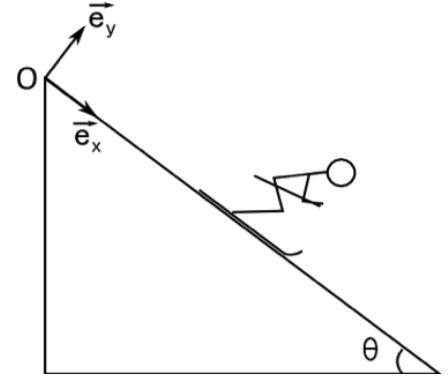
3. Représenter les vecteurs de la base de Frenet $(\vec{e}_T, \vec{e}_N)$ sur le schéma.
4. Montrer que $\vec{e}_T = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega t)^2}} \vec{e}_\rho + \frac{\omega t}{\sqrt{1 + (\omega t)^2}} \vec{e}_\theta$.
5. En se rappelant que $(\vec{e}_T, \vec{e}_N, \vec{e}_B)$ est une base orthonormée directe, déterminer les coordonnées de $\vec{e}_N$ dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$.
6. Etablir les expressions des composantes tangentielle (a_T) puis normale (a_N) de l'accélération $\vec{a}_M$.
7. En déduire l'expression du rayon de courbure R de la trajectoire à n'importe quel instant t .

Dynamique d'un point matériel – Chapitre 2

Forces, Bilan des forces, PFD, Théorème du moment cinétique

Exercice 3 : le skieur de vitesse

Un skieur de masse m descend en ligne droite une piste de vitesse d'inclinaison θ . On assimile le skieur à une masse ponctuelle M . Le mouvement est étudié dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ de repère d'observation $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$. A l'instant $t = 0$ le skieur a une vitesse nulle et se trouve en $(0, 0)$. Lors de sa descente il subit une force due aux frottements de la piste, qu'on va approcher comme un frottement cinétique de coefficient f_c . On néglige les frottements de l'air dans un premier temps.



1. Déterminer dans le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, les expressions de la vitesse $\vec{v}_M$ ainsi que de l'accélération $\vec{a}_M$ du skieur.
2. Faire le bilan des forces subies par le skieur dans le référentiel $\mathcal{R}$ et donner leurs expressions dans le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$.
3. Quelle(s) force(s) exerce(nt) le skieur sur la piste ?
4. En appliquant le PFD, déterminer l'équation différentielle régissant le comportement temporel du vecteur $\vec{v}_M$.
5. Quelle vitesse maximale le skieur peut-il atteindre ?

En réalité, dès que $||\vec{v}_M|| > 18\text{km/h}$, il faut considérer les frottements de l'air, avec une force agissant sur le skieur de la forme :

$$\vec{F}_{\text{air}} = -\beta ||\vec{v}_M|| \vec{v}_M,$$

où β est un coefficient constant.

6. En appliquant le PFD, montrer qu'on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\dot{v}_M + \frac{\beta}{m} v_M^2 = g (\sin \theta - f_c \cos \theta).$$

7. Quelle est la vitesse limite atteinte par le skieur en régime permanent ?
8. Application numérique : $m = 90 \text{ kg}$, $\theta = 28^\circ$, $f_c = 0,2$, $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$, $\beta = 0,09 \text{ N m}^{-2} \text{ s}^2$.
9. Comment faire pour augmenter cette vitesse limite ?

Le record du monde de vitesse de $255,5 \text{ km/h}$ est détenu par le français Simon Billy depuis mars 2023. Il a atteint cette vitesse sur une piste de Vars avec une pente moyenne de 52% , avec un départ à 98% ($\sim 45^\circ$).

Exercice 4 : Le pendule

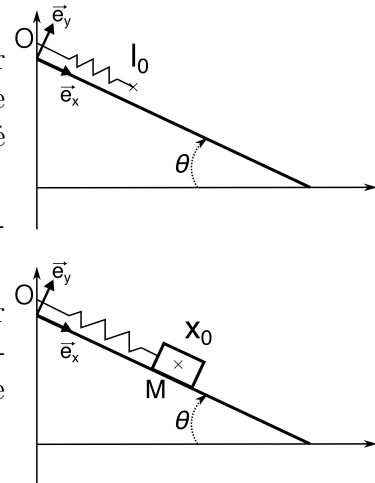
Un point matériel M est suspendu à un fil de longueur l sans masse. La position de M est définie par l'angle θ . On écarte M de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 puis on le lâche sans vitesse initiale. L'origine du temps est prise à cet instant. Le mouvement est étudié dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$, on négligera les frottements dans ce problème et on considèrera le mouvement dans le plan (xOy) .

1. Faire un schéma, en faisant particulièrement attention à représenter les vecteurs $\vec{e}_z$, $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$.
2. Etablir les expressions de $\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}_M$ et de $\vec{a}_M$ dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.
3. Faire le bilan des forces subies par le point matériel M dans le référentiel $\mathcal{R}$ et donner leurs expressions dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.
4. Etablir l'équation différentielle du mouvement en utilisant le théorème du moment cinétique.
5. Résoudre cette équation dans le cas des petites oscillations.
6. Application numérique : Calculer la période des oscillations avec un fil de longueur $l = 1$ m et $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

Exercice 5 : masse accrochée par un ressort sur un plan incliné

On considère une masse m qui se déplace sans frottement sur un plan incliné d'un angle θ constant, retenue par un ressort de constante de raideur k , de longueur à vide l_0 comme représenté sur le schéma.

1. Quel est l'allongement du ressort lorsque la masse ponctuelle m est à l'équilibre ?
2. On réalise dans un second temps une expérience de lâcher qui consiste à écarter la masse m d'une quantité d par rapport à sa position d'équilibre sans vitesse initiale. Décrire le mouvement de la masse qui en résulte.



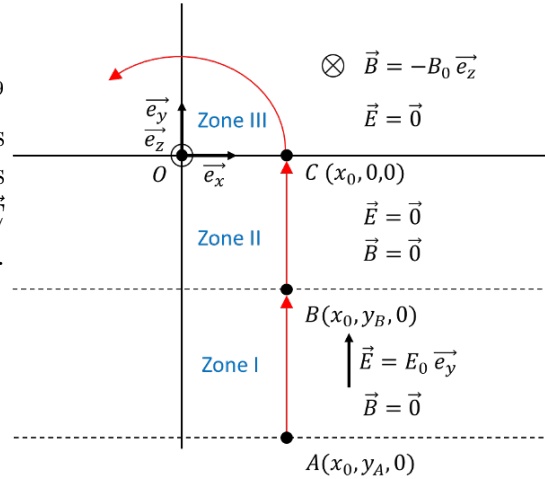
Energie – Chapitre 3

Travail d'une force, Energie potentielle, Théorème de l'énergie cinétique,
Théorème de l'énergie mécanique

Exercice 6 : le spectromètre de masse – mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique et dans un champ magnétique.

On considère une particule de charge $q = 1,6 \times 10^{-19}$ C et de masse $m = 1,67 \times 10^{-27}$ kg se déplaçant dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$. Nous allons étudier à tour de rôle l'effet d'un champ électrique $\vec{E}$ et l'effet d'un champ magnétique $\vec{B}$ sur la particule. On négligera le poids dans la suite de l'exercice.

1. Quelle est la nature de la particule considérée ?
2. Donner l'expression de la force de Lorentz.



Effet du champ électrique (Zone I)

3. La particule M est située à l'instant $t = 0$ en un point A de coordonnées $(x_0, y_A, 0)$. Sa vitesse initiale est nulle. Un champ électrique uniforme ($\vec{E} = E_0 \vec{e}_y$ avec E_0 une constante positive) est appliqué dans la zone I pour $y_A \leq y \leq y_B$.
 - (a) Appliquer le PFD dans le référentiel $\mathcal{R}$ pour déterminer les composantes de la vitesse de la particule.
 - (b) Déterminer la position de la particule au cours du temps. Montrer qu'elle quitte la zone I en passant par le point B .
 - (c) Calculer le travail effectué par la force électrique entre les points A et B en fonction de q , E_0 et $\Delta y = y_B - y_A$.
 - (d) Grâce au théorème de l'énergie cinétique, déterminer la vitesse acquise par la particule lorsqu'elle arrive au point B . On appellera cette vitesse $v_B = v_0$.

Mouvement dans la zone libre (Zone II)

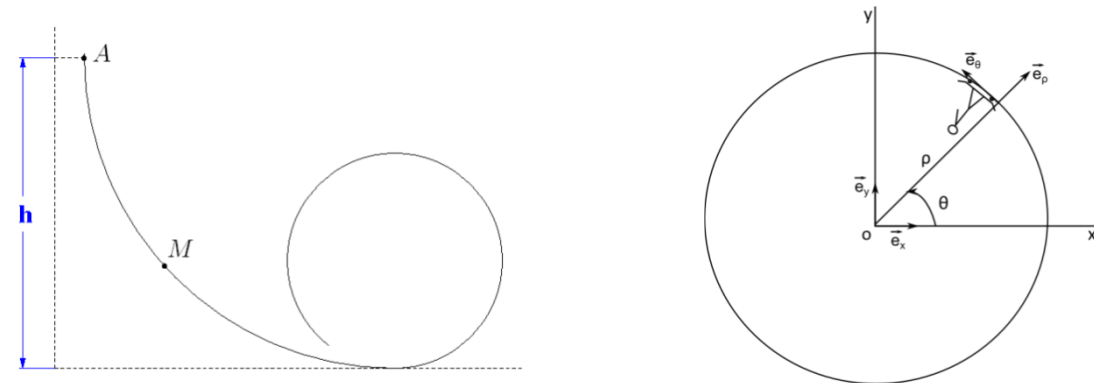
4. Quel est le bilan des forces dans la Zone II où $y_B \leq y \leq 0$. Comment évolue la vitesse de la particule dans cette zone ?

Effet du champ magnétique (Zone III)

5. On définit une nouvelle origine des temps de sorte que la particule M est située à l'instant $t = 0$ au point C de coordonnées $(x_0, 0, 0)$. Sa vitesse initiale est $\vec{v} = v_0 \vec{e}_y$. Un champ magnétique uniforme $\vec{B} = -B_0 \vec{e}_z$, avec B_0 une constante positive, règne dans tout le demi-espace où $y \geq 0$.
 - (a) Exprimer les composantes F_x , F_y , F_z de la force subie par la particule à un instant t quelconque en fonction de B_0 , q et des composantes de la vitesse v_x et v_y .
 - (b) Montrer que le mouvement de la particule est inscrit dans le plan (xOy) .

- (c) A l'aide du théorème de l'énergie cinétique sous forme différentielle, montrer que la norme du vecteur vitesse reste constante au cours de la trajectoire dans la zone III.
- (d) Redonner l'expression de l'accélération dans la base de Frenet.
- (e) En déduire que le mouvement de la particule est circulaire, avec un rayon $R = \frac{v_0}{\omega}$, avec $\omega = \frac{qB_0}{m}$ que l'on nomme pulsation cyclotron.
- (f) En quoi peut-on dire que ce système constitue un spectromètre de masse (système capable de séparer les composants selon leur masse) ?

Exercice 7 : Le skate-boarder



Un skateboarder souhaite réaliser une performance exceptionnelle : il envisage de s'élancer sans vitesse initiale depuis le haut d'une rampe à l'altitude h , de se laisser glisser, puis de terminer sa course par une grande boucle (un looping) de rayon fixe ρ . Plus l'altitude h est petite, plus la performance sera remarquable ! Cependant le skateboarder n'est pas fou : il souhaite calculer au préalable l'altitude h minimum pour être certain de ne pas « décrocher » une fois dans le looping... Dans un premier temps, nous allons nous intéresser au mouvement du skateboarder, assimilé un point matériel M de masse m évoluant à l'intérieur d'un cercle de rayon ρ . Le mouvement se fait sans frottement. On nommera le référentiel d'étude $\mathcal{R}$ supposé galiléen, dans lequel la rampe et le looping sont fixes.

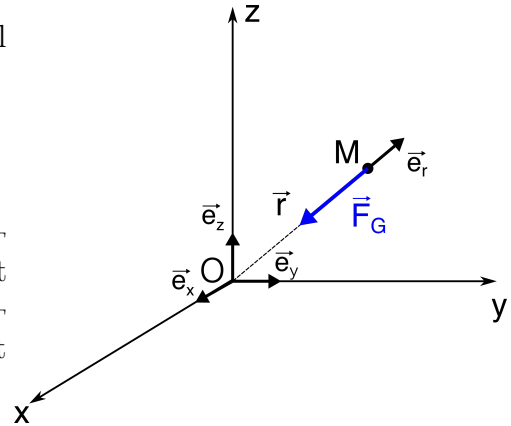
1. Établir l'expression de l'accélération, exprimer la selon les vecteurs de base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$.
2. Lister et étudier le(s) force(s) appliqué(es) sur le skateboarder.
3. Écrire l'équation fondamentale de la dynamique. Que devient cette équation en la projetant sur les vecteurs de base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$?
4. Calculer le travail des forces subies par le skateboarder. En déduire l'expression de l'énergie potentielle du skateboarder.
5. Grâce au théorème de l'énergie mécanique déterminer la norme de vecteur vitesse v en un point quelconque de la trajectoire si v_0 est la norme du vecteur vitesse en bas de la trajectoire.
6. Comment évolue la réaction du support sur le skateboarder en fonction de θ ?
7. Finalement... quelle est l'altitude minimum h à partir de laquelle le skateboarder peut s'élancer sur la rampe sans vitesse initiale, pour que ce dernier adhère à la boucle tout au long de sa trajectoire ?

Exercice 8 : Force centrale et vitesse de libération

La force de gravitation agissant sur un point matériel de masse m sur Terre suit la loi :

$$\vec{F}_G = -\frac{GmM_T}{r^2}\vec{e}_r,$$

où G est la constante universelle de gravitation, M_T la masse de la Terre et r la distance $||\vec{OM}||$, O étant le centre de la Terre. On suppose ici $r > R_T$ avec R_T le rayon de la Terre, l'altitude d'un point par rapport au sol est donc défini par $h = r - R_T$.



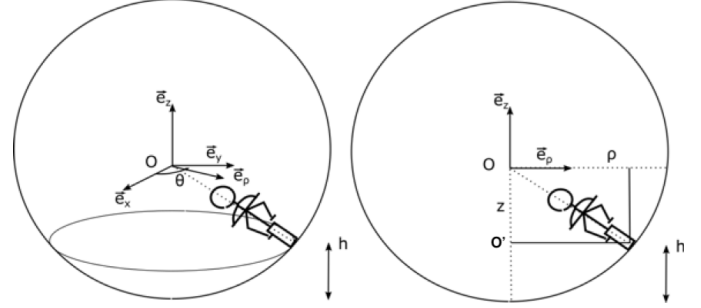
1. Que peut-on dire du travail d'une force conservative ?
2. Montrer que la force de gravitation dérive d'une énergie potentielle $E_p(r)$ que l'on calculera, et on prendra $E_p(\infty) = 0$.
3. En déduire le travail minimal $W(h)$ qu'il faut fournir pour élever la masse m de l'altitude 0 à une altitude h sans lui fournir d'énergie cinétique.
4. On appelle « vitesse de libération » $v_{\text{lib}}(h)$ à l'altitude h , la vitesse minimale que doit avoir le point matériel pour échapper à l'attraction terrestre (et donc s'éloigner jusqu'à l'infini avec une vitesse nulle). Etablir son expression.
5. Applications numériques : Quelle est sa valeur au sol ? Et pour une altitude de 300 km ? On donne $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, $M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $R_T = 6400 \text{ km}$.
6. Quelle est la vitesse de libération à la surface de la Lune ? $M_L = 7,3 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ et $R_L = 1700 \text{ km}$.

Changement de référentiel – Chapitre 4

Référentiels, Lois de composition, PFD dans un référentiel non-galiléen

Exercice 9 : Le globe de la mort

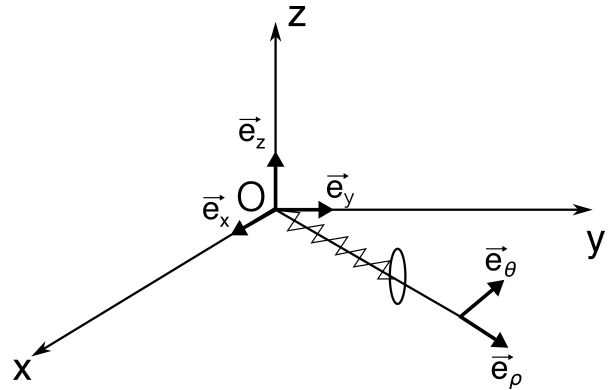
Un cycliste se met en mouvement dans une sphère de rayon R et finit par se stabiliser sur un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire ω à une hauteur h . On considère les frottements nuls. En conséquence, une fois la hauteur h atteinte le cycliste ne pédale plus. Le mouvement sera étudié dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}'(O', \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z, t)$ tournant à la vitesse angulaire constante ω autour de l'axe (Oz) , le référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ est lui galiléen.



1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{O'M}$, $\vec{v}_{M/\mathcal{R}'} = \left. \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'}$ et $\vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = \left. \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}'}$ dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.
2. Faire le bilan des forces subies par le cycliste dans le référentiel $\mathcal{R}'$ et donner leurs expressions dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.
3. Appliquer le PFD dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$ pour déterminer la hauteur h atteinte par le cycliste.
4. Expliquer pourquoi le cycliste n'a plus besoin de pédaler si on considère que les frottements sont nuls.

Exercice 10 : Gyromètre

Un anneau de masse m est enfiché dans une tige qui est en rotation dans le plan (xOy) à vitesse angulaire constante ω autour de l'axe vertical (Oz) . L'anneau est maintenu par un ressort de constante de raideur k . La longueur au repos du ressort est ρ_0 . Nous allons étudier le mouvement de l'anneau assimilé à une masse ponctuelle dans le référentiel $\mathcal{R}'(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z, t)$ non galiléen tournant à la vitesse angulaire constante ω autour de l'axe (Oz) . le référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ est supposé galiléen. A l'instant $t = 0$, l'anneau se situe au point de coordonnées $(\rho = \rho_0, \theta = 0, z = 0)$ et a pour vitesse initiale dans $\mathcal{R}'$: $\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}(0) = \vec{0}$.



1. Représenter les coordonnées ρ et θ sur le schéma.

- Déterminer les expressions des vecteurs position $\overrightarrow{OM}$, vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$ et accélération $\vec{a}_{M/\mathcal{R}'}$ dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

Partie A : On considère que l'anneau peut glisser sans frottement autour de la tige, on notera $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ dans la suite.

- Etablir l'équation différentielle du mouvement de la masse dans le référentiel $\mathcal{R}'$.
- Montrer qu'il existe une position d'équilibre en utilisant la relation $\frac{dE_p}{d\rho} = 0$ et en sachant que les forces inertielle d'entraînement et de rappel sont conservatives.
- Résoudre l'équation différentielle afin de déterminer la position de l'anneau à chaque instant $\rho(t)$, dans le cas où $\omega < \omega_0$.

Partie B : On considère que l'anneau est soumis à une force de frottement fluide linéaire, s'opposant à sa vitesse par rapport à la tige :

$$\vec{f} = -\alpha \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}.$$

- Comment réaliser un tel dispositif pratiquement ?
- Que devient l'équation différentielle du mouvement de l'anneau ?
- La position d'équilibre est-elle modifiée ?
- Trouver la position de l'anneau à chaque instant $\rho(t)$, dans le cas où $\frac{\alpha}{m} = 2\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}$.
- Tracer $\rho(t)$.
- Comment peut-on se servir de ce système pour mesurer une vitesse de rotation ?
- Quel est l'intérêt de ce réglage ? Qu'observerait-on sinon ?