

Fiche de cours n°1 : tracé des diagrammes de Bode

I] Qu'est-ce qu'un diagramme de Bode ?

Considérons un filtre linéaire (régi par une équation différentielle entrée/sortie linéaire). On envoie en entrée de ce filtre un signal sinusoïdal $V_E(t)$ d'amplitude V_{EM} et de fréquence f (la pulsation de ce signal est égale à $\omega = 2\pi \cdot f$). Le filtre réagit en donnant en sortie un signal $V_S(t)$ également sinusoïdal, de même fréquence f , mais d'amplitude et de phase différentes.

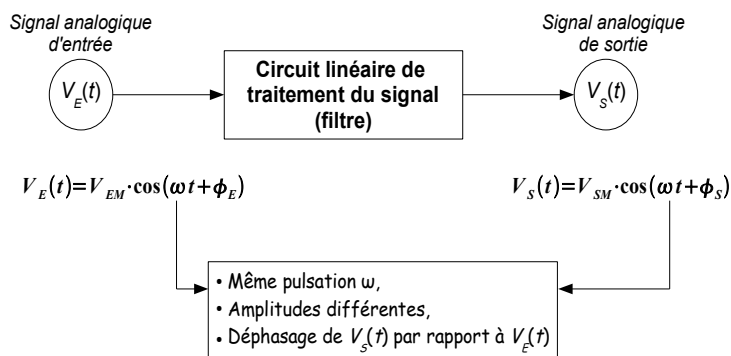


Figure 1 : Circuit linéaire soumis à un signal d'entrée sinusoïdal.

A partir de la fonction de transfert de ce filtre linéaire (notée $H(j\omega)$), on définit :

- le gain en décibels : $G_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log(|H(j\omega)|)$,

(La fonction log désigne ici le logarithme de base 10).

- le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée : $\Phi(\omega) = Arg(H(j\omega))$.

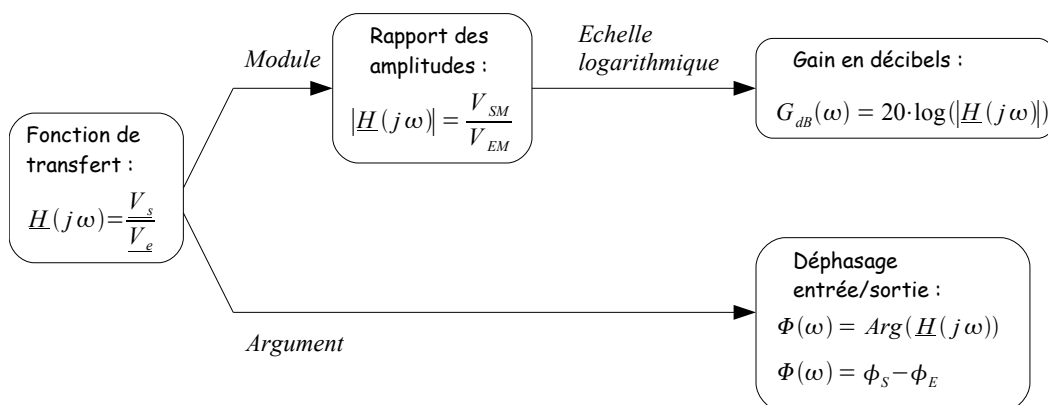


Figure 2 : détermination du gain et du déphasage.

Le diagramme de Bode du filtre est la représentation du gain $G_{dB}(\omega)$ et du déphasage entrée/sortie $\Phi(\omega)$ en fonction de la pulsation ω . En abscisse, les pulsations ω sont portées **en échelle logarithmique**. Un diagramme de Bode est en réalité constitué de deux diagrammes : le diagramme de gain, et le diagramme de phase.

2) Pourquoi tracer un diagramme de Bode ?

Pour connaître le comportement d'un filtre, il est important de savoir s'il amplifie ou atténue le signal d'entrée, et de combien il le déphase. Bien sûr, le comportement d'un filtre évolue en fonction de la fréquence. Ainsi, un filtre qui amplifie le signal d'entrée pour certaines fréquences, pourra atténuer celui-ci dans certaines autres gammes de fréquences. Le diagramme de Bode permet de renseigner sur le comportement fréquentiel d'un filtre.

3) Comment tracer un diagramme de Bode ?

Les fonctions qui, à la variable ω , associent $G_{dB}(\omega)$ et $\Phi(\omega)$ sont la plupart du temps compliquées à étudier. C'est pourquoi on préfère en général tracer un diagramme de Bode simplifié que l'on appelle diagramme asymptotique.

- 1) On commence tout d'abord par déterminer les asymptotes de $G_{dB}(\omega)$ et $\Phi(\omega)$ lorsque ω tend vers 0, puis lorsque ω tend vers l'infini. Pour cela, on cherche un équivalent (ou une limite) de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$.
- 2) On calcule la valeur de $\underline{H}(j\omega)$ pour des valeurs particulières de ω . Par exemple, on pourra selon les cas s'intéresser à des valeurs de ω :
 - qui annulent la partie imaginaire ou la partie réelle du dénominateur de $\underline{H}(j\omega)$,
 - ou pour lesquelles l'argument de $\underline{H}(j\omega)$ vaut $-\pi/4$, ou $-\pi/2$, ou $-3\pi/4$...
 - ou d'autres valeurs particulières ...

=> On déduit de ces valeurs particulières de ω des points particuliers par lesquels passe le diagramme réel de Bode. Il est ainsi possible de placer le diagramme réel par rapport au diagramme asymptotique.

4) Exemple de tracé : le circuit passe-bas du premier ordre :

Considérons la fonction de transfert d'un circuit passe-bas du premier ordre :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\tau\omega} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

(Avec

- $H_0 > 0$,
- $\omega_c > 0$ et $\omega_c = \frac{1}{\tau}$ (τ est la constante de temps du système linéaire du premier ordre).

- Etude de l'asymptote basses fréquences (lorsque ω tend vers 0) :

$$\frac{\omega}{\omega_c} \ll 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \underline{H}(j\omega) = H_0 \quad (1)$$

On en déduit que :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log(H_0)$$

Ainsi le diagramme de gain présente une asymptote horizontale d'équation $Y_1(\omega) = 20 \cdot \log(H_0)$.

D'autre part, il résulte de l'équation (1) que :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \Phi(\omega) = 0$$

Le diagramme de phase présente lui aussi une asymptote horizontale lorsque ω tend vers 0.

- Etude de l'asymptote hautes fréquences (lorsque ω tend vers $+\infty$) :

$\frac{\omega}{\omega_c} \gg 1$ donc le module de $\underline{H}(j\omega)$ devient un infiniment petit lorsque ω tend vers $+\infty$.

Dans cette condition, nous pouvons écrire une expression équivalente à $\underline{H}(j\omega)$:

$$\underline{H}(j\omega) \approx \frac{H_0}{j \frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{H_0 \cdot \omega_c}{j \omega} \quad (2)$$

En calculant le module de cette expression approchée de $\underline{H}(j\omega)$, on en déduit que :

$$G_{dB}(\omega) \approx 20 \cdot \log(H_0 \cdot \omega_c) - 20 \cdot \log(\omega)$$

Ceci revient à approximer $G_{dB}(\omega)$ par une fonction affine de $\log(\omega)$. Comme on représente le diagramme de Bode en utilisant une échelle logarithmique en abscisse, on obtient par conséquent une asymptote oblique (lorsque ω tend vers $+\infty$) d'équation :

$$Y_2(\Omega) = 20 \cdot \log(H_0 \cdot \omega_c) - 20 \cdot \Omega \quad ,$$

en posant $\Omega = \log(\omega)$.

La pente de l'asymptote ainsi obtenue vaut -20 décibels par décade. En effet, si on considère deux valeurs de pulsations séparées par une décade ω_1 et ω_2 , c'est à dire telles que $\omega_2 = 10 \cdot \omega_1$, alors on constate que

$$Y_2(\omega_2) = Y_2(\omega_1) - 20 \quad .$$

D'autre part, de l'expression (2) on déduit que :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Arg}[\underline{H}(j\omega)] = \text{Arg}\left[\frac{H_0 \cdot \omega_c}{j \omega}\right] = -\frac{\pi}{2}$$

Donc le déphasage $\Phi(\omega)$ tend vers $-\pi/2$ lorsque ω tend vers $+\infty$.

- Etude de points particuliers du diagramme réel :

On remarque la valeur particulière $\omega = \omega_c$.

Cette valeur particulière possède deux propriétés.

D'une part, on a
$$\underline{H}(j\omega_c) = \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega_c}{\omega_c}} = \frac{H_0}{1 + j} \quad .$$

Comme $|1 + j| = \sqrt{2}$, on en déduit que $|\underline{H}(j\omega_c)| = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$.

Le passage au gain en décibels nous donne :

$$G_{dB}(j\omega_c) = 20 \cdot \log\left(\frac{H_0}{\sqrt{2}}\right) = 20 \cdot \log(H_0) - 20 \cdot \log(\sqrt{2})$$

Avec $20 \cdot \log(\sqrt{2}) \simeq 3,01$.

D'où $G_{dB}(j\omega_c) = G_{MAX} - 3$

Le gain obtenu à la pulsation ω_c est égal au gain maximum $- 3\text{dB}$. Pour cette raison, on nomme ω_c la pulsation de coupure à -3dB .

En ce qui concerne la phase, on remarque que :

$$\phi(\omega_c) = \text{Arg}[\underline{H}(j\omega_c)] = \text{Arg}\left[\frac{H_0}{1+j}\right] = -\frac{\pi}{4}$$

D'autre part, la valeur ω_c présente une autre propriété : cette pulsation correspond au point d'intersection des deux asymptotes de la courbe $G_{dB}(\omega)$. Pour s'en convaincre, il suffit de résoudre l'équation $Y_1(\omega)=Y_2(\omega)$. On trouve alors que ω_c est solution de cette équation.

A l'issue de cette étude, nous obtenons finalement le diagramme de Bode suivant :

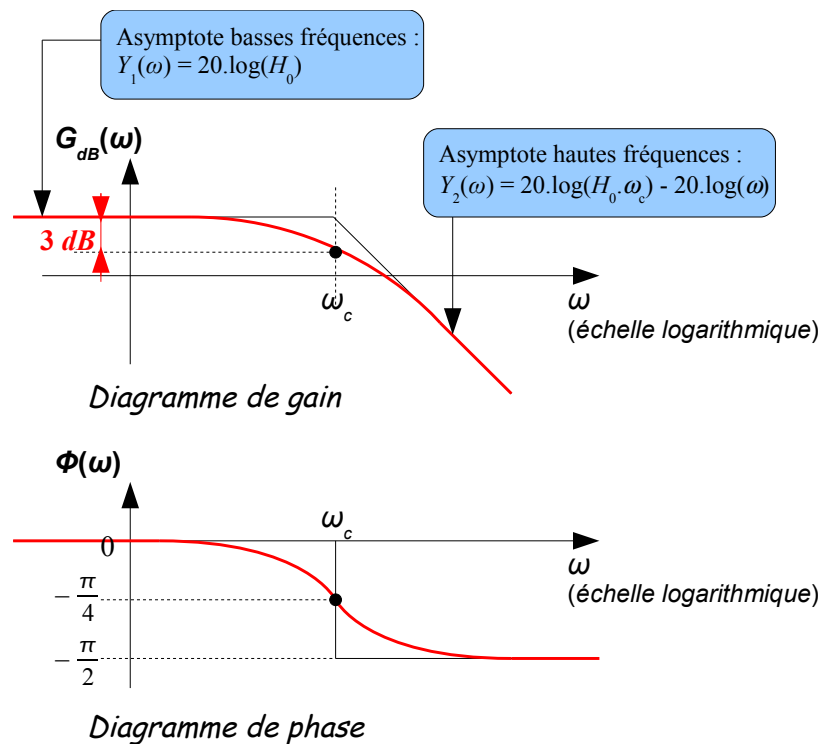


Figure 3 : diagramme de Bode (asymptotique et réel) du circuit passe-bas d'ordre 1.
(En noir : diagramme asymptotique de Bode,
en rouge : diagramme réel de Bode)