
Formalisme des grandeurs tension et courant dans un système à découpage

Le document a pour but d'apprendre à formaliser les grandeurs tension / courant dans un système à découpage.

Les 3 premières parties abordent le cas d'une charge RL excitée par un signal carré, puis contrôlée par un hacheur simple quadrant. Une première séparation entre "grandeur continue" et "grandeur haute fréquence" est introduite. Dans la partie 4, on introduit la grandeur "lentement variable", particulière aux convertisseurs d'énergie statique à découpage.

Table des matières

1.Charge RL en réponse à un échelon.....	2
2.Charge RL excitée par un signal carré	3
2.1.Le signal carré est symétrique.....	3
2.2.Le signal carré n'est pas symétrique.....	4
3.Calcul de l'ondulation de courant dans le cas d'un hacheur simple quadrant, régime permanent.....	5
3.1.Analyse statique	7
3.2.Analyse dynamique HF.....	7
3.3.Synthèse des analyses.....	9
4.Cas d'un rapport cyclique lentement variable.....	10
4.1.Hypothèses, cadre du formalisme.....	10
4.2.Ecriture du rapport cyclique.....	10
4.3.Formalisme des grandeurs courant & tension.....	11
4.4.Exploitations de ce formalisme.....	11

Auteur : T.ROCACHER

1. Charge RL en réponse à un échelon

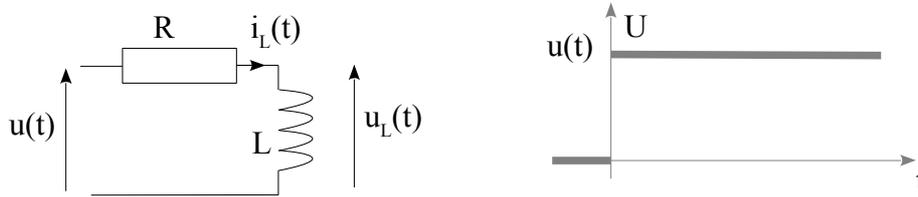


fig. 1 : circuit LR, échelon

Une des premières choses à noter avec ce type de circuit, c'est que le courant i_L **ne peut être discontinu**. En effet, ce dernier est directement lié à l'énergie stockée dans la bobine.

Rappelons l'énergie stockée dans une bobine : $W = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_L^2$.

Comme la puissance est la vitesse de transfert de l'énergie (la puissance est un débit d'énergie),

$P = \frac{dW}{dt}$, et que la puissance ne peut être infinie, l'énergie ne peut pas être discontinue.

Afin de déterminer $i_L(t)$, il faut résoudre l'équation différentielle faisant intervenir $i_L(t)$:

L'équation différentielle du système est $u(t) = R \cdot i_L(t) + L \frac{di_L(t)}{dt}$.

- Solution de l'équation sans second membre (régime libre) : $i_L(t) = K e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$
- Equation particulière (régime permanent, dérivées nulles) : $i_L = \frac{U}{R}$
- Solution complète : $i_L(t) = K e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{U}{R}$

à $t = 0$, $i_L = 0$, donc $0 = K + \frac{U}{R}$,

On obtient donc l'équation du courant :

$$i_L(t) = \frac{U}{R} \cdot (1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t})$$

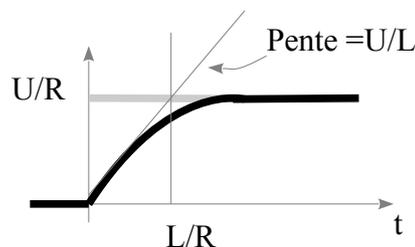


fig. 2 : circuit LR, réponse à un échelon

Pente à l'origine :

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{U}{L} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} , \text{ donc } \boxed{\frac{di_L(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{U}{L}}$$

Cas particulier important : R négligeable devant L.

Le circuit devient alors le suivant :

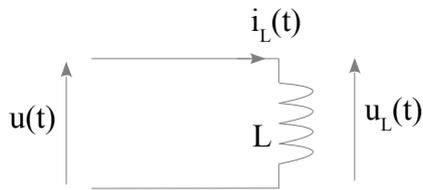


fig. 3 : circuit LR simplifié : L

$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$ c'est à dire $i_L(t) = \frac{1}{L} \cdot \int u_L(t) dt = \frac{U}{L} \cdot t$. On retrouve ici le comportement du circuit RL en tout début de charge.

2. Charge RL excitée par un signal carré

2.1. Le signal carré est symétrique

Le signal $u(t)$ évolue de $-U$ à $+U$, avec au départ $i_L(0) = 0$.

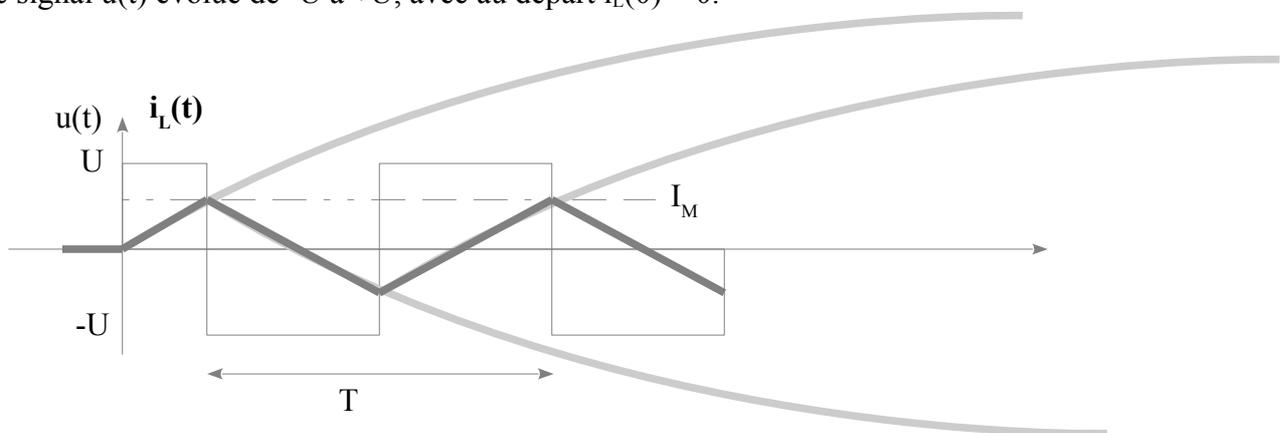


fig. 4 : évolution du courant dans la self sur excitation carré 50%

Dans le cas particulier d'un signal carré dont la fréquence est élevée ($T \ll L/R$), même s'il existe une résistance, l'évolution du courant prend la forme d'un triangle.

2.2. Le signal carré n'est pas symétrique

Dans le cas d'un signal carré avec un rapport cyclique de 75%, le courant va augmenter, en moyenne, jusqu'à atteindre son régime permanent :

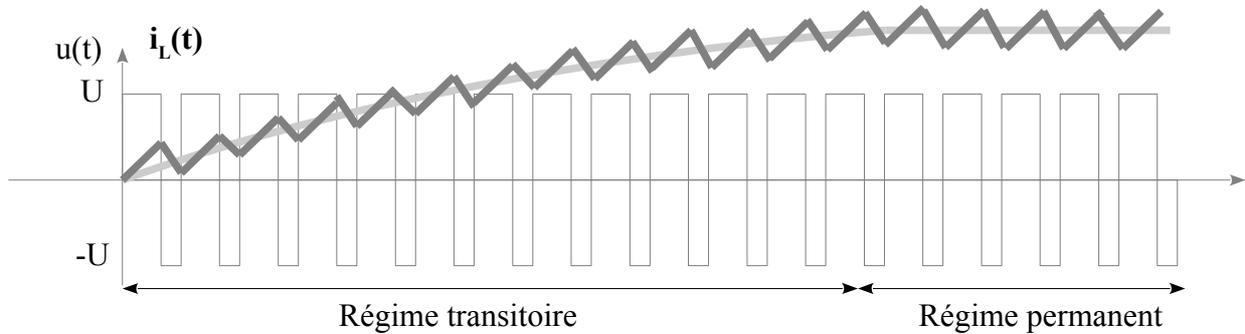


fig. 5 : évolution du courant dans la self sur excitation carré 75%

Afin de bien comprendre comment s'obtient la courbe de courant, il faut séparer la tension continue d'entrée en deux tensions, l'une continue (éventuellement **lentement** variable, cas de l'onduleur), l'autre variable en fréquence élevée à valeur **moyenne nulle** (celle du hacheur).

$$u(t) = u_0 + \tilde{u}_{HF}(t)$$

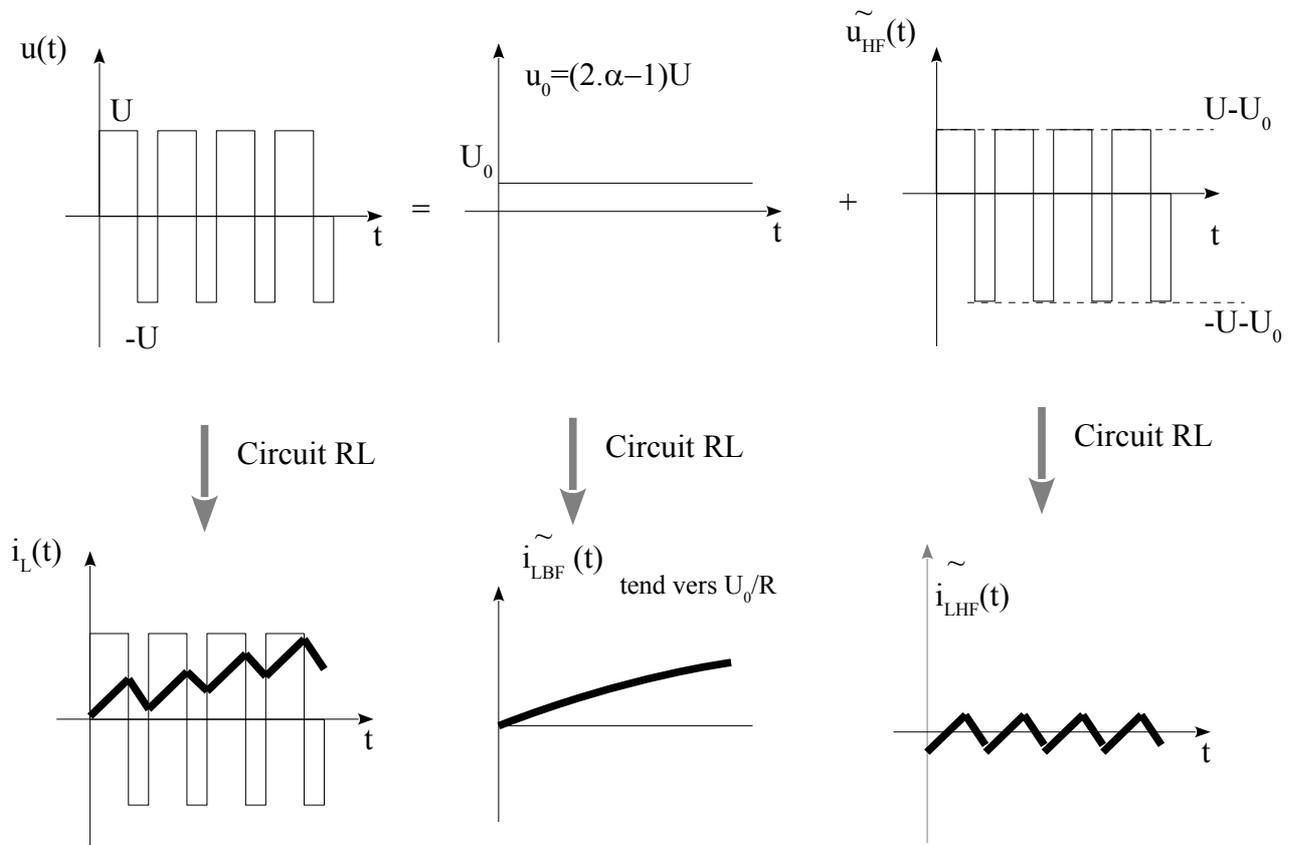


fig. 6 : allure du courant : séparation continu / alternatif

3. Calcul de l'ondulation de courant dans le cas d'un hacheur simple quadrant, régime permanent

Rappel du schéma de base :

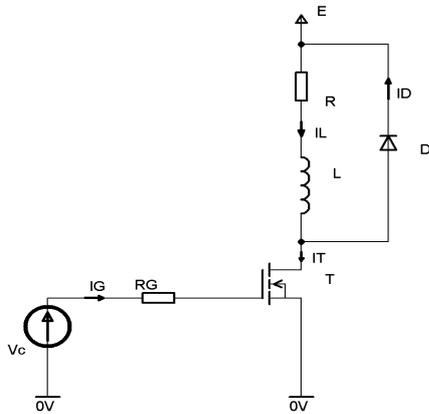
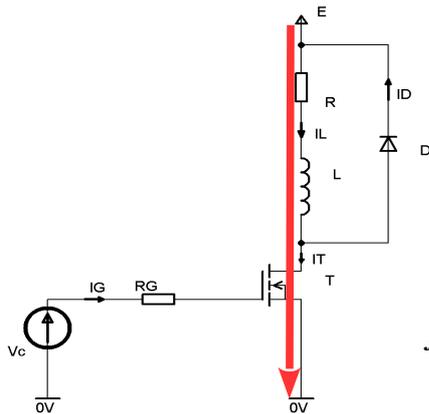


fig. 7 : Hacheur simple quadrant

Hypothèses :

- On ne considère pas les problèmes de commutation
- La diode est idéale
- R_G vaut 0
- Quand le MOS conduit il présente une résistance R_{dson} nulle entre drain et source.

Phase 1 : Le MOS est conducteur ($V_{GS} > V_T$)



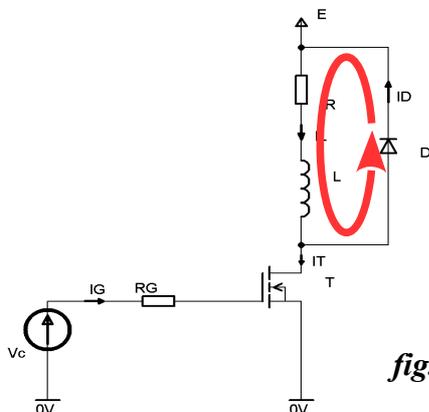
Le circuit RL est soumis à +E.

Le courant I_L traverse

- Le MOS
- La batterie (E) non représentée

fig. 8 : Circulation du courant dans la charge MOS conducteur

Phase 2 : Le MOS est bloqué ($V_{GS} = 0$)



Le circuit RL est fermé via la diode supposée idéale, il est donc soumis à 0V.

Le courant I_L se ferme donc à travers la diode D. Le courant débité par la batterie est donc nulle (elle est déconnectée du circuit).

fig. 9 : Circulation du courant dans la charge MOS bloqué

La tension aux bornes du circuit RL vaut donc soit E, soit 0 et à chaque fois, la résistance de Thévenin est nulle (Batterie $R_s=0$, Diode : $R_d = 0$).

Par conséquent on peut parfaitement modéliser le circuit RL de la manière suivante :

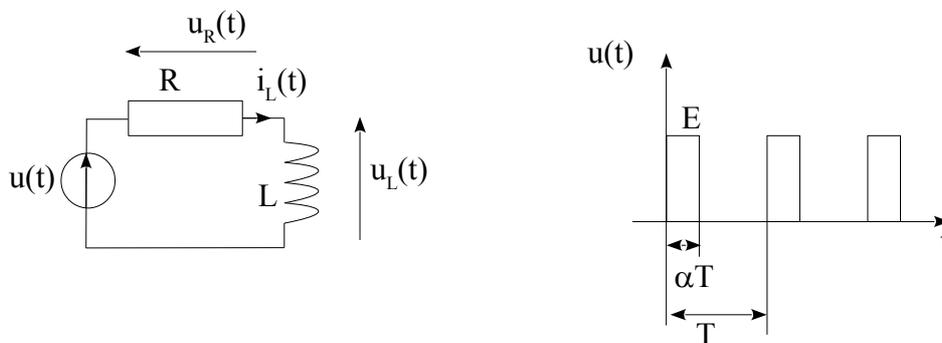


fig. 10 : Schéma d'analyse simplifié du circuit hacheur simple quadrant sur charge LR

Appliquons la méthode consistant à séparer $u(t)$ en une tension continue et une tension à valeur moyenne nulle (AC de l'oscilloscope) :

$$u(t) = U_0 + u_{HF}(t)$$

Dès lors, on va pouvoir séparer les deux comportements :

- **statique** : il s'agit là de l'**essentiel**, ce qui produit la puissance. On considérera dans l'étude que le régime permanent est atteint (voir figure 5).
- **Dynamique HF** : C'est la partie haute fréquence (fréquence PWM de plus de 20 kHz en général). Ce comportement est secondaire mais il peut nuire s'il provoque trop d'ondulation du courant autour de sa valeur moyenne. Il faut donc l'analyser.

On obtient alors, au niveau des tensions :

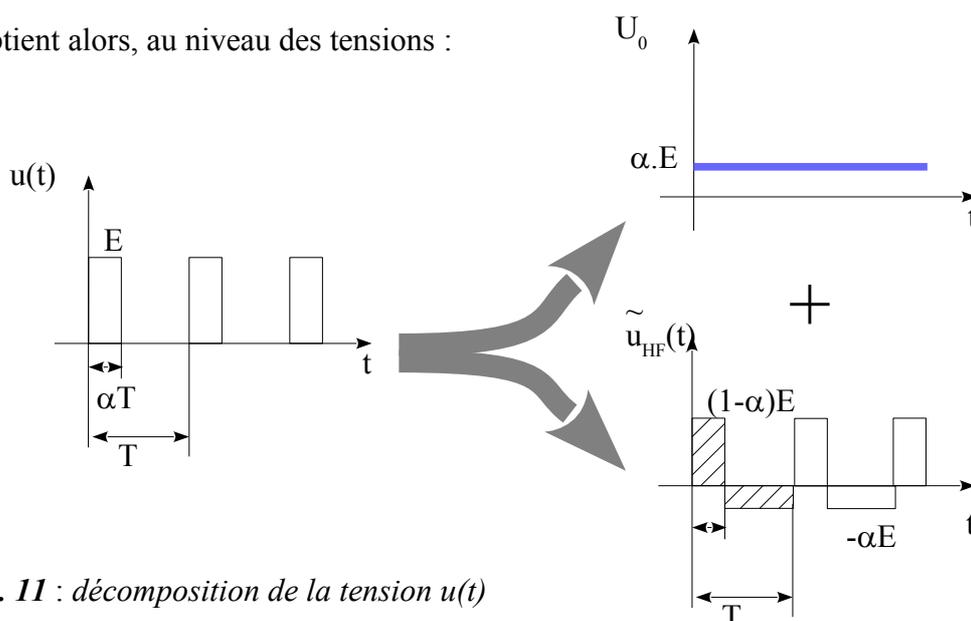
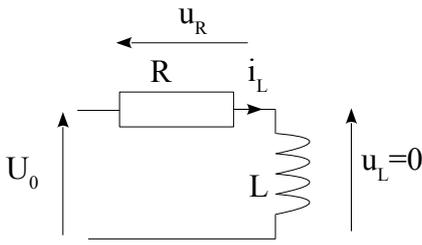


fig. 11 : décomposition de la tension $u(t)$

3.1. Analyse statique



En régime permanent, courant et tension sont continues et $u_L=0$.

En effet si tel n'était pas le cas ($u_L = U_{L0}$), $i_L(t) = \frac{1}{L} \cdot \int u_L(t) dt$

soit $i_L(t) = \frac{U_{L0}}{L} \cdot t + cste$ c'est à dire une croissance infinie !

→ Impossible.

fig. 12 : Schéma d'analyse simplifié du circuit LR en continu

Le schéma se résume alors à une simple résistance, on obtient alors $i_L = I_0 = U_0 / R = \alpha E / R$.

$$I_0 = \frac{U_0}{R} = \frac{\alpha \cdot E}{R}$$

3.2. Analyse dynamique HF

Le schéma reste identique, simplement la source de tension est à valeur moyenne nulle :

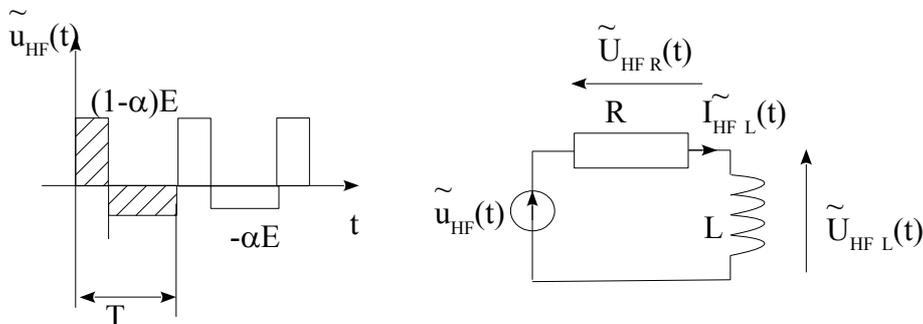


fig. 13 : Schéma d'analyse simplifié du circuit LR en alternatif HF pur (AC de l'oscilloscope)

Hypothèses :

La fréquence de découpage est choisie suffisamment grande pour que l'ondulation de courant (que l'on cherche à déterminer) soit raisonnable (pas trop importante). Cela peut se traduire de plusieurs manières :

– dans le domaine du temps : $T \ll L/R$

– dans le domaine des fréquences: le circuit LR est un passe-haut $T(p) = \frac{\frac{L}{R} \cdot p}{1 + \frac{L}{R} \cdot p}$. Le

fondamental de $\tilde{u}_{HF}(t)$, $1/T$, est très grand devant la fréquence de coupure du filtre ,

$f_c = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \frac{L}{R}}$. Ce qui implique que la quasi totalité de $\tilde{u}_{HF}(t)$ est appliquée

directement à l'inductance L.

Dans ces conditions le schéma se simplifie encore :

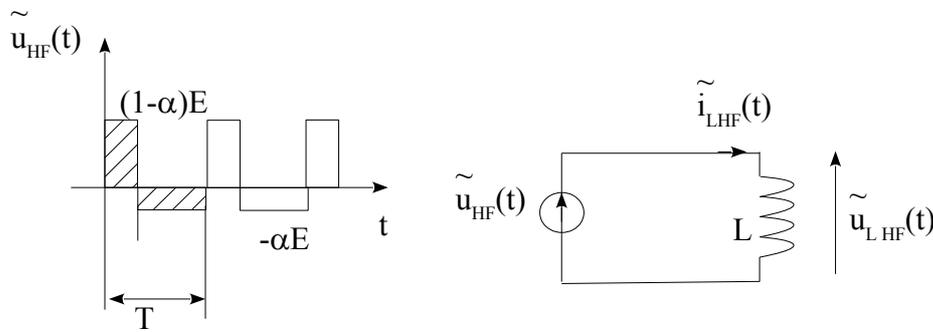


fig. 14 : Schéma d'analyse simplifié du circuit LR , seconde simplification

L'analyse devient alors triviale. Il suffit d'écrire l'évolution du courant dans la self en fonction de sa tension, pendant l'impulsion positive par exemple :

$$i_{LHF}^{\sim}(t) = \frac{1}{L} \cdot \int_0^{\alpha \cdot T} u_{LHF}^{\sim}(t) \cdot dt = \frac{1}{L} \cdot \int_0^{\alpha \cdot T} (1-\alpha) \cdot E \cdot dt = (1-\alpha) \cdot E \cdot t + i_{LHF}^{\sim}(0)$$

Il s'agit d'une droite croissante qui démarre à partir de $i_{LHF}^{\sim}(0)$, valeur forcément négative et surtout minimale que nous appellerons i_{min}^{\sim} , $i_{min}^{\sim} = i_{LHF}^{\sim}(0)$.

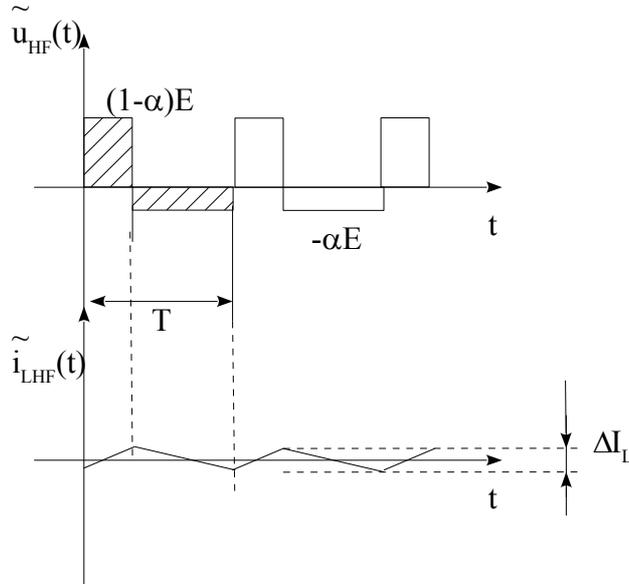
Le courant va donc augmenter jusqu'à une valeur maximale, i_{Max}^{\sim} , atteinte à $t = \alpha T$:

$$i_{Max}^{\sim} = i_{LHF}^{\sim}(\alpha \cdot T) = \frac{(1-\alpha) \cdot E \cdot \alpha \cdot T}{L} + i_{min}^{\sim} \text{ soit}$$

$$\Delta i_L = i_{Max}^{\sim} - i_{min}^{\sim} = \frac{(1-\alpha) \cdot E \cdot \alpha \cdot T}{L} ,$$

Voici donc en résumé les résultats de cette analyse :

$$\Delta i_L = \frac{(1-\alpha) \cdot \alpha \cdot E}{L \cdot F} \quad , \text{ avec } F = 1/T, \text{ fréquence de la PWM}$$

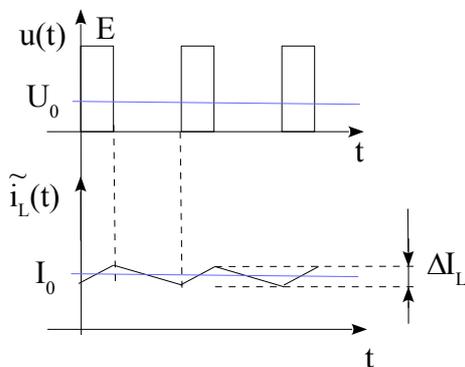


On montre facilement que l'ondulation est maximale pour $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\Delta i_{LMAX} = \frac{E}{4 \cdot L \cdot F}$$

3.3. Synthèse des analyses

Le résultat des analyses continue et dynamique donne donc les courbes suivantes :



Ces courbes sont valables sous les conditions suivantes :

- **Régime permanent** (le courant moyen I_0 a atteint sa valeur stable et n'en bouge plus)
- **Période de PWM très petite** devant la constante de temps L/R du circuit

4. Cas d'un rapport cyclique lentement variable

Hormis sur la figure 6, seul le régime permanent a été pris en compte, pour un rapport cyclique fixe. La séparation en deux parties, l'une continue, l'autre HF est insuffisante puisqu'elle ne permet pas d'étudier les régimes transitoires.

Par ailleurs dans de nombreuses applications, le rapport cyclique est amené à évoluer :

- un hacheur est très souvent asservi de manière à ce que sa sortie (le courant ou la tension) soit constante quelque soit la charge demandée. La commande du hacheur est le rapport cyclique α . Ce dernier va donc être amené à évoluer au cours du temps,
- on trouve aussi des applications comme les onduleurs, qui par définition ont un rapport cyclique variable dans le temps, sinusoïdalement.

4.1. Hypothèses, cadre du formalisme

Le formalisme présenté est extrêmement classique et utilisé depuis fort longtemps à des fins d'analyse de systèmes d'électronique de puissance à découpage.

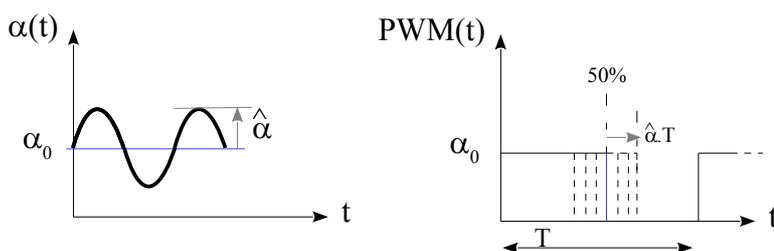
Les hypothèses :

- le rapport cyclique de commande est lentement variable vis à vis de la fréquence de découpage, c'est à dire : la fréquence de variation du rapport cyclique est très inférieure (facteur 10 au moins) à la fréquence de découpage,
- les éléments fondamentaux des convertisseurs (C, L) sont dimensionnés de telle manière que l'ondulation de courant et tension soit négligeable par rapport à la grandeur moyenne recherchée (5% typiquement).

4.2. Ecriture du rapport cyclique

Le rapport cyclique sera variable autour d'un point de repos. On utilisera le formalisme classique des « variations petits signaux » comme on peut le voir sur les circuits électroniques à transistor :

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \tilde{\alpha}(t) \quad , \quad \tilde{\alpha}(t) \text{ étant la partie } \mathbf{lentement} \text{ variable.}$$



4.3. Formalisme des grandeurs courant & tension

Les tensions et courants seront donc constitués de 3 parties

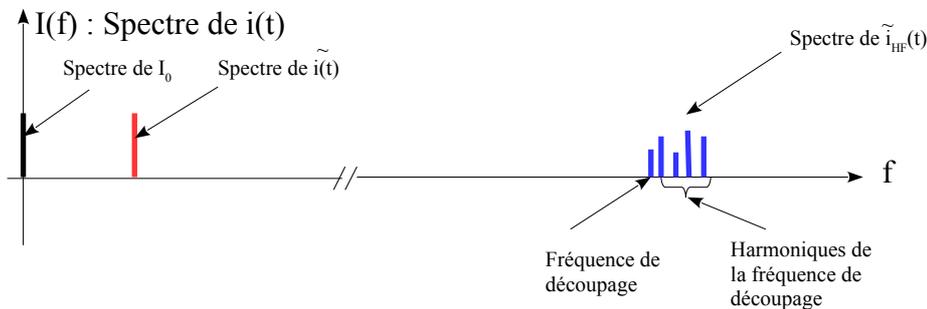
- une partie statique, le point de repos,
- une partie lentement variable, la variation « petits signaux » des électroniciens,
- une partie haute fréquence inhérente au processus de découpage.

$$u(t) = U_0 + \tilde{u}(t) + \tilde{u}_{HF}(t) \quad , \quad i(t) = I_0 + \tilde{i}(t) + \tilde{i}_{HF}(t)$$

Exemple :



L'allure spectrale d'un tel signal est la suivante :



4.4. Exploitations de ce formalisme

La partie haute fréquence est à minimiser. Le concepteur de la structure de conversion fera en sorte de dimensionner les éléments L et C de manière à minimiser les résidus HF. Malgré tout, ils restent perceptibles et sont la source de perturbations CEM qu'il faut maîtriser pour que le convertisseur puisse respecter les normes en vigueur.

La partie BF et continue du signal sont également à prendre en compte pour le dimensionnement des éléments puisque ce sont eux qui sont porteurs d'énergie. Les inductances et condensateurs doivent pouvoir supporter de fortes contraintes en terme de dissipation thermique.

Enfin, pour la commande et l'asservissement des systèmes à découpage, seules les parties continues et BF sont importantes. En terme de signal, la partie HF est considérée suffisamment faible pour être négligeable. **Mais attention** : En toute rigueur un convertisseur de puissance est échantillonné. La fréquence de découpage impose une limitation de la dynamique du système, limite qu'on portera typiquement à $F_{\text{Découpage}} / 10$.