Théorème de superposition,
contexte montage AOP

T. Rocacher

1. La linéarité, rappel

Mathématiquement, une fonction à plusieurs entrées $f(x_1,x_2..x_n)$ est linéaire si elle peut se mettre sous la forme :

$$y=f(x_{1,}x_{2,}\ldots,x_n)=\lambda_1\cdot x_1+\lambda_2\cdot x_2+\ldots+\lambda_n\cdot x_n \quad ,$$

- les coefficients λ_i étant des **constantes**,
- les variables x_i étant **indépendantes**.

Remarque : S'il existe une relation entre deux variables (ou plusieurs), il y a deux possibilités :

- soit la relation est linéaire, par exemple : $x_2=k\cdot x_1$, auquel cas la relation met en jeu une variable de moins, mais reste linéaire :
$$y=f(x_{1,}x_{2,}\ldots,x_n)=(\lambda_1+k)\cdot x_1+\lambda_3\cdot x_3+\ldots+\lambda_n\cdot x_n=y=f(x_{1,}x_{3,}\ldots,x_n) \quad ,$$
- soit la relation n'est pas linéaire et la fonction $f(x_1,x_2..x_n)$ n'est plus linéaire non plus.

2. Théorème de superposition

2.1. Explication du théorème de superposition

En électronique, ces propriétés de linéarité sont mises à profit sur des systèmes physiques linéaires : si y(t) est la sortie d'un système linéaire, et $x_i(t)$ les entrées, alors **y(t) est le résultat des effets de chacune des entrées prises séparément, individuellement (les autres étant éteintes)**:

- $x_1(t)$ donne $y_1(t)$ avec $x_i = 0$ pour tout $i \neq 1$,
- $x_2(t)$ donne $y_2(t)$ avec $x_i = 0$ pour tout $i \neq 2$,
- …
- $x_n(t)$ donne $y_n(t)$ avec $x_i = 0$ pour tout $i \neq n$,

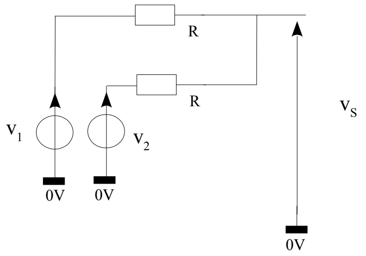
$$\rightarrow \boxed{y(t) = y_1(t) + y_2(t) + \ldots + y_n(t)}$$

Remarque 1 : Un système linéaire en électronique est constitué uniquement d'éléments linaires : sources de tension (de courant) contrôlées **non saturantes**, de dipôles linéaires (R, C, L).

Remarque 2 : une entrée **éteinte** est une source dont **on laisse juste l'impédance interne de sortie**. Elle ne doit pas être oubliée ! Le moyen simple de ne pas l'oublier est d'effacer sur le schéma le cercle qui représente la source et de bien laisser le trait à l'intérieur de la source (pour une source de tension on obtient un court-circuit, pour une source de courant, un circuit ouvert).

Remarque 3 : Si une entrée dépend d'une autre, et ce, de manière linéaire, on ne peut pas appliquer directement le principe de superposition.

Exemple illustrant la remarque 3 :



Supposons$V_2 = 5V_1$. Appliquons la méthode de superposition:

- $V_2=0 \xrightarrow{(1)} V_{s1}=\frac{V_1}{2}$
- $V_1=0 \xrightarrow{(2)} V_2=0 \xrightarrow{(3)} V_{s2}=0$

$\xrightarrow{(4)} V_s=V_{s1}+V_{s2}=\frac{V_1}{2}$

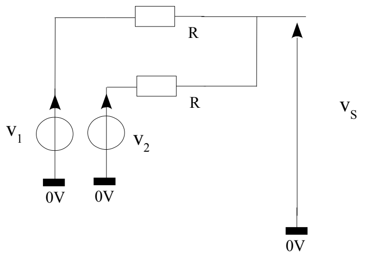
Bien évidemment ce résultat est FAUX ! L'erreur est l'implication n°2.

Le théorème de superposition : *« si un système est linéaire, alors la sortie est le résultat de l'effet de chacune des entrées prises séparément »*, ne peut s'appliquer **que si les sources sont indépendantes**.

2.2. Le théorème de superposition dans le cas de sources liées vraiment impossible ?

Si les sources sont liées, on ne peut pas utiliser le théorème précédent stricto sensu. Mais on peut ignorer la dépendance pour la considérer **après** l'application du théorème.

Reprenons l'exemple précédent :



Ignorons que $V_2 = 5V_1$. Appliquons la méthode :

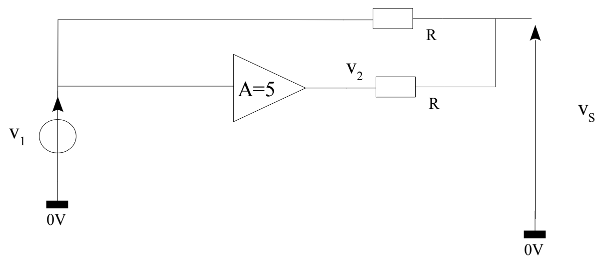
- $V_2=0 \rightarrow V_{s1}=\frac{V_1}{2}$
- $V_1=0 \rightarrow\rightarrow V_{s2}=\frac{V_2}{2}$ (nous ignorons provisoirement $V_2=5V_1$)

$\rightarrow V_s=V_{s1}+V_{s2}=\frac{V_1+V_2}{2}$

Considérons maintenant que $V_2 = 5V_1$:

$$V_s=\frac{V_1+V_2}{2}=\frac{V_1+5\cdot V_1}{2}=3\cdot V_1$$

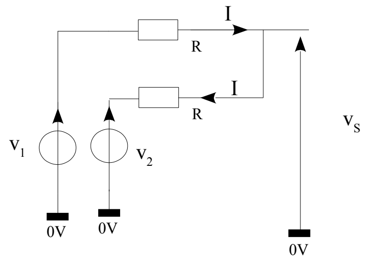
Cette méthode ne doit pas choquer. Pour se convaincre de cette approche dans cet exemple, on observe que la relation $V_2 = 5V_1$ traduit un amplificateur. On peut le schématiser comme suit :



On voit très clairement ici que la cause de Vs est bien V_1 **et** V_2.
La cause de V_2 est V_1. Donc l'un dans l'autre, on voit bien que Vs ne dépend que de V_1.

La méthode ici consiste donc à calculer en partant de la fin (la sortie). D'abord on exprime Vs en fonction des deux tensions prises séparément et considérées indépendantes, ensuite on remonte à V_1 pour supprimer V_2 qui n'est pas une variable supplémentaire du système.

Bien évidemment on peut aussi utiliser une méthode plus classique :

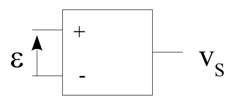


$$V_s=V_2+R\cdot I \quad , \quad I=\frac{V_1-V_2}{2\cdot R} \quad \text{soit :}$$

$$V_s=V_2+R\cdot\frac{V_1-V_2}{2\cdot R}=5\cdot V_1+\frac{V_1-5\cdot V_1}{2}=5\cdot V_1+\frac{-4\cdot V_1}{2}=3\cdot V_1$$

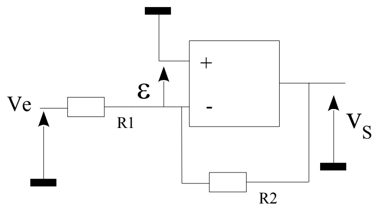
3. Le théorème de superposition et l'AOP

3.1. Rappel AOP



Bien qu'étant relativement complexe un amplificateur opérationnel est avant tout un <u>amplificateur</u> ! Ce qui cause v_S, c'est ε, **rien d'autre**. C'est la raison pour laquelle, même si la valeur de l'amplification est immense, la tension **<u>ε ne peut être considérée strictement nulle</u>**, aussi faible soit-elle. Une tension de sortie sinusoïdale ne peut l'être que si ε l'est aussi.

3.2. Montage inverseur analysé avec le théorème de superposition



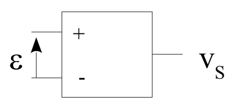
L'objectif étant de déterminer Vs, il est logique d'en déterminer la cause, à savoir ε.
Cette tension dépend uniquement de Vs et de Ve. Ces deux tensions sont indépendantes, le théorème de superposition peut donc s'appliquer sans réserve.
Une fois déterminée, Vs s'obtient en faisant intervenir l'amplification de l'AOP.

<u>Remarque 1</u> : ici l'AOP est modélise de la manière suivante : $V_s = A \cdot \varepsilon$. L'AOP est donc une source de tension contrôlée (linéaire donc).

<u>Remarque 2</u> : cette modélisation n'est valable que **si le montage est stable !** (marge de phase en boucle ouverte à vérifier en toute rigueur).

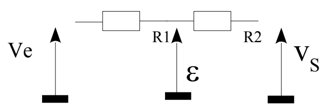
Analyse :

- *ε est la cause de Vs :*



$$V_s = A \cdot \varepsilon$$

- *Ve et Vs sont les causes de la tension ε :*



La tension ε s'écrit : $-\varepsilon = V_e \cdot \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} + V_s \cdot \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$ (5)

La tension Vs vaut donc : $V_s = A \cdot \varepsilon = -A \cdot V_e \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2} - A \cdot V_s \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2}$, on obtient alors :

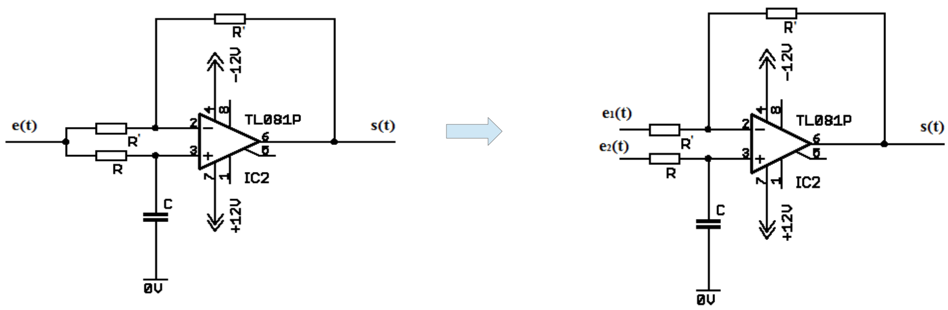
$$V_s \cdot (1 + A \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2}) = -A \cdot V_e \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2} \quad \text{, soit} \quad \frac{V_s}{V_e} = \frac{-A \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2}}{(1 + A \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2})}$$

Si A tend vers l'infini, on retrouve bien $\frac{V_s}{V_e} \approx \frac{-R_2}{R_1}$ (6)

Bien entendu, le calcul peut être écourté en posant $\varepsilon \approx 0$ après avoir exprimé ε au début du raisonnement (5) : $-\varepsilon = V_e \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2} + V_s \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2} \approx 0$, ce qui donne directement le résultat (6).

3.3. Montage déphaseur avec le théorème de superposition

Le schéma étudié est donné ci-dessous à gauche. Pour simplifier le calcul, on peut utiliser le théorème de superposition en modifiant les entrées. Il suffit de séparer les deux entrées en deux sources à priori indépendantes, e_1 et e_2 puis d'appliquer dans ces nouvelles conditions le théorème de superposition. Ensuite seulement on remet en place la dépendance en écrivant $e = e_1 = e_2$.



- ***e₂(p) = 0 :*** l'entrée + est à 0V, on reconnaît immédiatement un inverseur, $s_1(p) = -e_1(p)$.
- ***e₁(p) = 0 :*** *n*ous voyons immédiatement un filtre RC entre $e_2(p)$ et l'entrée +. Par ailleurs, entre l'entrée + et la sortie, on reconnaît un amplificateur non inverseur. On peut donc écrire : $s_2(p) = (1 + \frac{R,}{R'}) \cdot \frac{1}{1+RCp} \cdot e_2(p) = \frac{2}{1+RCp} \cdot e_2(p)$.
- On applique le théorème de superposition : $s(p) = -e_1(p) + \frac{2}{1+RCp} \cdot e_2(p)$
- on lie les source **après** avoir appliqué le théorème :

$$s(p) = -e(p) + \frac{2}{1+RCp} \cdot e(p) = \frac{2-(1+RCp)}{1+RCp} \cdot e(p) = \frac{1-RCp}{1+RCp} \cdot e(p)$$

$\frac{s(p)}{e(p)} = \frac{1-RCp}{1+RCp}$, relation bien connue du déphaseur.