



Institut National des Sciences Appliquées  
135, avenue de Rangueil – 31077 Toulouse cedex 4 -  
France

# MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE

DEPARTEMENT GENIE ELECTRIQUE & INFORMATIQUE

Année Universitaire  
2010 - 2011

**SUPPORT DE  
COURS**

## *Modulateurs et démodulateurs*

**ORIENTATION : RT**

**4<sup>ème</sup> ANNEE**

**AUTEUR : Thierry ROCACHER**

## Introduction

L'objectif principal de ce cours est de permettre à l'étudiant de savoir choisir un type de modulation en fonction d'une problématique donnée (contraintes de puissances, de bande passante, de rapport S/B...).

*Pour cela, il sera nécessaire de :*

- Avoir une vision globale de l'ensemble des modulations existantes (analogiques, numériques,...)
- Etre capable de donner une expression mathématique pour un signal modulé quelconque
- Savoir déterminer le spectre fréquentiel d'un signal modulé, ou au moins en donner l'allure et les caractéristiques
- Savoir déterminer la puissance d'un signal modulé
- Connaître le principe général des récepteurs radio

*Le cours est composé de quatre parties :*

### *Les modulations :*

Nous allons voir en détail les modulations classiques, avec les principes utilisés pour matérialiser celle-ci. Dans cette partie, seules les modulations à porteuse sinusoïdale seront abordées. Le dernier chapitre sera dédié au cas où le modulant est aléatoire.

### *Principe de fonctionnement des récepteurs radio*

Dans cette partie, nous aborderons très rapidement les récepteurs TRF (*Tuned Radio Frequency*), puis les récepteurs *superhétérodynes* à simple changement de fréquence et enfin, les récepteurs à double changement de fréquence.

### *La PCM (Pulse Code Modulation)*

Une partie entière sera consacrée à la PCM. Après avoir vu le principe, nous analyserons plus en détails les problèmes de quantifications, de bruit, de compression. Un chapitre sera consacré à la détermination de la densité spectrale de puissance d'un signal modulé PCM.

### *La modulation delta*

Cette modulation numérique est très particulière. Elle est très utilisée aujourd'hui, c'est pourquoi elle fera l'objet du dernier chapitre de ce cours. Là encore, les problèmes de bruit, de dynamique seront abordés.

**Auteur :** Thierry ROCACHER

## Sommaire :

<b><u>Rappels mathématiques</u></b>	<b>p4</b>
<b><u>Les modulateurs &amp; démodulateurs porteuse sinusoïdale</u></b>	<b>p5</b>
1. Modulation / Démodulation AM	p5
2. Modulation / Démodulation BLU	p10
3. Modulation / Démodulation FM	p15
4. Modulation / Démodulation ASK	p19
5. Modulation / démodulation PSK	p22
6. Modulation / démodulation FSK	p24
7. Les modulations analogiques dans le cas de messages aléatoires	p25
<b><u>Principe de fonctionnement des récepteurs radio</u></b>	<b>p26</b>
1. Récepteur à amplification directe (Tuned Radio Frequency -TRF)	p30
2. Récepteur superhétérodyne	p30
<b><u>La modulation d'impulsions codées (MIC ou PCM – Pulse code modulation)</u></b>	<b>p33</b>
1. Principe de la modulation MIC	p33
2. Dispositifs utilisés dans les MIC : CAN et CNA	p35
3. Bruits dans les MIC	p38
4. Amélioration du bruit de quantification : Compresseur-expandeur	p40
5. Détermination des spectres de puissance des signaux PCM	p42
<b><u>La modulation Delta</u></b>	<b>p45</b>
1. Principe du modulateur et démodulateur Delta linéaire	p45
2. Les limitations du procédé delta linéaire	p47
3. La modulation delta adaptative	p49
4. La modulation delta-sigma	p51
5. Exercices d'application	p51
<b><u>Bibliographie</u></b>	<b>p52</b>



## Rappels mathématiques

signal réel fonction du temps :  
 $m(t)$

Représentation de sa densité spectrale :  
 $S_m(f)$

signal sinusoïdal :

$$p(t) = A_p \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_p \cdot t + \varphi_p)$$

Transformée de Fourier du cosinus  $p(t)$

$$\mathcal{F}\{p(t)\} = S_p(f) = \frac{1}{2} \cdot \delta(f - f_p) \cdot e^{+j\varphi} + \frac{1}{2} \cdot \delta(f + f_p) \cdot e^{-j\varphi}$$

Transformée de Fourier d'un signal d'énergie finie :

$$\mathcal{F}\{s(t)\} = S_s(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt$$

Transformée de Fourier inverse :

$$\mathcal{F}^{-1}\{S_s(f)\} = s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_s(f) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df$$

Convolution de  $u(t)$  par  $g(t)$  :

$$g(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) \cdot h(t-u) du$$

Transformée de Fourier d'un peigne de dirac ( $F_e = 1/T_e$ )

$$\mathcal{F}\{\mathbb{I}_{T_e}\} = F_e \cdot \mathbb{I}_{F_e} \text{ et } \mathcal{F}^{-1}\{\mathbb{I}_{F_e}\} = T_e \cdot \mathbb{I}_{T_e}$$

Valeur moyenne d'un signal  $s(t)$  non périodique :

$$\bar{s} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s(t) \cdot dt$$

Pour un signal périodique, on enlève la limite.

Valeur efficace d'un signal  $s(t)$  non périodique

$$s_{eff}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s(t)^2 dt$$

Pour un signal périodique, on enlève la limite

Moyenne statistique

$$m(X) = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} X \cdot p(X) \cdot dX$$

Ecart type

$$\sigma^2(X) = E[X^2] - m^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} X^2 p(X) \cdot dX - \left( \int_{-\infty}^{+\infty} X \cdot p(X) \cdot dX \right)^2$$

Rapport signal / bruit (SNR, Signal to Noise Ratio), exprimé en dB

$$\begin{aligned} \text{SNR} &= 10 \log(P_{\text{signal}}/P_{\text{bruit}}) \\ &= 10 \log(V_{\text{eff}}^2_{\text{signal}} / V_{\text{eff}}^2_{\text{bruit}}) \\ &= 20 \log(V_{\text{eff}}_{\text{signal}} / V_{\text{eff}}_{\text{bruit}}) \end{aligned}$$

Densité spectrale de puissance  $\gamma(f)$ :  $\gamma(f) = \mathcal{F}\{\Gamma(\tau)\}$ ,  $\Gamma(\tau)$  fonction d'autocorrélation du signal

Puissance moyenne :  $P_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(f) \cdot df$

# Les modulateurs & démodulateurs porteuse sinusoïdale [4],[5],[6],[8]

## 1. Modulation / Démodulation AM

C'est une **modulation analogique** (le modulant est analogique) et la **porteuse est analogique**.

Le principe de ce type de modulation est de "loger" le signal informatif,  $m(t)$ , dans l'**amplitude** d'une onde porteuse. Il existe plusieurs types d'AM :

- modulation AM à porteuse conservée (MAPC)
- modulation AM à porteuse supprimée (MAPS)
- modulation en bande latérale unique (BLU)

Les deux premiers types sont ce qu'on pourrait appeler les modulations AM classiques. La dernière est une AM particulière qui sera étudiée au chapitre 2.

### 1.1 Rappel théorique

Cette modulation résulte directement de la multiplication temporelle de la porteuse par le message informatif, avec en plus l'addition de la porteuse :

$$\begin{aligned} s(t) &= \alpha \cdot m(t) \cdot A_p \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi) + A_p \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi) \\ &= A_p \{1 + \alpha \cdot m(t)\} \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi) \end{aligned}$$

#### Aspect spectral d'une MAPS

L'obtention du spectre de  $s(t)$  est immédiat, si on se rappelle que :

- la multiplication temporelle de deux signaux a pour transformée de Fourier la convolution des transformées de Fourier des signaux
- la transformée de Fourier d'un cosinus :  $\cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t)$  est  $\frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0)$
- la convolution de  $S_m(f)$  par  $\delta(f - f_0) = S_m(f - f_0)$

Construisons  $S_s(f)$  avec

$$s(t) = \alpha \cdot m(t) \cdot A_p \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t)$$

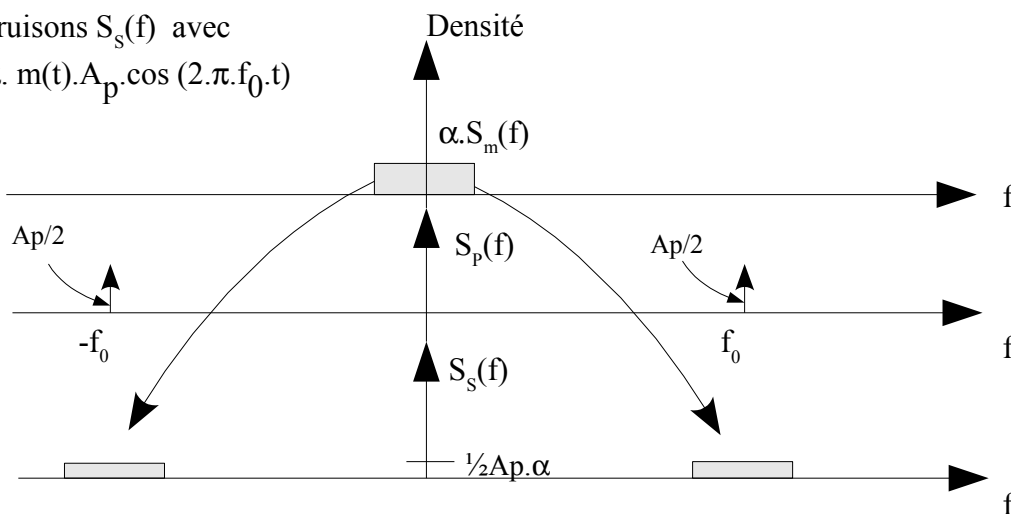
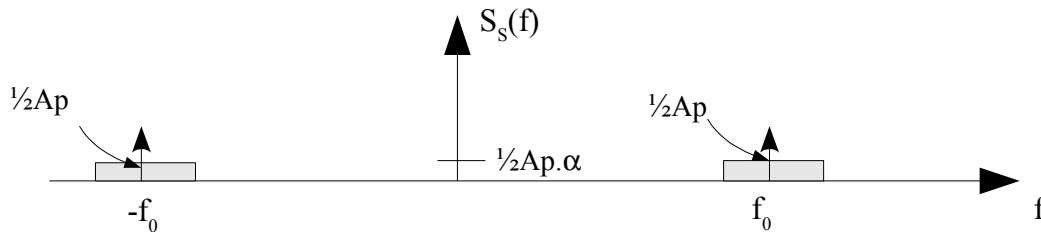


Fig1.1 Spectre d'un signal AM sans porteuse

*Aspect spectral d'une MAPC*

Si la porteuse est ajoutée, les Diracs placés en  $\pm f_0$  vont apparaître :



**Fig1.2** Spectre d'un signal AM avec porteuse

$$S_s(f) = \frac{1}{2} A_p \alpha S_m(f - f_0) + \frac{1}{2} A_p \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} A_p \alpha S_m(f + f_0) + \frac{1}{2} A_p \delta(f + f_0) \quad \text{MAPC}$$

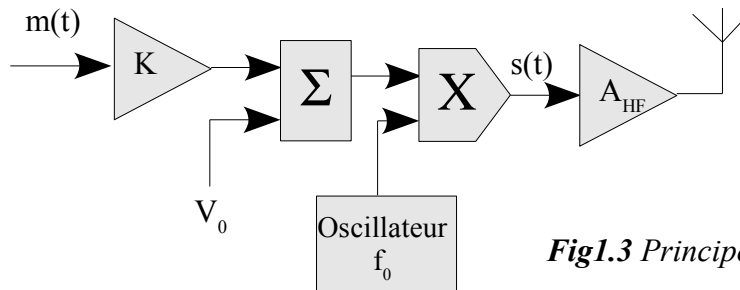
Dans l'expression  $s(t) = A_p \{1 + \alpha m(t)\} \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ , on peut faire apparaître l'**indice de modulation**  $ma$  :

Dans le domaine temporel, l'indice de modulation caractérise l'éloignement de l'amplitude instantanée par rapport à l'amplitude moyenne de  $s(t)$ . En d'autres termes,  $ma = \alpha \cdot m_{\text{MAX}}$ , où  $m_{\text{MAX}}$

est l'amplitude maximale de  $m(t)$ . On peut aussi écrire :  $ma = \frac{(\hat{s}) - (\check{s})}{(\hat{s}) + (\check{s})}$

**Modulateurs AM**

La structure typique d'un modulateur AM est la suivante :



**Fig1.3** Principe d'un modulateur AM

La tension  $V_0$  va permettre de fixer le taux de modulation  $ma$ . Le cœur du modulateur est le multiplieur.

**1.2 Procédés de modulation AM****Multiplication par non linéarité**

Un élément non linéaire peut permettre d'obtenir une multiplication. Par exemple, un transistor de **type FET** a une loi  $I_d = f(V_{gs})$  de la forme  $I_d = K(v_{gs} - V_T)^2$  ou encore, en développant le double produit :

$I_d = a + b \cdot v_{gs} + c v_{gs}^2$ , où  $a, b, c$  sont des constantes fonction de  $V_T, K$ .

Si  $v_{gs} = A_p \cos(2\pi f_0 t + \varphi) + m(t)$ , alors,

$I_d = a + b \cdot \{A_p \cos(2\pi f_0 t + \varphi) + m(t)\} + c \cdot \{A_p \cos(2\pi f_0 t + \varphi) + m(t)\}^2$

Si on développe le dernier terme, on obtient :

$c \cdot A_p^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \varphi) + 2c \cdot A_p \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \cdot m(t) + c \cdot m(t)^2$

Le spectre de ce signal est relativement riche, mais on y trouve une MAPC que l'on peut isoler par filtrage passe bande. Un filtre "bouchon" de type RLC peut faire l'affaire, d'où le schéma :

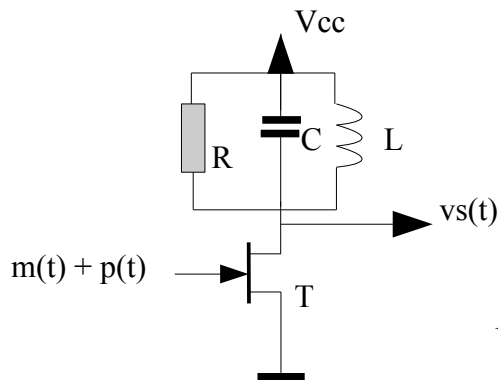


Fig1.4 Modulation AM à non linéarité

$$V_s(t) = V_{cc} - R \cdot I_d(t) = V_{cc} - R \cdot \{ b \cdot A_p \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \phi) + 2c \cdot A_p \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \phi) \cdot m(t) \} \quad \text{MAPC}$$

**Modulation à découpage**

Elle s'obtient en découpant l'information à la fréquence porteuse :

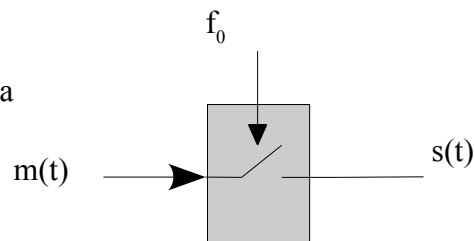


Fig1.5 Modulation à découpage

Mathématiquement,  $s(t) = m(t) \cdot p(t)$ , ou  $p(t)$  est carré, de fréquence  $f_0$ , de rapport cyclique 50%, et variant de 0 à +1.

La transformée de Fourier de  $p(t)$  est (voir p18) :

$$S_p(f) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{1}{k} \delta(f - k f_0) + \frac{1}{2} \delta(f) \quad , \text{ où } k \text{ est impair et différent de } 0.$$

Donc, comme  $S_s(f)$  est la convolution des deux spectres, alors

$$S_p(f) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{1}{k} S_m(f - k f_0) + \frac{1}{2} S_m(f) \quad , \text{ où } k \text{ est impair et différent de } 0.$$

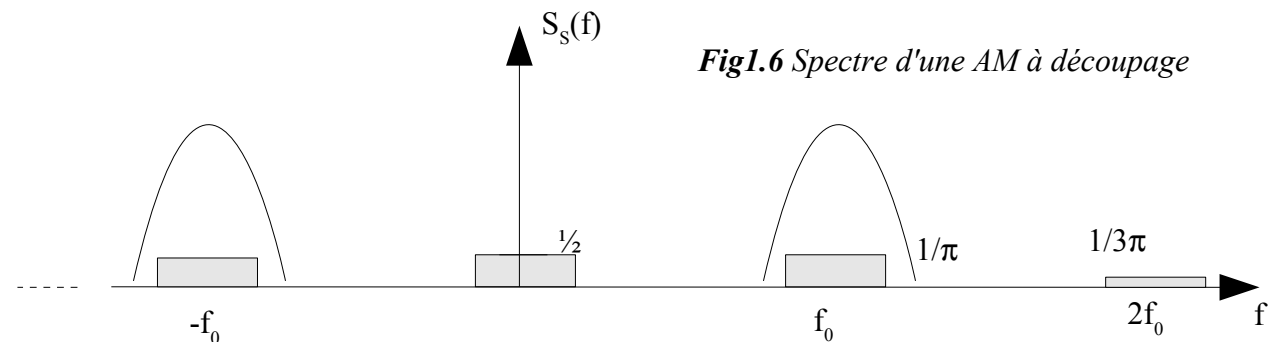


Fig1.6 Spectre d'une AM à découpage

Par simple filtrage passe-bande, on obtient

$$S_s(f) = \frac{1}{\pi} S_m(f - f_0) + \frac{1}{\pi} S_m(f + f_0) \quad \text{MAPS}$$



### Autres dispositifs

Il existe d'autres types de modulateurs, dont l'étude plus complexe sort du cadre de ce cours. On peut par exemple citer le *multiplieur par cellule de Gilbert*. Il s'agit d'un multiplieur basé sur un double étage différentiel à transistors bipolaires. On met à profit la caractéristique non linéaire du transistor bipolaire (forme exponentielle). Ce principe est très répandu dans les circuits intégrés dont la fonction est la multiplication (AD633 ou NE602 par exemple).

L'amplificateur bipolaire en classe C est un autre dispositif qui permet une modulation AM. Il a l'avantage de posséder un bon rendement. On l'utilise directement en émission AM.

## 1.3 Procédés de démodulation AM

### Détection à diode

Le démodulateur le plus simple que l'on puisse trouver est le détecteur à diode (détecteur crête).

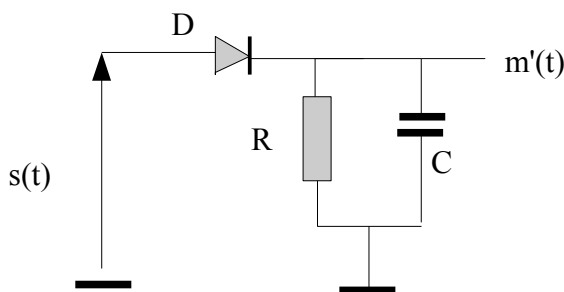


Fig 1.8 Détecteur à diode

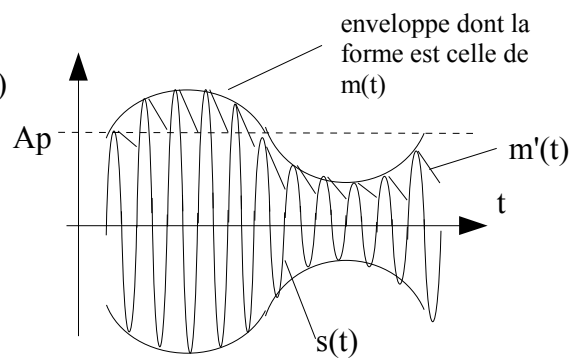


Fig 1.9 Signal démodulé par un détecteur à diode

Afin que  $m'(t)$ , signal démodulé, puisse suivre au mieux l'enveloppe de  $s(t)$ , donc  $m(t)$ , il faut que la constante  $RC$  du circuit ne soit pas trop faible (auquel cas, si on pousse à l'extrême, on ne fait que redresser  $s(t)$  !). Par ailleurs, une constante  $RC$  trop grande amènerait à une "saturation de pente". Le signal  $m'(t)$  serait irrémédiablement distordu.

Pour éviter ceci, la pente de décroissance de  $m'(t)$  doit être plus grande (en valeur absolue) que celle de l'enveloppe de  $s(t)$ . Le cas le pire, se situe quand  $s(t)$  vaut  $A_p$ .

Alors, la pente de l'enveloppe vaut  $-A_p/RC$ . Celle de  $m(t)$  vaut  $-2 \cdot \pi \cdot f_m \cdot A_m$

Donc,  $A_p/RC > 2 \cdot \pi \cdot f_m \cdot A_m$ , ce qui donne  $RC < \frac{A_p}{A_m} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_m} = \frac{1}{m_a \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_m}$

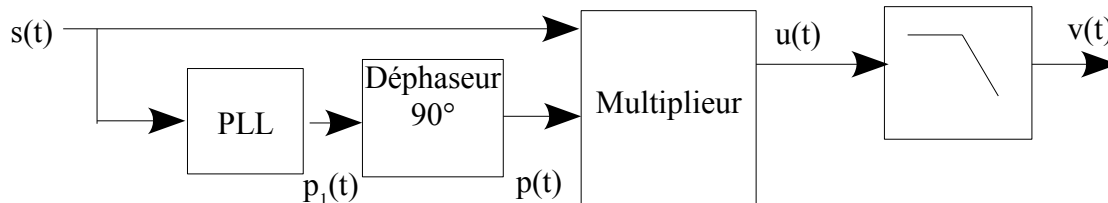
Un filtrage passe-bas de  $m'(t)$  peut contribuer à un lissage des dents de scie.

Ce type de démodulateur ne tolère que des indices de modulation  $m_a$  inférieurs à 1. C'est un inconvénient, car cela suppose une émission de la porteuse (MAPC) qui consomme à elle seule, une puissance importante pour aucune information supplémentaire.

### Détection synchrone

Le principe consiste à reproduire la porteuse à partir de  $s(t)$  à l'aide d'une PLL, de lui apporter un

déphasage adéquat, de la multiplier par  $s(t)$ . Cette multiplication a pour effet de ramener le spectre qui était autour de la porteuse, en bande de base. La multiplication génère aussi un décalage vers le double de la fréquence porteuse. C'est pourquoi, un filtrage passe-bas est nécessaire.



**Fig 1.10** Détection synchrone

Pour se convaincre, on peut par exemple exprimer mathématiquement  $u(t)$  :

$$\begin{aligned} u(t) &= s(t).p(t) = Ap^2\{1+\alpha.m(t)\}.\cos(2.\pi.f_0.t + \varphi) .\cos(2.\pi.f_0.t + \varphi) \\ &= Ap^2\{1+\alpha.m(t)\}/2. (1+\cos(2.\pi.2f_0.t + 2\varphi)) \end{aligned}$$

Supposons un déphasage  $\delta\varphi$  entre la porteuse reconstituée et la porteuse d'origine, on obtient :

$$u(t) = Ap^2\{1+\alpha.m(t)\}/2. (\cos(\delta\varphi)+\cos(2.\pi.2f_0.t + 2\varphi+\delta\varphi))$$

Après filtrage, la partie en  $2f_0$  disparaît,

$$v(t) = \frac{1}{2} Ap\{1+\alpha.m(t)\}.\cos(\delta\varphi)$$

Ainsi, un déphasage différent de 0 entraîne une atténuation de  $v(t)$  (*fading*, évanouissement)

**NB** : la notion de synchronisation est fondamentale. En effet, sans PLL, même si un oscillateur local est à la même fréquence que la porteuse, la moindre variation de phase va altérer gravement le signal reçu.

L'inconvénient de ce procédé est qu'il est plus complexe que le précédent. Par contre, il tolère sans aucun problème un indice de modulation supérieur à 1. A noter toutefois qu'il est obligatoire d'ajouter un bout de porteuse de manière à ce que la PLL puisse se verrouiller.

## 2. Modulation / Démodulation BLU

La modulation BLU est une solution efficace pour diminuer la bande passante par un facteur deux. De plus, la porteuse n'est pas émise. Donc en terme de puissance, la BLU présente également une efficacité certaine. Par contre, la composante continue ne peut être transmise par ce procédé. C'est une forme de modulation très utilisée par les radio-amateurs.

### 2.1 Modulateurs BLU

L'idée de la BLU vient du fait que dans une modulation AM, il y a redondance des informations. En effet la bande supérieure et la bande inférieure sont symétriques. Il existe deux techniques de modulation BLU : la technique de filtrage, et celle du déphasage.

La BLU par filtrage

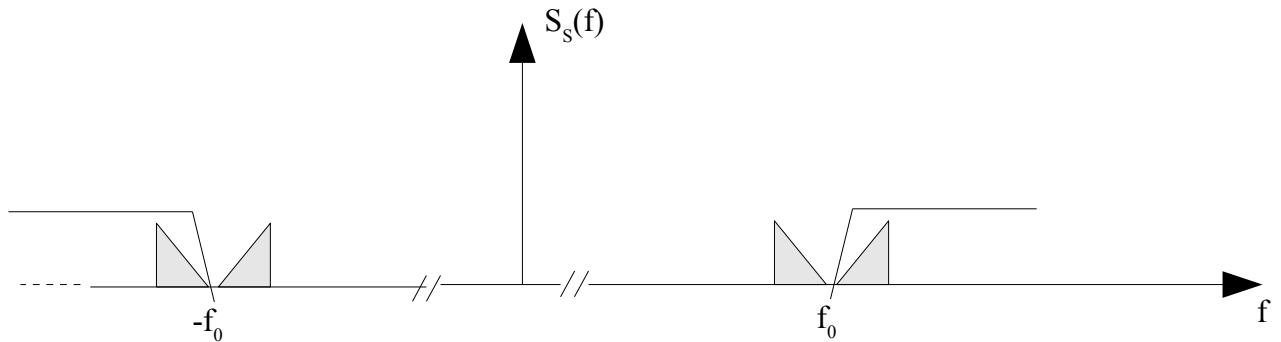


Fig 2.1 Modulation BLU par filtrage

On peut opérer une BLU de deux manières, soit on garde la bande inférieure, soit on garde la bande supérieure. Sur la figure ci-dessus, il s'agit d'une BLU à bande supérieure conservée, un filtre passe-haut est utilisé. A la place d'un filtre passe-haut, on peut aussi utiliser un passe-bande.

La difficulté réside dans la raideur du filtre utilisé. Pour illustrer ceci, on peut prendre l'exemple d'une BLU à  $f_0 = 5 \text{ MHz}$  comme fréquence porteuse. La bande du message sera  $300\text{Hz} - 3400\text{Hz}$ . Le filtre doit atténuer peu ( $-3\text{dB}$ ) à  $f_0 + 300 = 5,0003 \text{ MHz}$  et beaucoup ( $-40\text{dB}$ ) à  $f_0 - 300\text{Hz} = 4,9997 \text{ MHz}$ . Si on utilise un filtre reconnu pour sa raideur (Chebychev), on trouve un ordre très élevé! Pour contourner cet obstacle, on peut utiliser des filtres passe bande à quartz, ou des résonateurs céramiques qui ont un facteur de qualité de l'ordre de  $10^6$  pour les quartz et meilleur que 100 pour les résonateurs céramiques. L'inconvénient est que les fréquences centrales de ces dispositifs sont fixes.

Une autre solution consiste à faire plusieurs transpositions de fréquences, et à chaque fois opérer un filtrage :

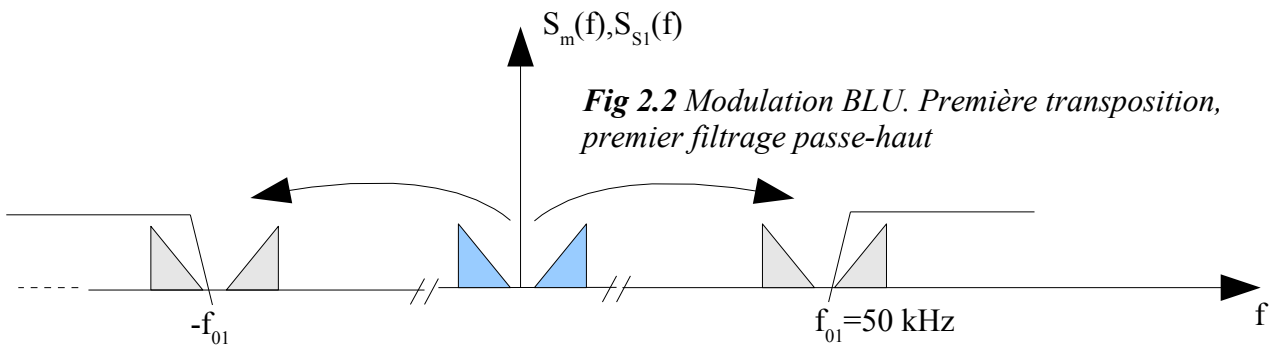


Fig 2.2 Modulation BLU. Première transposition, premier filtrage passe-haut

On fait une première transposition (mélange en fréquence = multiplication) du spectre vers une fréquence  $f_{01}$ , telle que le filtrage soit réalisable, on obtient  $S_{S1F}(f)$ , par exemple,  $f_{01} = 50\text{kHz}$  :

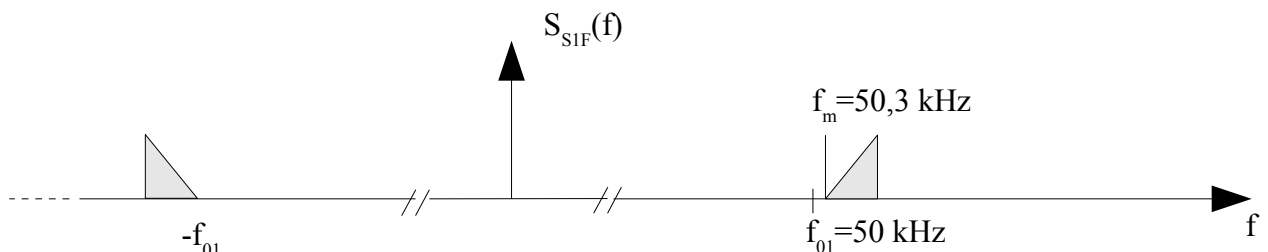
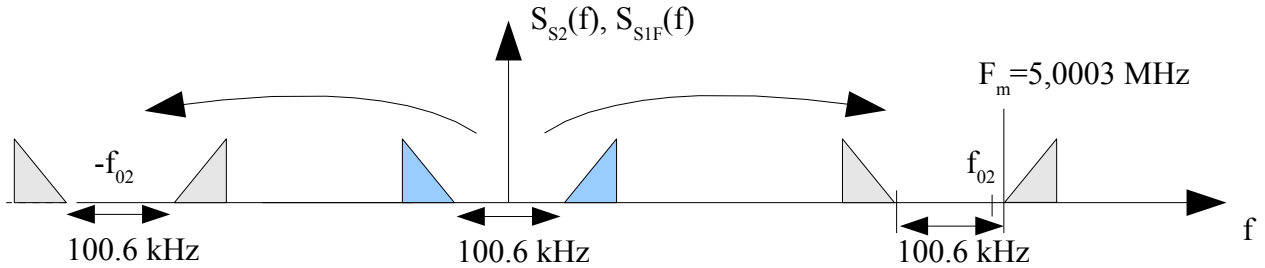


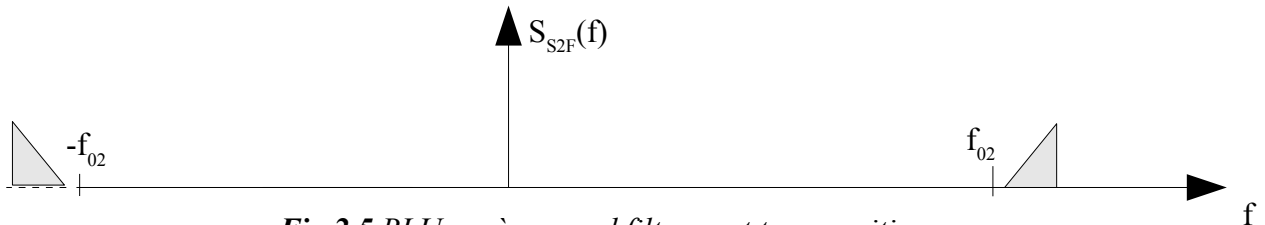
Fig 2.3 BLU après première filtrage et transposition

Afin de porter le signal BLU à 5MHz, il faut encore opérer une transposition en fréquence (fig 2.4). On note que la sélectivité du filtre sera moins grande, puisqu'il faut garder les fréquences en dessus de 5,0003 Mhz, et rejeter celles en dessous de 4,8997 Mhz.



**Figs 2.4** Modulation BLU. Seconde transposition

Le résultat du filtrage donne une nouvelle BLU,  $s_{2F}(t)$  :



**Fig 2.5** BLU après second filtrage et transposition

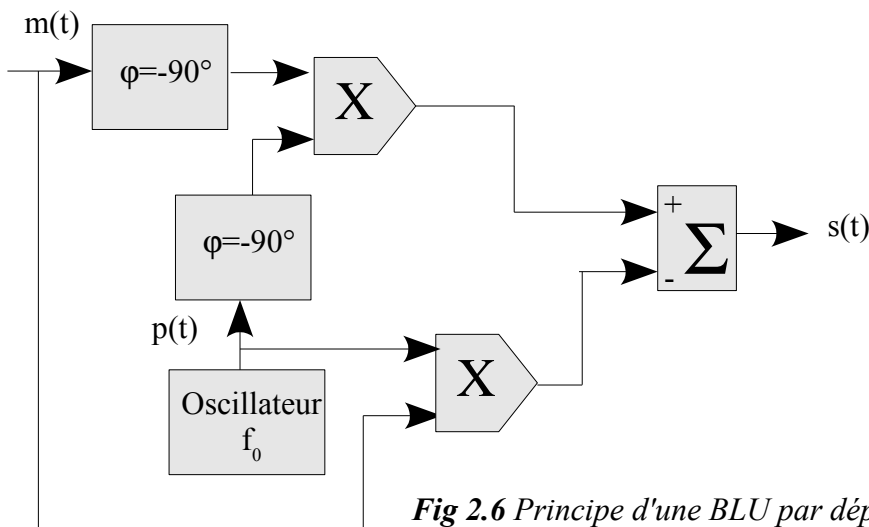
Si le filtrage est encore trop difficile car trop sélectif, on diminuera la fréquence de  $f_{02}$  puis on pratiquera une nouvelle transposition.

**NB:** trop de transpositions nuit au signal BLU car à chaque opération du bruit se rajoute. Il faut donc utiliser des filtres les plus raides possibles.

**La BLU par déphasage**

La théorie associée à cette méthode sort du cadre de ce cours. Elle fait intervenir des outils de traitement de signal, telle que la transformée de Hilbert, la notion d'enveloppe complexe.

Le principe se résume par le schéma bloc suivant :



L'analyse d'un tel circuit reste néanmoins simple, si l'on se limite au cas où  $m(t)$  est sinusoïdal pur.

**Fig 2.6** Principe d'une BLU par déphasage

$$P(t) = A_p \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

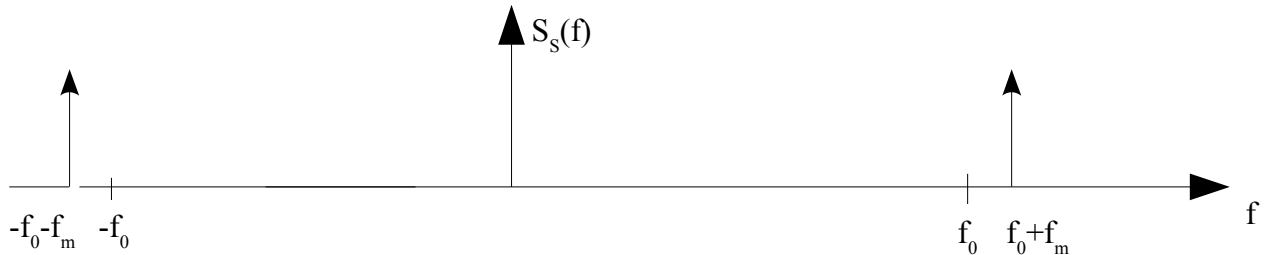
$$m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t + \Psi)$$

$$s(t) = A_p \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \cdot \cos(2\pi f_m t + \Psi) - A_p \sin(2\pi f_0 t + \varphi) \cdot A_m \sin(2\pi f_m t + \Psi)$$

$$= A_p A_m \cos(2\pi f_0 t + \varphi + 2\pi f_m t + \Psi)$$

$$= A_p A_m \cos(2\pi (f_0 + f_m) t + \varphi + \Psi)$$

On obtient donc le spectre suivant :



**Fig 2.7** Spectre d'une signal BLU, modulant sinusoidal

La difficulté de réalisation de ce modulateur réside dans le déphaseur de  $-90^\circ$  qui concerne  $m(t)$ . En effet, un système qui déphase d'une grandeur fixe n'est réalisable que sur une plage de fréquence limitée. En technique analogique, on peut approcher ce déphaseur par une combinaison bien calculée de déphaseurs simples de type (voir [5]):

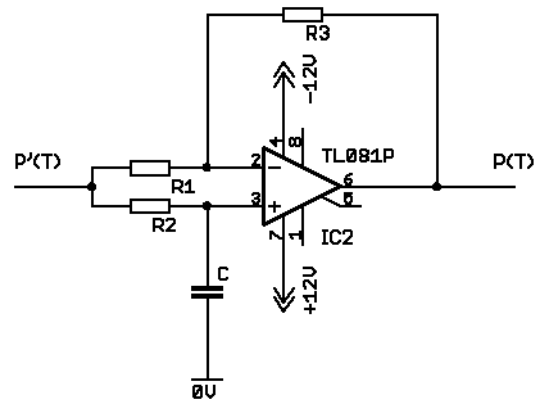
La fonction de transfert de ce type de déphaseur est:

$$\frac{1 - R_2 C p}{1 + R_2 C p} \quad \text{avec } R_3 = R_1.$$

Un déphasage de  $-90^\circ$  est obtenu pour la fréquence

$$f = \frac{1}{2\pi \cdot R_2 C}$$

**Fig 2.8** Déphaseur à AOP

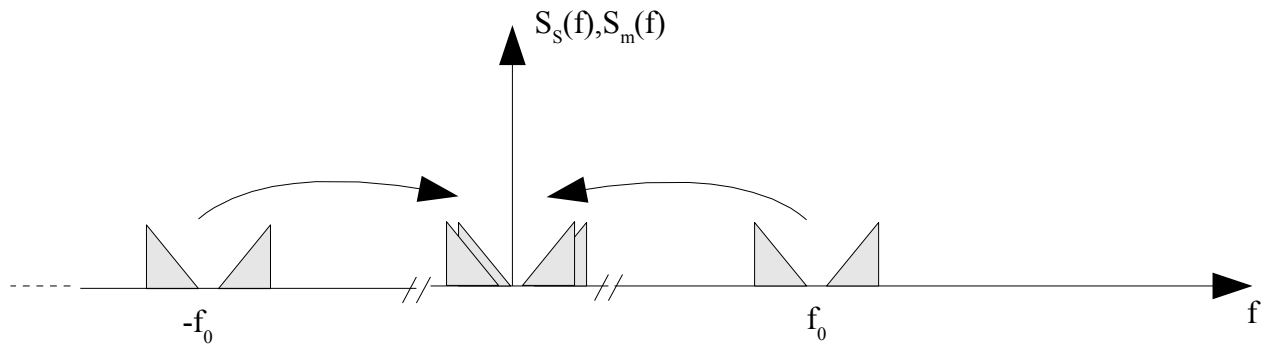


## 2.2 Démodulateurs BLU

La démodulation BLU est assez simple. Elle utilise un mélangeur (multiplieur) qui va opérer un glissement du signal BLU directement en bande de base. Le procédé ressemble à une démodulation synchrone sauf qu'ici il n'y a pas de reconstruction de porteuse. En démodulation synchrone, le retour en bande de base implique les deux bandes latérales. Cela signifie qu'il faut être absolument synchrone sous peine d'avoir des interférences entre lobe inférieur et lobe supérieur, et une perte du message.

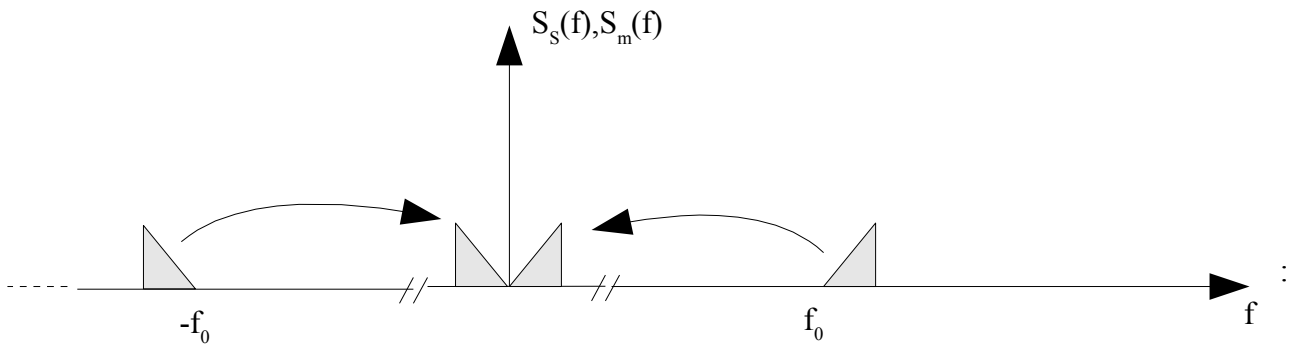
**démodulation d'un signal MAPC avec un léger décalage  $\delta f$  sur la porteuse de réception:**

**NB:** sur les deux spectres suivants, seul le glissement vers la BF est montré. Bien évidemment, le spectre du signal modulé glisse aussi vers  $2 f_0$ .



**Fig 2.9** Effet d'une erreur en fréquence lors d'une démodulation synchrone

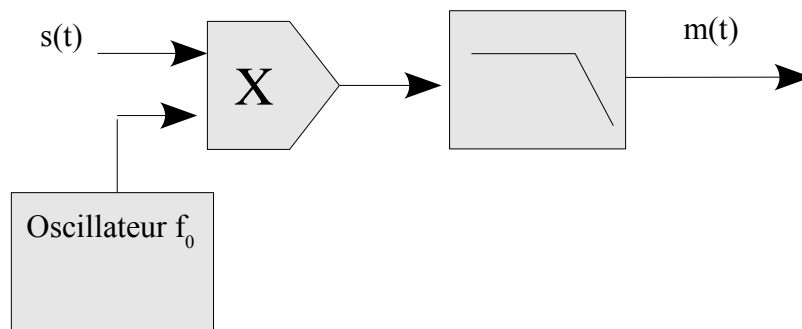
Observons une démodulation BLU par mélange (porteuse reconstituée avec une légère erreur  $f_p=f_0+\delta f$ ), on obtient :



**Fig 2.10** Effet d'une erreur en fréquence lors d'une démodulation par mélange sur un signal BLU

Le signal recomposé a légèrement glissé vers les basses fréquences d'une valeur  $\delta f$ , mais n'est pas trop dégradé. Si le message est un signal audio, l'oreille est insensible à ce phénomène jusqu'à une erreur  $\delta f$  estimée à 10Hz.

Le schéma-bloc du démodulateur est alors le suivant :



**Fig 2.11** Principe d'une démodulation par mélange sur un signal BLU

Mathématiquement, on peut écrire (si à la base,  $m(t)$  est un signal sinusoïdal):

$$\begin{aligned} m(t) &= s(t).p(t) \\ &= A_s \cos(2.\pi.(f_0+f_m).t + \Psi).A_p \cos(2.\pi.(f_0+\delta f).t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2} A_s.A_p \{ \cos(2.\pi.(f_m - \delta f).t + \Psi - \varphi) + \cos(2.\pi.(2f_0+f_m+\delta f).t + \Psi + \varphi) \} \end{aligned}$$

L'oscillateur qui est utilisé pour ramener le spectre en bande de base est appelé *oscillateur à battement*, en anglais *BFO (Beat Frequency Oscillator)*.

Le filtrage passe bas final, élimine le second terme haute fréquence.

### 3. Modulation / Démodulation FM

Cette modulation est à porteuse sinusoïdale et son message est analogique. Dans ce type de modulation, c'est la fréquence de la porteuse qui contiendra l'information  $m(t)$ .

#### 3.1 Rappel théorique

La modulation de fréquence est caractérisée par plusieurs éléments :

- La fréquence de la porteuse  $f_0$ .
- La **profondeur de modulation** ou **déviatio**n de fréquence: c'est l'écart maximal de la fréquence instantanée  $\Delta F$ , vis à vis de la fréquence centrale. Par exemple, un signal FM dans la bande radio à  $f_0 = 96$  Mhz verra sa fréquence instantanée s'éloigner d'une quantité  $\Delta F$  égale à 75 kHz par rapport à  $f_0$ . Cette grandeur est à rapprocher de l'éloignement de l'amplitude vis à vis de l'amplitude moyenne d'un signal AM.
- La **vitesse de modulation** : Elle caractérise la vitesse, le rythme, avec laquelle la fréquence instantanée va évoluer. Cette vitesse est tout simplement la fréquence du signal modulant,  $f_m$ .

L'encombrement spectral d'un signal modulé en fréquence n'a pas de lien direct avec le spectre du signal modulant. Contrairement à l'AM, la FM est une opération non linéaire.

Cependant, une règle empirique a été trouvée, qui permet de définir la bande passante d'un signal FM, c'est la **règle de Carson**:

$$B_p = 2.(f_m + \Delta F), \text{ } B_p \text{ étant la bande passante.}$$

En FM, on introduit aussi l'indice de modulation  $\beta = \Delta F / f_m$ . Il est utile lorsqu'on étudie le SNR d'un signal FM. Plus  $\beta$  est élevé, plus le SNR sera bon.

L'écriture mathématique d'un signal  $p(t)$  modulé en fréquence par  $m(t)$  n'est pas immédiate. En effet, quand nous écrivons,  $p(t) = A_p \cos(2.\pi.f_0.t + \varphi)$ , nous sommes en régime sinusoïdal qui est caractérisé par une phase qui croît linéairement. Cette croissance possède une pente, c'est la fréquence  $f_0$  (ou plus exactement la pulsation  $\omega_0$ ). L'écriture  $2.\pi.f_0.t$ , n'est autre que le résultat de l'intégration :  $\varphi(t) = \int \omega(t).dt = \int 2.\pi.f(t).dt$  dans la cas particulier où  $f(t) = f_0$ .

Ecrivons  $f(t) = f_0 + k.m(t)$ , ce qui traduit la modulation de fréquence par  $m(t)$  autour de  $f_0$ , alors

$$\varphi(t) = 2.\pi.f_0.t + 2.\pi.\int k.m(t).dt$$

Donc,  $p(t)$  s'écrit :

$$p(t) = A_p \cos(\varphi(t)) \text{ avec } \varphi(t) = 2\pi \cdot f_0 \cdot t + 2\pi \cdot \int k \cdot m(t) \cdot dt$$

S'il est rassurant de pouvoir écrire mathématiquement le signal  $p(t)$ , cette formule n'est pas vraiment utile dans la pratique. Mieux vaut bien comprendre les éléments qui caractérisent une FM.

### 3.2 Modulateurs FM

Il existe de nombreux types de modulateurs (voir [4],[5] par exemple). Nous ne verrons que quelques principes.

#### Modulation directe par VCO

C'est le type de modulateur qui semble le plus évident. En effet, un VCO délivre un signal sinusoïdal dont la fréquence varie linéairement (plus ou moins...) en fonction de la tension appliquée. C'est donc la fonction idéale par excellence.

Il existe plusieurs sortes de VCO, intégrés, à diodes varicap...

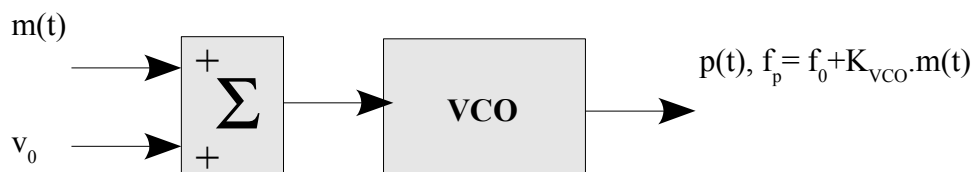


Fig 3.1 Principe d'un modulateur FM à VCO

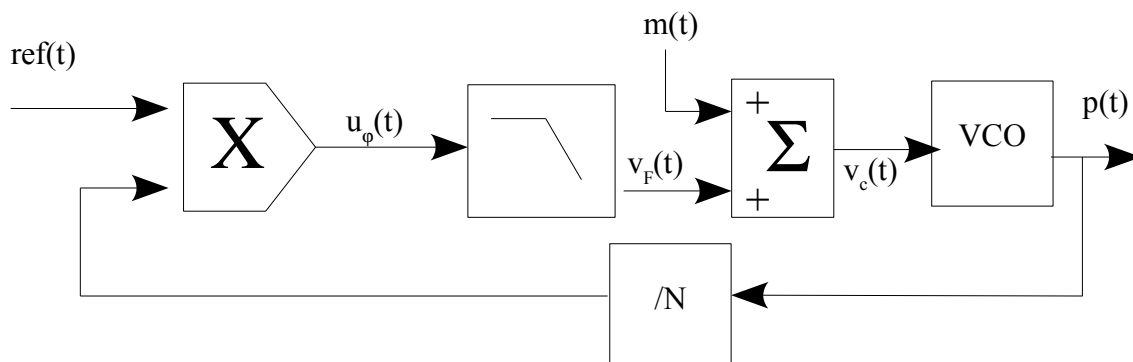
La tension  $v_0$  "polarise" le VCO à une fréquence centrale  $f_0$ .

Ce procédé présente pourtant un inconvénient. En effet, il tend à dériver avec la température et donc, si la FM voulue est à bande étroite, elle va manquer de stabilité dans le temps et aura tendance à dériver.

L'idée est alors d'insérer le VCO dans une PLL afin de stabiliser la fréquence porteuse  $f_0$ .

#### Modulation stabilisée par PLL

Voici le schéma d'un tel dispositif :



$Ref(t)$  est une référence sinusoïdale à la fréquence  $f_{REF}$ . Elle est produite par un Quartz (précis).



La PLL est pourvue d'un diviseur par N. Il est réalisé à partir d' un compteur. On voit également un sommateur par lequel est injecté le signal m(t).

Le principe de fonctionnement est le suivant :

Supposons m(t)=0. La PLL est verrouillée, ce qui signifie que les deux entrées du multiplieur sont à la même fréquence. Cela implique la relation  $f_{REF} = f_p/N$  . La référence étant fixe, la fréquence  $f_p$  l'est aussi :

$$f_p = f_0 = f_{REF} \cdot N. \text{ C'est la position statique de la PLL.}$$

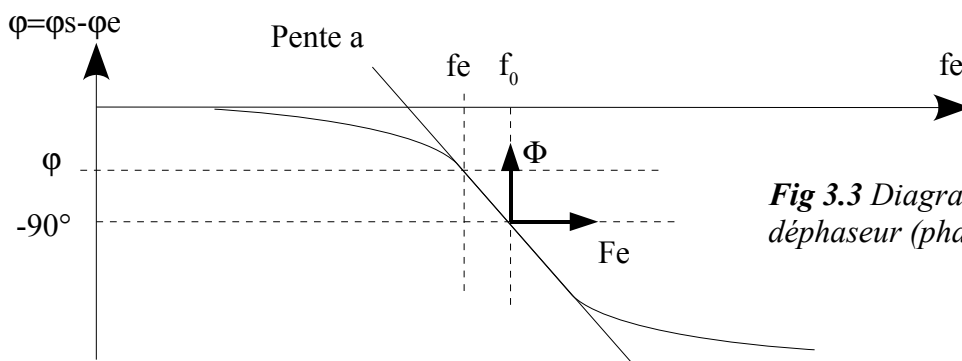
Lorsque m(t) est non nul, il va se superposer à  $v_f(t)$  et faire varier  $f_p$  autour de  $f_0$ . La PLL doit avoir une dynamique lente devant celle de m(t), de manière à ce qu'elle ne soit pas perturbée par m(t).

### 3.3 Démodulation FM

Là encore, de nombreuses solutions existent. Seules deux d'entre elles seront présentées.

#### Discriminateur à coïncidence

Supposons un circuit déphaseur (tel que celui présenté lors de la modulation BLU par déphasage). Sa fonction de transfert est nulle en terme de gain (0 dB). Le déphasage  $\varphi = \varphi_s - \varphi_e$  vaut  $-90^\circ$  pour la fréquence  $f_0$ . Autour de cette valeur,  $\varphi_s - \varphi_e$  **varie linéairement** en fonction de la fréquence:



*Fig 3.3 Diagramme de Bode du déphaseur (phase uniquement)*

On peut faire un changement de variable autour du point  $(f_0, -\pi/2)$  :  $F_e = f_e - f_0$  et  $\Phi = \varphi + \pi/2$ . On obtient alors :  $\Phi = a \cdot F_e$  soit  $\varphi + \frac{\pi}{2} = a \cdot (f_e - f_0)$  ou encore  $\varphi_s - \varphi_e = a \cdot (f_e - f_0) - \frac{\pi}{2}$

Dans le cas de la FM,  $f_e$  varie dans le temps ,  $f_e(t) = f_0 + k \cdot m(t)$ . En injectant dans l'équation précédente , on obtient :

$$\varphi_s - \varphi_e = a \cdot (f_0 + K \cdot m(t) - f_0) - \frac{\pi}{2} = a \cdot K \cdot m(t) - \frac{\pi}{2}$$

Maintenant, si nous entrons e(t) et s(t) dans un multiplieur, la sortie de celui-ci donnera :

$$s(t) = \frac{1}{2} \cos (\varphi_s(t) - \varphi_e(t)) + \frac{1}{2} \cos (\varphi_s(t) + \varphi_e(t))$$

Le second terme est un terme haute fréquence que l'on peut filtrer. Finalement, on obtient après filtrage :

$s_1(t) = \frac{1}{2} \cos(a.k.m(t) - \pi/2) = \frac{1}{2} \sin(a.k.m(t))$  . Si  $a.m(t)$  n'est pas trop élevé, on obtient (développement limité) :

$$s_1(t) = \frac{1}{2}.a.k.m(t).$$

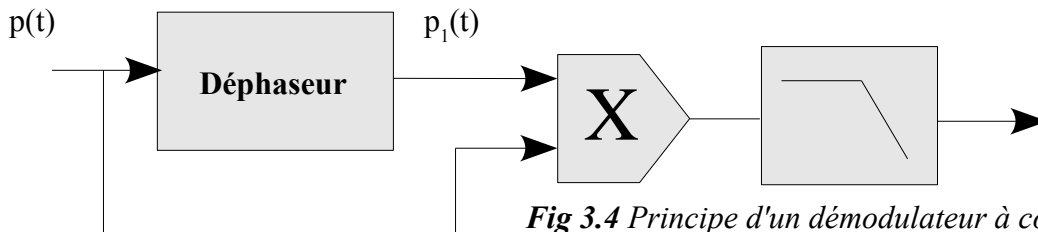


Fig 3.4 Principe d'un démodulateur à coïncidence

L'inconvénient de ce procédé est qu'il n'est pas capable de suivre une éventuelle dérive de la fréquence porteuse.

### Démodulation à PLL

Une fois verrouillée, une PLL est capable de suivre une fréquence qui se déplace, pour peu que sa plage de maintien soit suffisante, et que ses performances dynamiques soient compatibles avec la dynamique du signal modulant  $m(t)$ .

Dans ces conditions, on peut voir la PLL comme une sorte de *VCO réciproque*. En effet, la PLL agit comme un asservissement de la fréquence du VCO. La PLL se "débrouille" pour tenir la fréquence du VCO égale à la fréquence d'entrée. Donc, l'entrée du VCO est à l'image du signal qui est à l'origine des variations de la fréquence d'entrée, signal qui n'est autre que le modulant  $m(t)$ .

Synoptique :

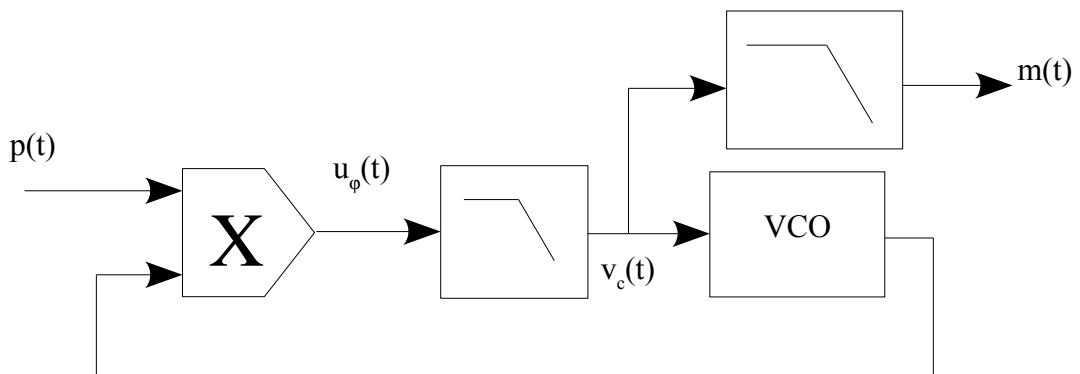


Fig 3.5 Principe d'un démodulateur à PLL

Un filtre passe bas extérieur à la boucle permet d'ôter les résidus à la fréquence  $2f_0$ , non suffisamment filtrée.

Ce type de démodulateur peut compenser une dérive de la porteuse d'émission.

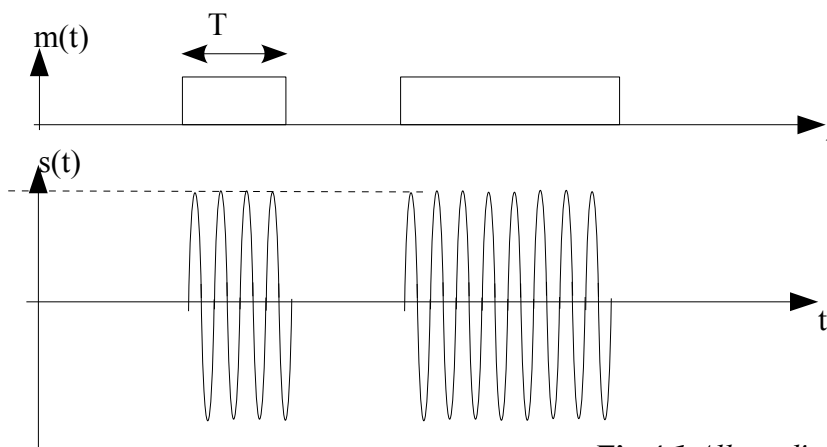
## 4. Modulation / Démodulation ASK

La modulation ASK (Amplitude Shift Keying) est une modulation dont le **modulant est numérique**. Il s'agit d'une AM particulière. Dans ce chapitre, on va uniquement s'intéresser aux aspects spectraux, car les modulateurs et démodulateurs sont ceux de la modulation AM classique.

### 4.1 Expression mathématique d'une OOK

$$s(t) = A_p \cdot m(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi)$$

où  $m(t)$  est un signal binaire aléatoire. Si les valeurs prises pour les niveaux logiques '0' et '1' sont 0 et 1, alors, le signal est dit OOK (On Off Keying). L'allure est alors la suivante :



**Fig 4.1** Allure d'une OOK

Supposons, que  $m(t)$  soit une suite **déterministe** de '1' et de '0'. A ce moment là, on peut calculer la transformée de Fourier de  $m(t)$  et donc en déduire l'allure du spectre de  $s(t)$ .

$m(t)$  étant un signal périodique, on peut passer par les séries de Fourier. Une autre approche consiste à considérer le signal périodique  $m(t)$  comme une impulsion  $I(t)$ , de durée  $T$  et d'amplitude 1, convoluée par un peigne de Dirac  $\mathbb{W}_{2T}$ , donc :

$$S_m(f) = \mathcal{F}m(t) = \mathcal{F}I(t) \cdot \mathcal{F}\mathbb{W}_{2T}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}I(t) &= \int_{-T/2}^{+T/2} 1 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt = \frac{1}{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot (e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot T/2} - e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot T/2}) \\ &= \frac{T}{j \cdot 2 \cdot (\pi \cdot f \cdot T)} \cdot (e^{+j \cdot \pi \cdot f \cdot T} - e^{-j \cdot \pi \cdot f \cdot T}) = T \operatorname{sinc}(\pi \cdot f \cdot T) \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}\mathbb{W}_{2T} = 1/2T \mathbb{W}_{1/2T} = 1/2T \cdot \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(f - \frac{k}{2T})$$

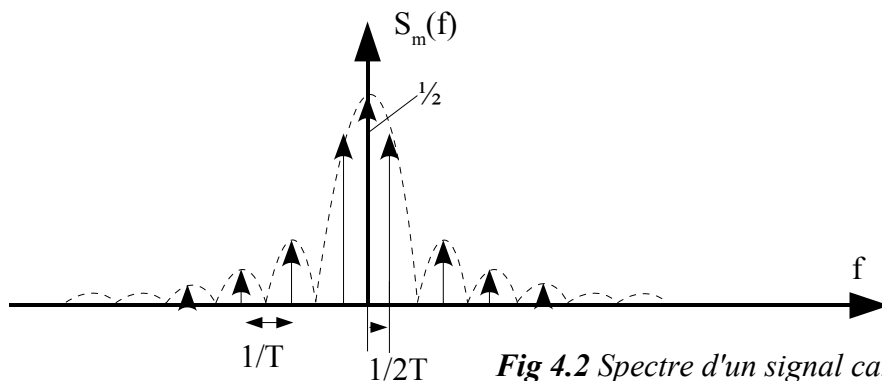
$$S_m(f) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \operatorname{sinc}(\frac{\pi}{2} \cdot k) \cdot \delta(f - \frac{k}{2T})$$

On voit que les raies n'existent que pour  $k = 0, 1, 3, 5, \dots$ , qu'elles sont distantes de  $1/T$ , que leur enveloppe est un sinus cardinal d'argument  $k\pi/2$ .

Les amplitudes successives  $C_k$  des raies de rang  $k$  impairs ont pour valeur  $\frac{1}{2} \cdot \text{sinc}(k\pi/2)$ , c'est à dire,  $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(k\pi/2)}{(k\pi/2)}$  soit encore

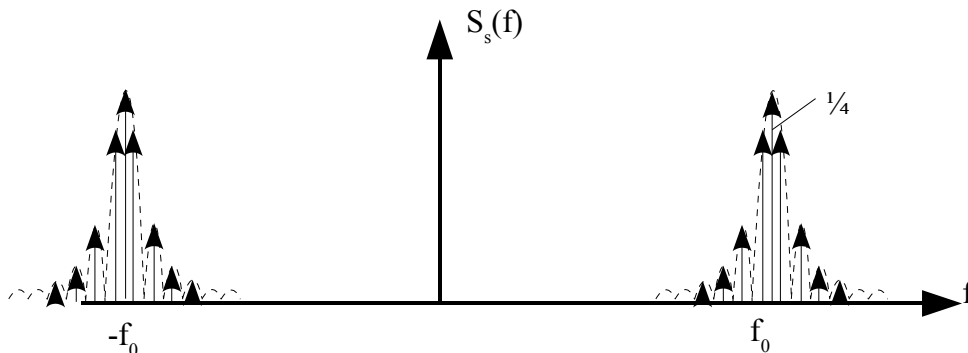
$C_k = \frac{1}{k \cdot \pi}$  (spectre bilatéral, ce qui veut dire que physiquement, l'amplitude de rang  $k$  vaut le double)

L'allure du spectre est alors la suivante :



**Fig 4.2** Spectre d'un signal carré, de durée haute =  $T$

On peut alors faire la représentation spectrale suivante, pour l'OOK, porteuse  $f_0$  :



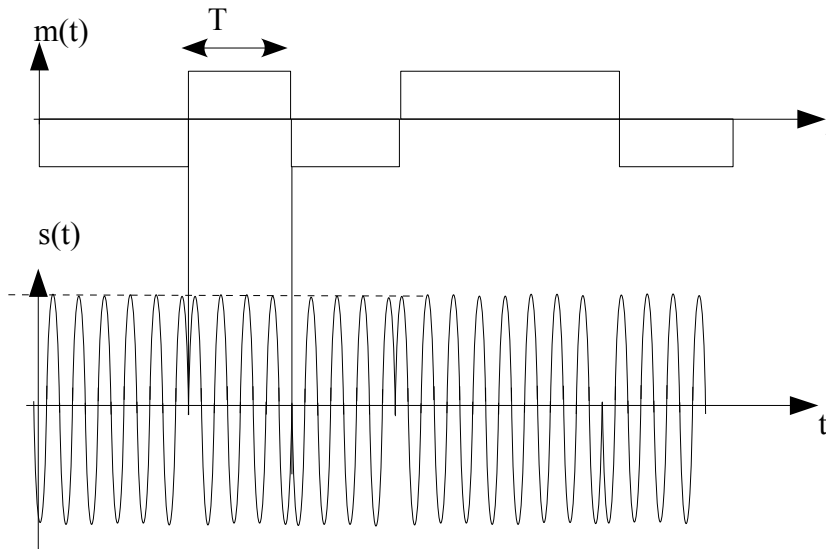
**Fig 4.3** Spectre d'une OOK, modulant déterministe

L'analyse du cas où  $m(t)$  est aléatoire sera étudiée au chapitre 7. On peut tout de même résumer un certain nombre de constatations:

Le spectre de **puissance** du signal  $s(t)$  a la même allure que  $S_s(f)$ , sauf que l'enveloppe est mise au carré. D'autre part le spectre n'est plus un spectre de raies, c'est un **spectre continu**. La seule raie encore existante est celle de la fréquence 0 (valeur moyenne de  $s(t)$ ). En effet, il est assez intuitif de voir que pour une suite aléatoire de 1 et de 0, la valeur moyenne sera  $\frac{1}{2}$  (équiprobabilité). Cette dernière remarque montre que même quand le signal  $m(t)$  est aléatoire, la porteuse est transmise.

#### 4.2 Expression mathématique d'une ASK symétrique

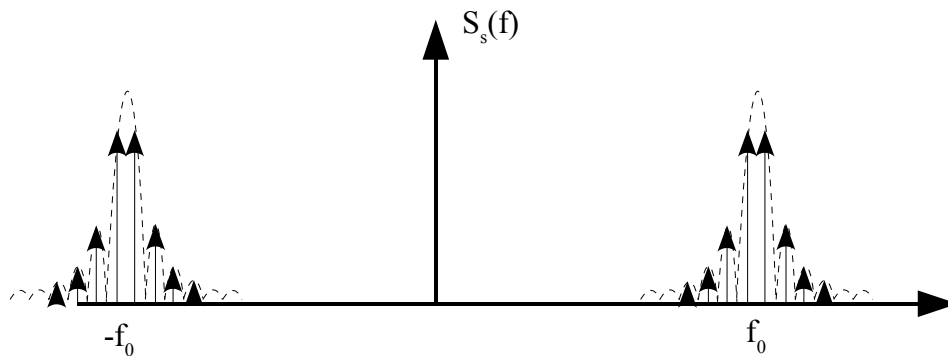
Dans ce cas, le signal  $m(t)$  évolue entre +1 et -1. En définitive, cela revient à un changement de phase de  $\pi$  à chaque changement de bit. :



**Fig 4.4** Allure d'une ASK symétrique

**NB:** Ce tracé est particulier,  $T$  est un multiple de la période de la porteuse.

Le spectre de  $s(t)$  se déduit très simplement de l'analyse précédente (OOK). Le spectre de  $m(t)$  n'a plus de composante continue. D'autre part, l'amplitude de  $m(t)$  a doublé. Donc chaque harmonique double également. Voici le spectre obtenu :



**Fig 4.5** Spectre d'une ASK symétrique, modulant déterministe

La différence par rapport au spectre d'une OOK réside dans l'absence de porteuse. L'avantage de cette modulation est le niveau de puissance, qui ne dépend pas de  $m(t)$ . De plus, la transmission OOK a l'inconvénient d'avoir des moments où  $s(t)$  est *silencieux*. D'où une ambiguïté : le modulateur fonctionne-t-il, ou émet-il un '0' ?

L'inconvénient de la modulation ASK symétrique est la difficulté pour démoduler, car la porteuse est absente (voir démodulation BPSK).

## 5. Modulation / démodulation PSK

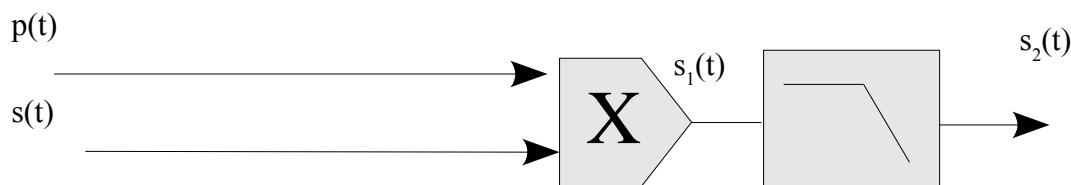
Ce type de modulation (Phase Shift Keying), en français *modulation à déplacement de phase* possède un modulant de type numérique. La plus simple est la BPSK (Binary Phase Shift Keying).

### 5.1 Démodulation BPSK

En fait, la BPSK n'est autre qu'une ASK symétrique. L'étude spectrale a donc déjà été faite. La modulation peut se faire simplement avec un multiplieur (voir modulateur AM).

$$S(t) = A_p \cos(2\pi f_0 t + \varphi + m(t)\pi) \text{ avec } m(t) = 0 \text{ ou } 1.$$

Pour démoduler, un moyen en apparence simple consiste à multiplier la porteuse par le signal  $s(t)$ .



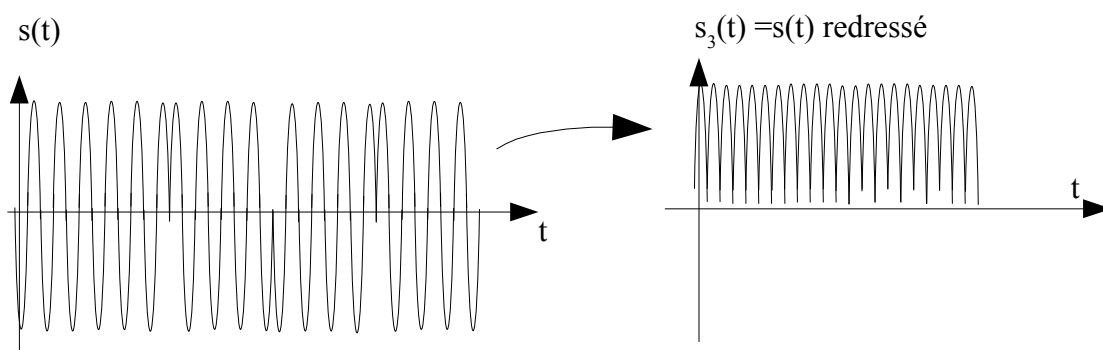
**Fig 5.1** Principe d'un démodulateur PSK à comparateur de phase

$$\begin{aligned} s_1(t) &= A_p \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \cdot A_p \cos(2\pi f_0 t + \varphi + m(t)\pi) \\ &= A_p^2/2 \cdot \{ \cos(m(t)\pi) + \cos(2\pi 2f_0 t + 2\varphi + m(t)\pi) \} \end{aligned}$$

Après filtrage,

$s_2(t)$  vaut  $\pm A_p^2/2$  selon l'état de  $m(t)$ .

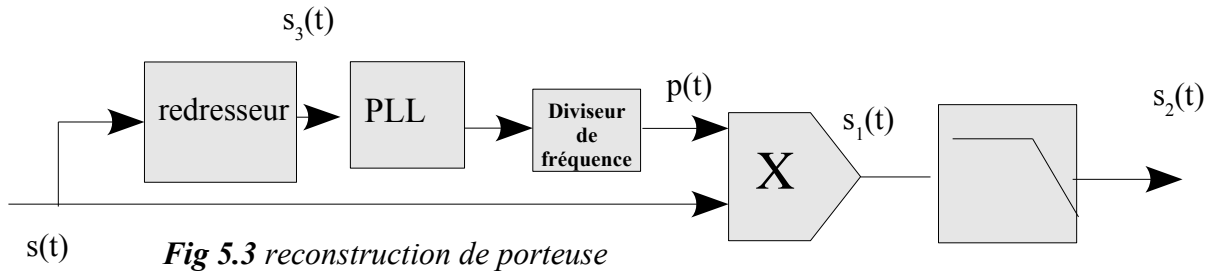
En fait, la difficulté réside dans la régénération d'horloge. Une solution consiste par exemple à redresser la tension  $s(t)$  :



**Fig 5.2** Redressement d'une BPSK

Ce signal, injecté dans une PLL, permet de récupérer le fondamental, c'est à dire une fréquence égale à  $2f_0$ , sinusoïdale.

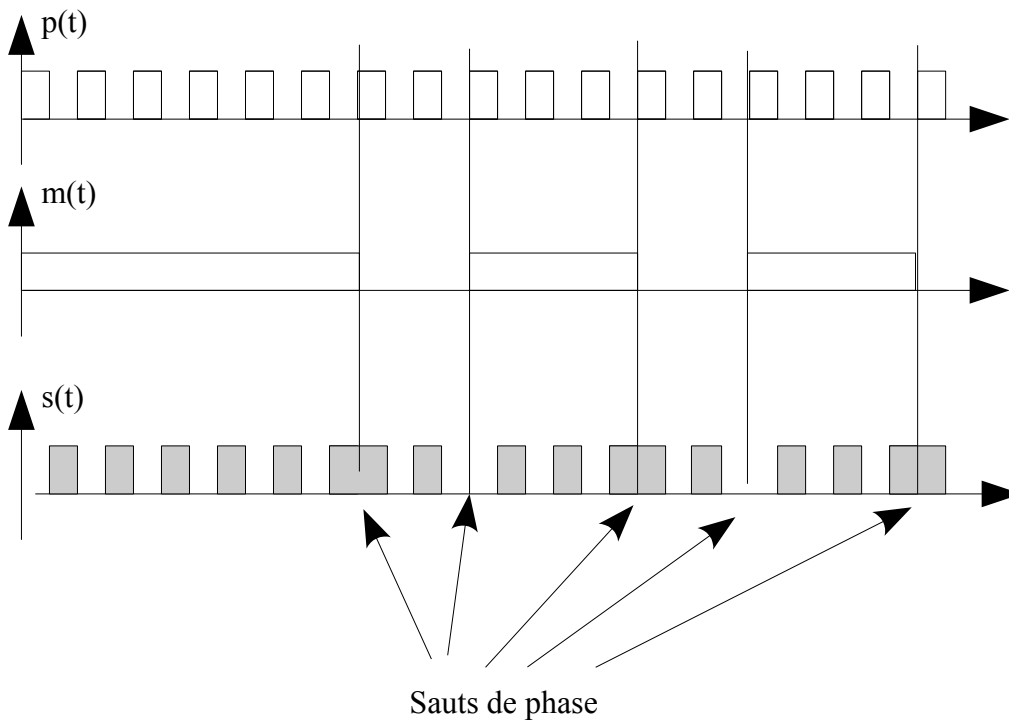
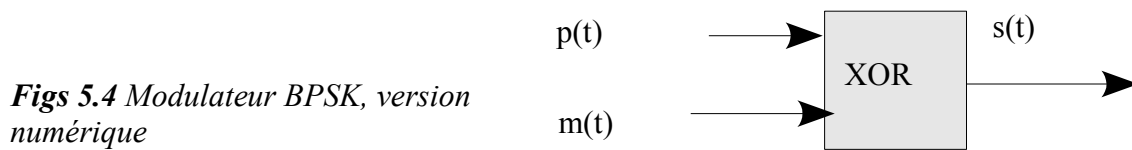
Ensuite, une division de fréquence par deux permet de retrouver  $f_0$ . Voici le synoptique complet :



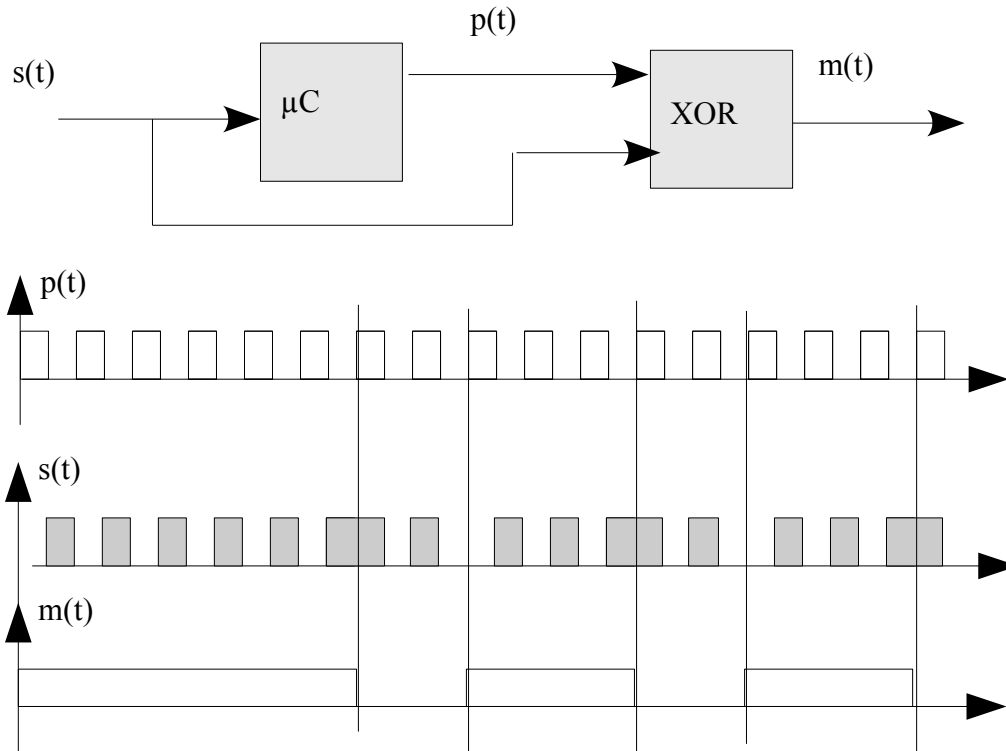
**Modulation / démodulation PSK en version numérique**

La BPSK s'utilise aussi en porteuse numérique. La multiplication est assurée par un opérateur OU Exclusif (XOR). La démodulation se fait par le même procédé. Le XOR est en fait équivalent au multiplieur analogique. Il remplit la même fonction. La reconstruction de porteuse se fait par logiciel embarqué sur micro-contrôleur.

Par exemple l'émetteur peut envoyer la porteuse seule pendant un certain temps, puis émettre ses données BPSK ensuite. La durée d'émission de la porteuse doit laisser le temps au micro-contrôleur de se synchroniser. Au bout d'un certain temps, l'émetteur doit envoyer à nouveau la porteuse pour recalcr le récepteur. Tout ceci fait l'objet d'un protocole.



démodulateur BPSK en version numérique



Figs 5.5 Démodulateur BPSK, version numérique

**Remarque:**

Il existe des PSK à plusieurs moments. Par exemple, le modulant peut être à 4 niveaux ( $\pi/4$ ,  $3\pi/4$ ,  $5\pi/4$  et  $7\pi/4$ ). Durant un temps T, on va pouvoir émettre 2 bits simultanément, le **débit binaire** (bits/s) est doublé alors que la **rapidité de transmission** ( $1/T$ , en bauds) n'a pas changé. Ces modulations particulières ne seront pas étudiées ici.

**6. Modulation / démodulation FSK [3]**

Le modulant est là encore numérique. La FSK (Frequency Shift Keying) est une modulation à saut de fréquence. Nous nous limiterons à la FSK à deux moments.

**6.1 Modulateur FSK**

**Modulateur à discontinuité de phase**

Ce procédé simple consiste tout simplement à commuter au rythme du modulant deux oscillateurs de fréquences  $F_1$  et  $F_2$  :

L'allure de  $s(t)$  est la suivante :

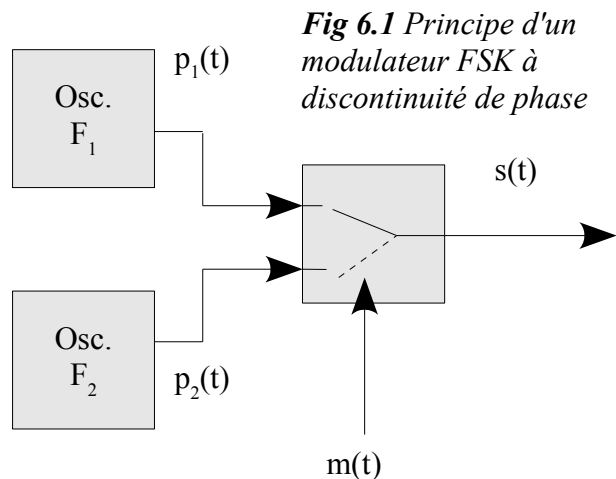
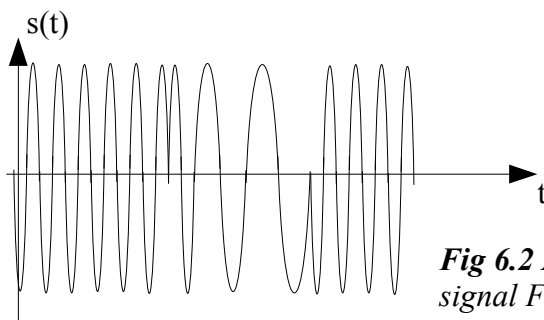


Fig 6.1 Principe d'un modulateur FSK à discontinuité de phase





**Fig 6.2** Allure d'un signal FSK

Etant donné que les oscillateurs 1 et 2 sont décorrélés, la commutation se fait d'une sinusoïde à l'autre avec fatalement une discontinuité.

**Autres modulateurs :** voir les modulateurs FM à VCO et PLL

## 6.2 Démodulateur FSK

Voir les démodulateurs FM.

## 6.3 Aspect spectral [3]

Les paramètres qui caractérisent une FSK sont:

- La déviation de fréquence (comme en FM) :  $\Delta F = \frac{1}{2} (F_2 - F_1)$
- La rapidité de transmission :  $R = 1/T$ , T étant la durée d'un symbole.
- L'indice de modulation :  $\mu = (F_2 - F_1)/R = 2 \cdot \Delta F / R = 2 \cdot \Delta F \cdot T$  (comme en FM)

Du fait que la modulation de fréquence est non linéaire, il est très difficile de déterminer mathématiquement les spectres de signaux FSK. Toutefois, on peut énoncer des résultats empiriques :

- Un procédé de modulation FSK à phase discontinue élargit le spectre pour rien. Cet élargissement se comprend assez bien, du fait que toute discontinuité de tension nécessite de la bande passante.
- Si  $\mu$  vaut  $2/\pi = 0,64$ , alors le spectre est relativement plat entre  $F_1$  et  $F_2$ , et diminue rapidement en dehors. C'est une valeur très souvent adoptée dans les modulations FSK.

## 7. Les modulations analogiques dans le cas de messages aléatoires [7]

Pour des raisons de simplification, les principes et théories présentés jusque là, se sont appuyés systématiquement sur la manipulation de signaux déterministes. Or les transmissions portent pour l'essentiel sur des signaux aléatoires. Le but de cette partie est de donner un éclairage nouveau faisant appel à des outils plus complexes, ceux qui concernent le traitement de signaux aléatoires.

### 7.1 Généralités sur les signaux aléatoires (continu et supposés réels)

A un signal réel  $x(t)$  aléatoire, on peut associer une variable aléatoire réelle  $X_t$ , qui correspond à l'ensemble des valeurs que peut prendre  $x$  à l'instant  $t$ . On peut dès lors étudier la statistique de cette variable, en procédant à  $n$  expériences et en faisant l'analyse de  $n$  valeurs obtenues à l'instant  $t$ .

Parmi les paramètres statistiques classiques, citons la densité de probabilité  $p(x_t)$ , l'espérance  $E[X_t]$ , l'écart type  $\sigma_{x_t}$ , la fonction d'autocorrélation  $\Gamma_{x_t}(\tau)$ .

Si l'ensemble de ces paramètres restent invariants lorsqu'on change la valeur du temps  $t$ , on dit que la V.A.R.  $X_t$  est **stationnaire**.

Si par ailleurs, les moyennes temporelles se confondent avec les moments statistiques :

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cdot dt = E[X] \quad , \quad \bar{x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) \cdot dt = E[X^2]$$

alors, le processus étudié est dit **ergodique**.

On considèrera, même si c'est difficilement démontrable en pratique, que **les signaux aléatoires réels qui seront étudiés sont stationnaires et ergodiques**. Cette hypothèse permettra d'obtenir les principaux paramètres de la VAR  $X$  en opérant non pas sur des données statistiques à l'instant  $t$ , mais en opérant sur une seule expérience  $x(t)$  tout au long du temps.

## 7.2 Fonction d'autocorrélation $\Gamma_x(\tau)$ et densité spectrale de puissance $\gamma_x(f)$

Un signal aléatoire  $x(t)$  ne peut pas se décrire mathématiquement par une expression temporelle (par définition !). L'élément qui permet de caractériser le signal dans la dimension temps, est la fonction d'**autocorrélation**, notée  $\Gamma_x(\tau)$ . On peut la considérer comme étant une fonction du temps ( $\tau$ ) qui renseigne sur le *degrès de ressemblance* de  $x(t)$  avec lui même,  $\tau$  seconde après.

*Définition mathématique du point de vue temporel (moyenne temporelle) :*

$$\Gamma_x(\tau) = \overline{x(t) \cdot x(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cdot x(t+\tau) dt$$

*Définition statistique (moyenne statistique du produit des VAR  $X_t$  et  $X_{t+\tau}$ ) :*

$$\Gamma_x(\tau) = E[X_t \cdot X_{t+\tau}]$$

Comme le processus est stationnaire, l'espérance ne dépend que de l'écart  $\tau$ . La propriété d'ergodicité permet d'écrire l'égalité des deux relations.

$$\Gamma_x(\tau) = \overline{x(t) \cdot x(t+\tau)} = E[X_t \cdot X_{t+\tau}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_t \cdot x_{t+\tau} \cdot p(x_t, x_{t+\tau}, \tau) \cdot dx_t \cdot dx_{t+\tau}$$

où  $p(x_t, x_{t+\tau}, \tau) \cdot dx_t \cdot dx_{t+\tau}$  représente la probabilité que :

$X_t$  soit compris dans l'intervalle  $[x_t; x_t+dx_t]$  ET  $X_{t+\tau}$  soit compris dans l'intervalle  $[x_{t+\tau}; x_{t+\tau}+dx_{t+\tau}]$

La **densité spectrale de puissance**  $\gamma_x(f)$  est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation :

$$\gamma_x(f) = \mathcal{F}\{\Gamma_x(\tau)\}$$

Retenons ceci :

Pour un **signal déterministe**,  $x(t)$ , la fonction qui est utilisée dans le domaine temporel est directement le signal  $x(t)$ . Son dual dans le domaine fréquentiel est son **spectre d'amplitude** (densité),  $S_x(f)$ , sa transformée de Fourier :

$$S_x(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

Pour un **signal aléatoire**,  $x(t)$ , la fonction qui est utilisée dans le domaine temporel est la **fonction d'autocorrélation**  $\Gamma_x(\tau)$ . Son dual dans le domaine fréquentiel est sa **densité spectrale de puissance**  $\gamma_x(f)$ , sa transformée de Fourier :

$$\gamma_x(f) = \mathcal{F}\{\Gamma_x(\tau)\}$$

### 7.3 Fonction d'autocorrélation d'un signal modulé AM

Soit le signal :

$$s(t) = m(t).p(t) = m(t).A_p.\cos(2.\pi.f_p.t + \varphi_p), \quad p(t) = A_p.\cos(2.\pi.f_p.t + \varphi_p)$$

Ecrivons la fonction d'autocorrélation de S (au sens des probabilités) :

$$\Gamma_s(\tau) = E[S_t . S_{t+\tau}] = E[M_t . P_t . M_{t+\tau} . P_{t+\tau}]$$

La VAR  $P_t$  associée à  $p(t) = A_p.\cos(2.\pi.f_p.t + \varphi_p)$  est plus précisément une fonction aléatoire dans le sens où  $\varphi_p$  est la phase du cosinus, uniformément réparti entre 0 et  $2.\pi$ . Or  $M_t$  et  $P_t$  sont indépendantes, ce qui nous permet de séparer l'expression en deux :

$$\Gamma_s(\tau) = E[S_t . S_{t+\tau}] = E[M_t . M_{t+\tau}] . E[P_t . P_{t+\tau}] = \Gamma_m(\tau) . \Gamma_p(\tau)$$

Calculons à présent la fonction d'autocorrélation  $\Gamma_p(\tau)$  de  $p(t) = A_p.\cos(2.\pi.f_p.t + \varphi_p)$  :

**Méthode temporelle:**

$$\Gamma_p(\tau) = \overline{p(t) . p(t+\tau)} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} A_p . \cos(2.\pi . F_p . t + \varphi) . A_p . \cos(2.\pi . F_p . (t+\tau) + \varphi) dt$$

$$\Gamma_p(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \frac{A_p^2}{2} . \cos(2.\pi . F_p . \tau) + \frac{A_p^2}{2} . \cos(2.\pi . F_p . (2t+\tau) + 2.\varphi) dt$$

$$\Gamma_p(\tau) = \frac{A_p^2}{2} . \cos(2.\pi . F_p . \tau)$$

**Méthode probabiliste ( la phase est aléatoire uniformément répartie de 0 à  $2\pi$  ) :**

$$\Gamma_p(\tau) = E[A_p \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F_p \cdot t + \varphi) \cdot A_p \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F_p \cdot (t + \tau) + \varphi)]$$

$$\Gamma_p(\tau) = E\left[\frac{A_p^2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F_p \cdot \tau) + \frac{A_p^2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F_p \cdot (2t + \tau) + 2 \cdot \varphi)\right]$$

$$\Gamma_p(\tau) = E\left[\frac{A_p^2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F_p \cdot \tau)\right] + E\left[\frac{A_p^2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F_p \cdot (2t + \tau) + 2 \cdot \varphi)\right]$$

Le premier terme est une constante, son espérance est donc celle-ci:

$$\begin{aligned} E\left[\frac{A_p^2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F_p \cdot \tau)\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_p^2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F_p \cdot \tau) \cdot p(\varphi) \cdot d\varphi \\ &= \frac{A_p^2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F_p \cdot \tau) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} p(\varphi) \cdot d\varphi = \frac{A_p^2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F_p \cdot \tau) \end{aligned}$$

Le second terme est nul, puisque :

$$\begin{aligned} E\left[\frac{A_p^2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F_p \cdot (2t + \tau) + 2 \cdot \varphi)\right] &= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{A_p^2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F_p \cdot (2t + \tau) + 2 \cdot \varphi) \cdot p(\varphi) \cdot d\varphi \\ &= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{A_p^2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F_p \cdot (2t + \tau) + 2 \cdot \varphi) \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot d\varphi = 0 \end{aligned}$$

On retiendra donc que la fonction d'autocorrélation d'un cosinus dont la phase est aléatoire et uniformément répartie sur l'intervalle  $[0 ; 2\pi]$  est un cosinus :

$$\Gamma_p(\tau) = \frac{A_p^2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F_p \cdot \tau)$$

La fonction d'autocorrélation d'un signal AM,  $s(t) = m(t) \cdot p(t) = m(t) \cdot A_p \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi_p)$ , est donc :

$$\Gamma_s(\tau) = \Gamma_m(\tau) \cdot \frac{A_p^2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F_p \cdot \tau)$$

### 7.4 Densité spectrale de puissance d'un signal modulé AM

Nous avons vu que la densité spectrale de puissance est reliée à la fonction d'autocorrélation par la transformée de Fourier :

$$\gamma_s(f) = \mathcal{F}\{\Gamma_s(\tau)\}$$

Dans le cas d'un signal AM,

$$\begin{aligned} \gamma_s(f) &= \mathcal{F}\{\Gamma_m(\tau) \cdot A_p^2/2 \cdot \cos(2\pi f_p \tau)\} = \mathcal{F}\{\Gamma_m(\tau)\} * \mathcal{F}\{A_p^2/2 \cdot \cos(2\pi f_p \tau)\} \\ &= \gamma_m(f) * \left\{ \frac{1}{2} A_p^2/2 \cdot \delta(f - f_p) + \frac{1}{2} A_p^2/2 \cdot \delta(f + f_p) \right\} \\ &= \boxed{\frac{1}{2} A_p^2/2 \cdot \gamma_m(f - f_p) + \frac{1}{2} A_p^2/2 \cdot \gamma_m(f + f_p)} \end{aligned}$$

convolution

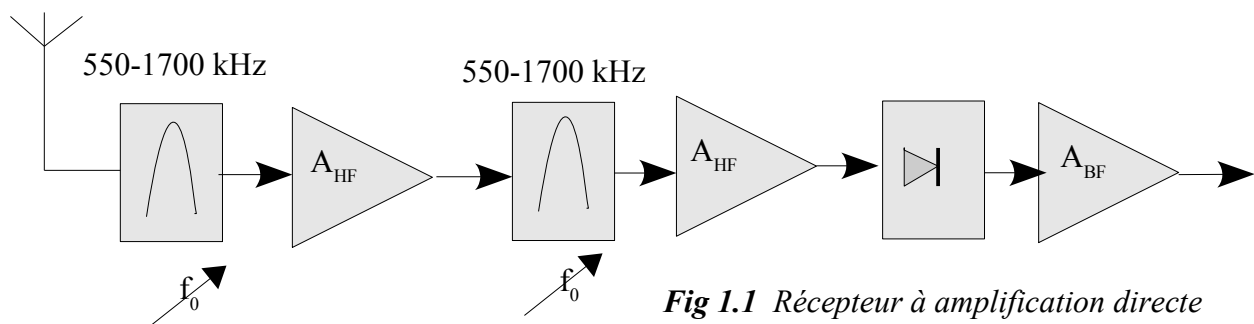
Ainsi, la densité spectrale de puissance d'un signal modulé AM est la densité spectrale de puissance du signal modulant, décalé autour de la fréquence porteuse, pondéré par un coefficient  $A_p^2/2$ ,  $A_p$  étant l'amplitude de la porteuse.

# Principe de fonctionnement des récepteurs radio [1],[6]

## 1. Récepteur à amplification directe (Tuned Radio Frequency -TRF)

Ce type de récepteur est le plus simple qui soit. Il est muni d'une série de filtres sélectifs réglables qui vont permettre d'isoler une station émettrice.

Voici le schéma fonctionnel :



L'exemple montré concerne la radio AM en ondes moyennes (MW). La bande reçue s'étend de 550 kHz à 1700kHz. L'utilisateur doit régler simultanément plusieurs filtres afin de caler le détecteur d'enveloppe sur la bonne fréquence. Ce type de récepteur est aujourd'hui peu utilisé.

## 2. Récepteur superhétérodyne

Le récepteur à amplification directe présente l'inconvénient d'avoir plusieurs filtres à régler. De plus, le détecteur d'enveloppe doit être aussi efficace à 550 kHz qu'à 1700 kHz.

Une solution très subtile consiste, non pas à adapter un filtre passe-bande à un spectre radio d'entrée, mais au contraire, à adapter le spectre à un filtre passe-bande fixe. Ceci s'obtient par un **mélangeur** (multiplication temporelle). L'idée consiste donc à déplacer le spectre radio de manière à le faire "glisser" devant un filtre à fréquence fixe que l'on appelle **filtre à fréquence intermédiaire (FI)**.

Ce procédé, le **changement de fréquence**, rappelle la détection synchrone, sauf qu'ici, on ne cherche pas à rabattre le signal modulé autour de 0Hz (bande de base), mais autour d'une fréquence  $F_I$ .

Schéma d'un récepteur superhétérodyne :

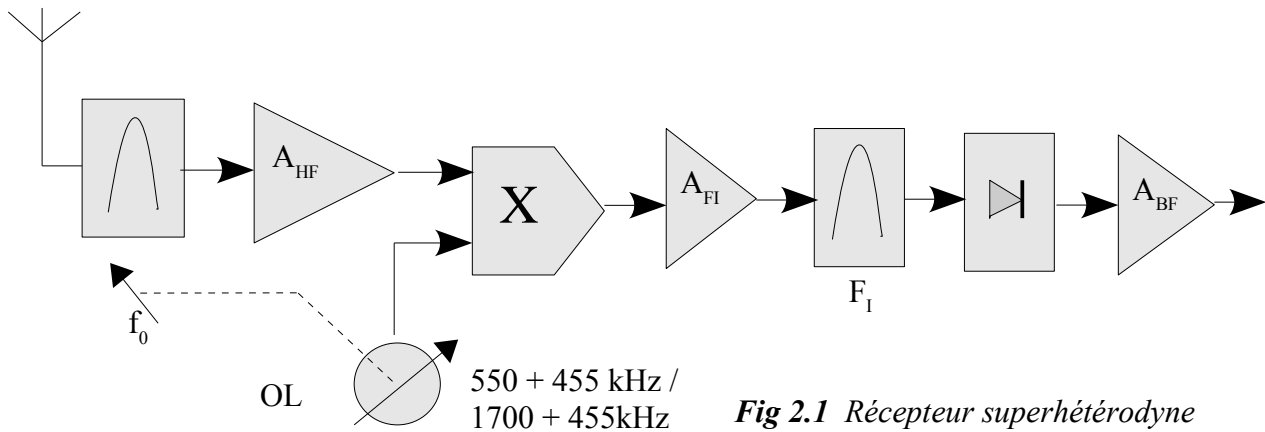


Fig 2.1 Récepteur superhétérodyne

Pour les récepteurs en ondes moyennes, la fréquence intermédiaire est fixée à  $F_I = 455\text{kHz}$ . En modulation FM commerciale,  $F_I$  vaut  $10,7\text{ MHz}$ . L'avantage réside dans le gain en terme de réglages. De plus, toute modulation AM se ramène en sortie de mélangeur, à une AM à  $455\text{kHz}$ . Le détecteur est optimisé pour cette valeur.

Voyons le principe du point du vue spectral :

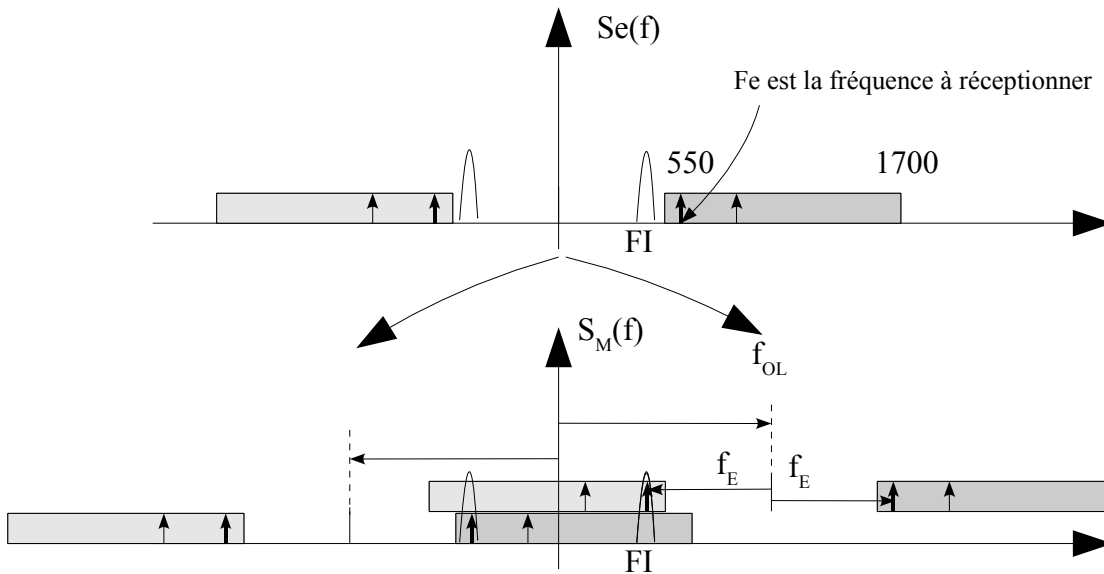


Fig 2.2 Déplacement des spectres sur une réception superhétérodyne

**Remarque:** sur ce tracé, on ne considère pas le passe bande d'entrée.

$S_M(f)$  correspond à la sortie du mélangeur. Prenons un exemple chiffré: soit une station qui émet à  $f_E = 600\text{ kHz}$ . La sortie du mélangeur donnera deux fréquences. L'une à  $f_{OL} - f_E$ , l'autre à  $f_{OL} + f_E$ . Dans notre cas, c'est  $f_{OL} - f_E$  qui sera égal à  $f_i$ , donc,  $f_{OL} = f_E + f_i = 600 + 455 = 1055\text{ kHz}$ .

Pour explorer tout le spectre  $f_{OL}$  doit donc évoluer de  $550 + 455$  à  $1700 + 455 = [1005\text{ kHz} - 2155\text{ kHz}]$

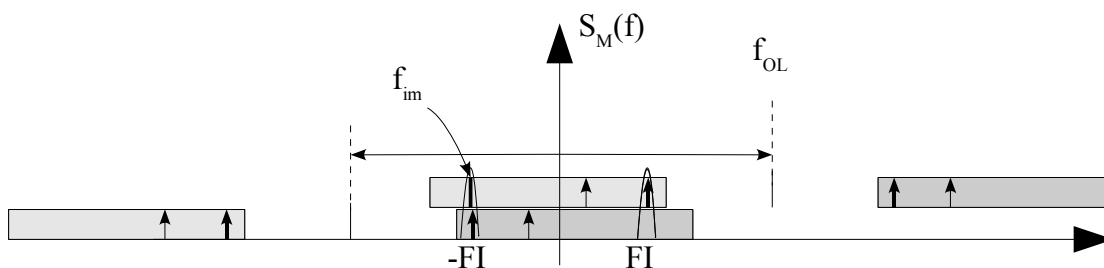
Le filtre FI doit avoir une bande passante qui correspond au double de celle du message porté. En AM (ondes moyennes) la bande passante du filtre est 10 kHz. De tels filtres sont réalisés par des filtres céramiques.

### Le problème de la fréquence image

Si on reprend l'exemple précédent,  $f_{OL} = 1055$  kHz pour  $f_E = 600$  kHz. La question qui se pose est la suivante: n'existe-t-il pas une seconde fréquence,  $f_{im}$ , qui, se présentant à l'entrée du mélangeur, tomberait dans le filtre intermédiaire ? La réponse est oui.

En effet, on le voit sur le graphique précédent, une partie du spectre déplacé vers la droite ( resp. vers la gauche) se retrouve dans le filtre intermédiaire,  $f = -FI$ , (resp.  $F = +FI$ ). Sa fréquence,  $f_{im}$ , se situe  $2FI$  plus haut que la fréquence choisie. Ainsi, la fréquence image d'un signal reçue est :

$$f_{im} = f_E + 2 \cdot FI.$$



**Fig 2.3** Mise en évidence de la fréquence image

Si on fait une application numérique, basée sur l'exemple, alors  $f_{im} = 600 + 2 \cdot 455 = 1510$  kHz.

Le rôle du passe-bande d'entrée est maintenant évident. Il permet de rejeter la fréquence image du signal désiré. Son déplacement dans le spectre est corrélé à la fréquence de l'oscillateur local. Les deux déplacements sont liés.

Toutefois, un moyen d'éviter d'avoir un filtre mobile consiste à choisir une fréquence intermédiaire la plus élevée possible. En effet, si FI vaut par exemple 10 Mhz, la fréquence image se situerait 20MHz au dessus de la fréquence d'entrée. Dans le pire des cas 20,550 Mhz. Un filtre passe bas à fréquence fixe (1700 kHz) permet alors de supprimer toute fréquence image.

Il reste alors un problème. A 10 Mhz, il n'est pas facile, voir impossible de construire un filtre dont la bande passante soit de 10kHz. Plusieurs stations vont donc traverser le filtre intermédiaire.

On utilise alors un récepteur superhétérodyne à **double changement de fréquence**. Le second changement de fréquence (second mélangeur), sera un oscillateur à fréquence fixe. Il produira un nouveau glissement vers un second filtre intermédiaire (455kHz). C'est lui qui va opérer le tri entre les stations qui seront passées au travers du premier filtre intermédiaire.

### Exercice :

1. Donner le synoptique d'un récepteur à double changement de fréquence
2. Donner la condition qui doit être respectée entre la **bande passante** du premier filtre intermédiaire et la **fréquence centrale** du second filtre intermédiaire.



## La modulation d'impulsions codées (MIC ou PCM – Pulse code modulation) [2],[3]

La modulation MIC (PCM), comme toute modulation, a pour but de transmettre un signal sur une certaine distance. Les transmissions de type analogique sont sensibles aux bruits. Le message informatif subit fatalement une altération.

Dans le cas d'une transmission numérique (transmission binaire de 0 et de 1), le bruit du canal de transmission va également amener des perturbations. Mais si l'on est capable en réception de discerner un '1' d'un '0' (malgré la présence de bruit...) alors il est possible de recevoir le message à l'identique. C'est là la qualité essentielle des modulations numériques.

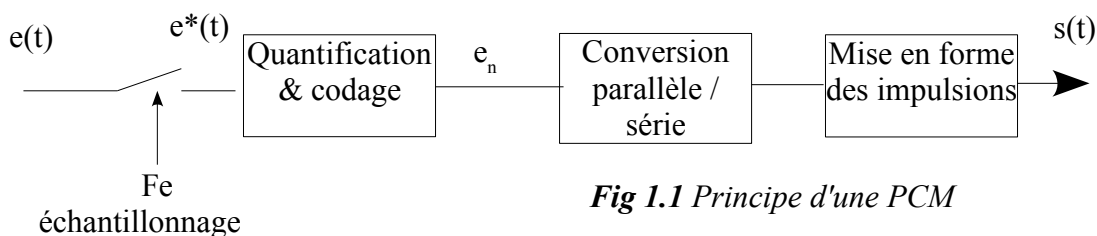
### 1. Principe de la modulation MIC

De manière simple, on peut dire que le procédé de modulation MIC consiste à transformer un signal analogique en une **suite d'impulsions**, d'où cette dénomination.

Une MIC est constituée de plusieurs fonctions qui sont :

- L'échantillonnage
- La quantification
- Le codage
- La mise en série
- adaptation au canal de transmission

Le schéma fonctionnel d'un tel procédé (émission) peut être représenté comme suit :



*Fig 1.1 Principe d'une PCM*

**L'échantillonnage** est le fait de relever une tension analogique à un instant donné. Si cette action se comprend assez facilement, il est pourtant difficile de la formaliser mathématiquement. En effet, du point de vue mathématique, la prise d'échantillon se fait pendant un instant nul. C'est la raison pour

laquelle la fonction Dirac,  $\delta(t)$ , est fort utile, puisque c'est la seule fonction qui permette de représenter un évènement qui n'a pas de durée, et qui se produit à un instant donné. Ainsi, mathématiquement, on écrira:

$$e^*(t) = e(t) \cdot \mathbb{W}_{Te}, \text{ où } \mathbb{W}_{Te} = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(t - kTe), \quad Fe = 1/Te$$

**Attention :** La transformée de Fourier de  $e^*(t)$  est  $Se^*(f) = Fe \cdot \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} S_e(f - iFe)$ . Le spectre  $Se(f)$  est donc répété tous les  $Fe$ . Ainsi, l'étendue spectrale de  $e(t)$  ne doit pas excéder  $Fe/2$ , sinon les spectres se recouvrent : **théorème de Shannon**.

**La quantification** est l'action d'associer un nombre entier à la valeur échantillonnée. L'ensemble des nombres entiers est fini (par exemple 256 nombres entiers, 1024, ou 65536 sont des quantités courantes). Donc nécessairement, la quantification est une approximation: à un nombre  $e_n$ , issu de la quantification, correspond tout un intervalle de valeurs analogiques  $e^*(t)$  en entrée de quantification. Nous verrons par la suite que la quantification est à l'origine du *bruit de quantification*.

**Le codage** est simplement la **représentation binaire** que l'on va donner à chacun des nombres entiers possibles  $e_n$ . On peut citer entre autres le codage binaire naturel (entier non signé), le codage binaire signé (entiers signés) qui permet une représentation positive et négative.

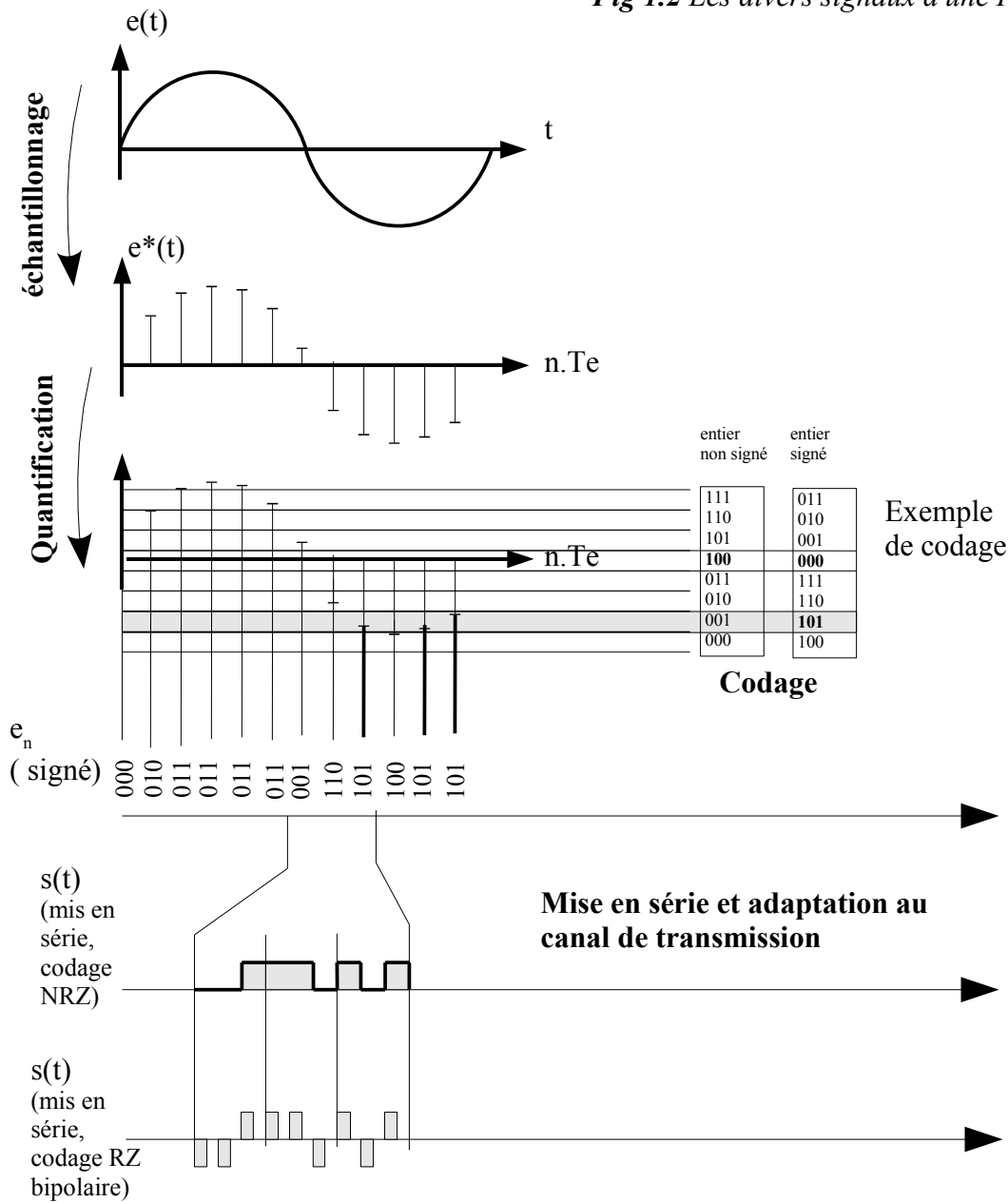
**La mise en série** est la fonction qui permet de récupérer le nombre binaire  $e_n$  codé sur N bits, de mettre chacun des bits les uns à la suite des autres (mise en série).

**L'adaptation au canal de transmission.** Il se peut que l'émission directe, bit à bit, ne conviennent pas au canal (air, câble, fibre optique...). Par exemple, sur une longue ligne de transmission, on peut trouver des transformateurs qui stoppent la composante continue. Dans ce cas, le train d'impulsions ne doit pas contenir de composante continue. On notera également que le canal est forcément borné en fréquence. Le spectre du train d'impulsions ne doit pas s'étendre au delà d'une certaine valeur. Enfin, il peut être nécessaire d'incorporer dans le spectre du signal, la fréquence d'horloge des bits afin de pouvoir synchroniser facilement le récepteur pour démoduler.

Pour pouvoir répondre à ces contraintes, on associe aux bits '1' et '0' des **motifs**. Ces motifs ont des caractéristiques temporelles et fréquentielles bien particulières qui vont permettre de satisfaire les exigences. On peut par exemple citer les codage NRZ, RZ, Manchester...

Représentation des divers signaux mis en jeu dans la MIC:

Fig 1.2 Les divers signaux d'une PCM



## 2. Dispositifs utilisés dans les MIC : CAN et CNA

Les opérations *d'échantillonnage*, de *quantification* et de *codage* sont assurées par un CAN (convertisseur A/N). Dans le présent paragraphe, on fait l'hypothèse d'un **codage entier signé**.

Un CAN est caractérisé par sa **résolution**, c'est à dire le nombre de bits qui est utilisé pour coder un échantillon  $e(nT_e)$ . Dans l'exemple ci-dessus, le CAN a une résolution N de 3 bits (quantification

sur 8 niveaux). Le **quantum (q)** d'un CAN permet de faire le lien entre la tension analogique d'entrée échantillonnée,  $e(nTe)$ , et la valeur  $e_n$ :

$$q = \Delta V / 2^N.$$

$\Delta V$  est la plage de mesure du CAN.  
Il y a  $2^N$  intervalles de quantification

Caractéristique de transfert du CAN :

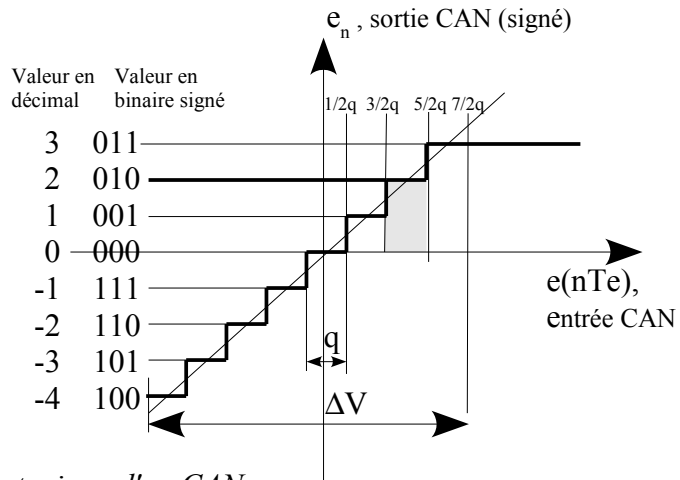


Fig 2.1 Caractéristique typique d'un CAN

Toute tension analogique comprise dans l'intervalle  $[iq - q/2, iq + q/2 [$  se code par  $e_n = i$ .  
Le procédé de quantification introduit une erreur, *l'erreur de quantification*, qui est d'autant plus faible que le quantum est faible. En d'autres termes, plus N est grand, plus l'erreur sera faible.

La démodulation consiste à enchaîner les opérations en sens inverse. On utilisera entre autre un convertisseur numérique / analogique, CNA. Son rôle est exactement le dual du CAN.

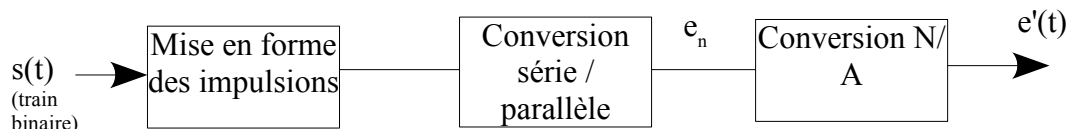


Fig 2.2 Démodulation PCM

Le CNA doit avoir la courbe de transfert réciproque. Il va restituer la valeur  $e'(nTe) = e_n \cdot q$ .  
Le signal reconstitué (de l'exemple précédent) donne :

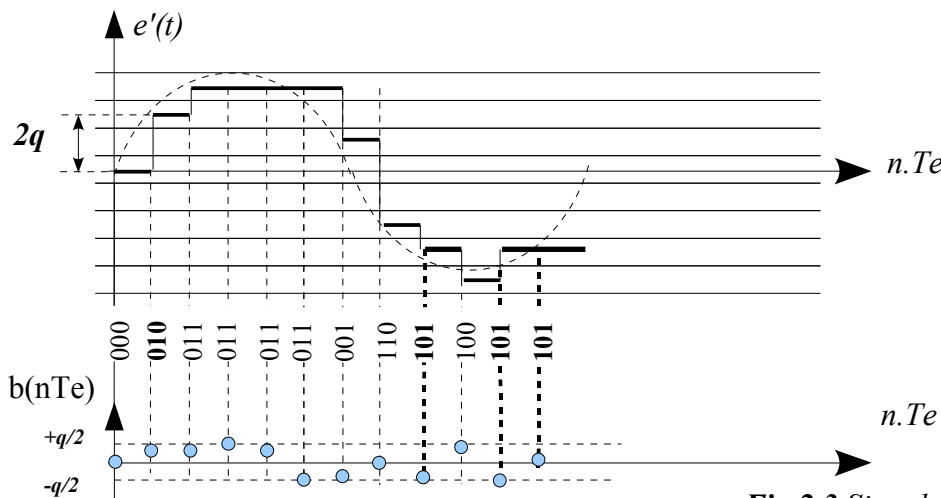


Fig 2.3 Signal démodulé PCM

On remarque ici la différence d'amplitude au niveau de chacun des échantillons **aux instants d'échantillonnage** :  $e(nT_e) - e'(nT_e) = b(nT_e)$ . Cet écart est dû à la quantification (donc la résolution). De plus, entre deux instants d'échantillonnage successifs, la tension  $e'(t)$  est gardée constante. Un filtrage passe-bas permet de lisser la courbe et de s'approcher de celle d'origine. Un filtre *adapté*, peut même annuler totalement cet effet de marche d'escalier, mais pas l'erreur de quantification.

### **Exercice 1:**

On veut construire une transmission locale entre deux systèmes numériques en bande de base. Le premier système a le rôle d'émetteur, le second est le récepteur. Le but est de transmettre la parole d'un individu d'un système à l'autre.

#### **Caractéristiques:**

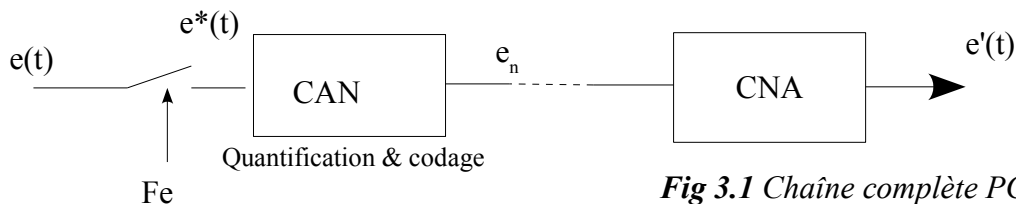
Bande passante :	300-3400 Hz (bande téléphonique)
quantification & codage :	8 bits entier signé
transmission numérique :	RS232 (1 bit start, 8 bits code, 1 bit stop)
fréquence d'échantillonnage :	10 kHz.

1. Tracer le synoptique de l'ensemble.
2. Justifier la valeur de la fréquence d'échantillonnage  $F_e$ .
3. Donner les caractéristiques (très grossièrement) du filtre anti-repliement
4. Choisir parmi les débits possibles (9600bds, 57000bds, 115000bds) celui qui convient à l'application.

### 3. Bruits dans les MIC

On peut considérer qu'il y a deux origines de bruits :

- le bruit amené par la transmission numérique elle-même, par le canal de transmission. Ce bruit peut entraîner des erreurs d'interprétation de bit et donc fausser gravement des données. Pour anticiper ces problèmes, des codes de correction d'erreurs plus ou moins complexes peuvent être mis en place. Ceci étant dit, il faut bien voir que lorsque la transmission numérique est bien adaptée à son canal de transmission, le taux d'erreur est extrêmement faible et par conséquent, la restitution est idéale.
- Le bruit produit avant et après la transmission numérique. Il s'agit principalement du procédé de conversion A/N et N/A qui est mis en cause, avec le **bruit de quantification**. C'est ce second point que nous allons aborder (voir fig. 2.3)..



**Fig 3.1** Chaîne complète PCM

D'après ce qui a été vu au paragraphe précédent, toute tension  $e(nT_e) \in [iq - q/2, iq + q/2 [$  se code par  $e_n = i$ . Dans cet intervalle, seule la tension  $e(nT_e) = iq$  sera décodée de manière exacte à l'arrivée. En effet, en sortie de CNA,  $e'(nT_e) = iq = e(nT_e)$ .

Par exemple, supposons  $e(n) = 0V$ . la sortie du CNA en fin de chaîne,  $e'(t)$ , donnera  $0V$  même si  $e(t)$  est entachée d'une tension  $b(t)$  variant entre  $\pm q/2$ .

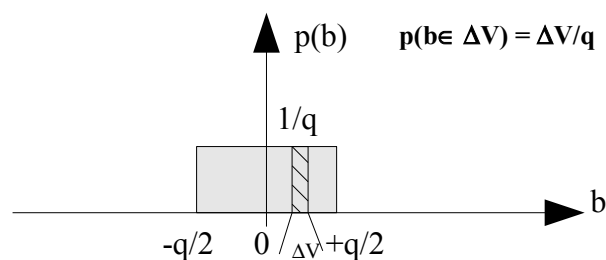
$$e'(t) - e(t) = b(t).$$

$b(t)$  est le bruit de quantification.

En supposant que le bruit induit par le canal de transmission n'amène aucune erreur, alors la quantification est la principale source de bruit de toute la transmission (si on suppose que l'électronique analogique associée est de bonne qualité en terme de bruit). Dans ce cas, l'avantage d'une transmission numérique sur une transmission analogique classique repose sur le fait qu'on puisse déterminer la rapport S/B à l'avance, sans se soucier du canal. Pour cela, il faut établir le lien entre quantum et valeur efficace du bruit de quantification.

#### Valeur efficace du bruit de quantification

Supposons l'échantillon  $e(nT_e)$ . Il existe forcément  $i$  tel que  $e(nT_e) \in [iq - q/2, iq + q/2 [$ . La question qui se pose (pour le bruit) n'est pas de savoir quelle est la valeur de  $i$ , mais plutôt dans quel endroit de l'intervalle  $[iq - q/2, iq + q/2 [$  se trouve réellement  $e(nT_e)$ . Si par chance il se trouve au milieu, le bruit sera nul. On va considérer (en toute logique) que l'échantillon a autant de chance de se trouver n'importe où dans l'intervalle. On a donc équiprobabilité que le bruit  $B$  se trouve entre  $-q/2$  et  $+q/2$  d'où le tracé ci-contre.



**Fig 3.2** Densité de probabilité du bruit de quantification

La valeur efficace de bruit  $b_{\text{eff}}$ , est donc :

$$b_{\text{eff}}^2 = E[B^2] = \int_{-q/2}^{+q/2} p(b) \cdot b^2 db = \int_{-q/2}^{+q/2} \frac{1}{q} \cdot b^2 db$$

on en déduit  $b_{\text{eff}}^2 = q^2/12$

La valeur efficace de  $b(t)$  est donc **beff =  $q/(2\sqrt{3})$**

Cette information est très utile car elle permet, à partir d'un rapport S/B donné, de déterminer le nombre de bits nécessaires.

**Exercice 2:** On veut transmettre un signal audio analogique d'amplitude maximale 5V, par une MIC. On souhaite un rapport S/B de 80 dB dans le meilleur des cas. Déterminer le nombre de bits nécessaires pour le CAN et le CNA.

Rapport S/B =  $V_{\text{eff signal}} / b_{\text{eff}}$ . Le meilleur des cas correspond à une amplitude maximale,  $V_{\text{max}}$ , au niveau du signal d'entrée.

$V_{\text{eff signal}} = V_{\text{max}} / \sqrt{2}$  (cas d'une sinusoïde, pour simplifier)

$$\text{Rapport S/B} = \frac{V_{\text{max}}/\sqrt{2}}{q/2\sqrt{3}} = \frac{V_{\text{max}}\sqrt{6}}{(2 \cdot V_{\text{max}})/2^N} = 2^N \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\text{On en déduit } 2^N = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \text{Rapport S/B} \text{ donc } N = \log_2\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 10\,000\right) = 12.99 \text{ bits}$$

Dans les CAN / CNA on trouve classiquement des 8bits, 10bits, 12bits, 14bits, 16bits, 20bits.

Un 14 bits conviendrait bien pour l'application envisagée. Le rapport S/B vaut alors 86 dB.

**NB:** le SNR peut être un rapport de valeur efficace ou un rapport de puissance. Dans le premier cas, on passe en dB par  $20\log(\text{SNR})$ , dans le second c'est  $10\log(\text{SNR})$ .

**Remarque:** quel peut être le SNR (Signal to Noise Ratio, rapport signal/bruit) quand le signal est plus faible, de l'ordre de 200mV d'amplitude par exemple ?

$$\text{SNR} = \frac{0.2/\sqrt{2}}{\frac{10}{2^{14}}/2\sqrt{3}} = 802 \Rightarrow 58 \text{ dB.}$$

Le SNR se dégrade lorsque les signaux analogiques qui transitent sont faibles. C'est d'autant plus gênant que pour le domaine audio par exemple, la valeur efficace et l'amplitude maximale ne sont pas du tout dans un rapport  $\sqrt{2}$ . La musique classique est un cas typique où la valeur efficace est très faible devant l'amplitude maximale. C'est ce que l'on appelle la *dynamique* du signal. On introduit alors le facteur de forme, qui donne le rapport entre la valeur maximale d'un signal sur sa valeur efficace.

## 4. Amélioration du bruit de quantification : Compresseur-expandeur

Une solution existe pour améliorer le SNR sans pour autant augmenter le nombre de bits. Il suffit de doter le CAN et l'ADC d'une courbe de transfert non linéaire. Au faibles niveaux de tensions, le quantum sera faible. Pour les fortes amplitudes le quantum sera plus élevé. La question qui se pose alors est quelle loi de quantification adopter, c'est à dire, comment adapter le pas de quantification  $q$  en fonction de la tension  $e$  appliquée ?

Une loi de quantification non linéaire, peut aussi être vue comme une fonction de transfert non linéaire analogique,  $e_{comp}(e)$ , suivie d'une quantification classique linéaire,  $q = \Delta V/2^N = q_0$  ( $\Delta V$  étant la tension maximale en entrée du système opérant la quantification):

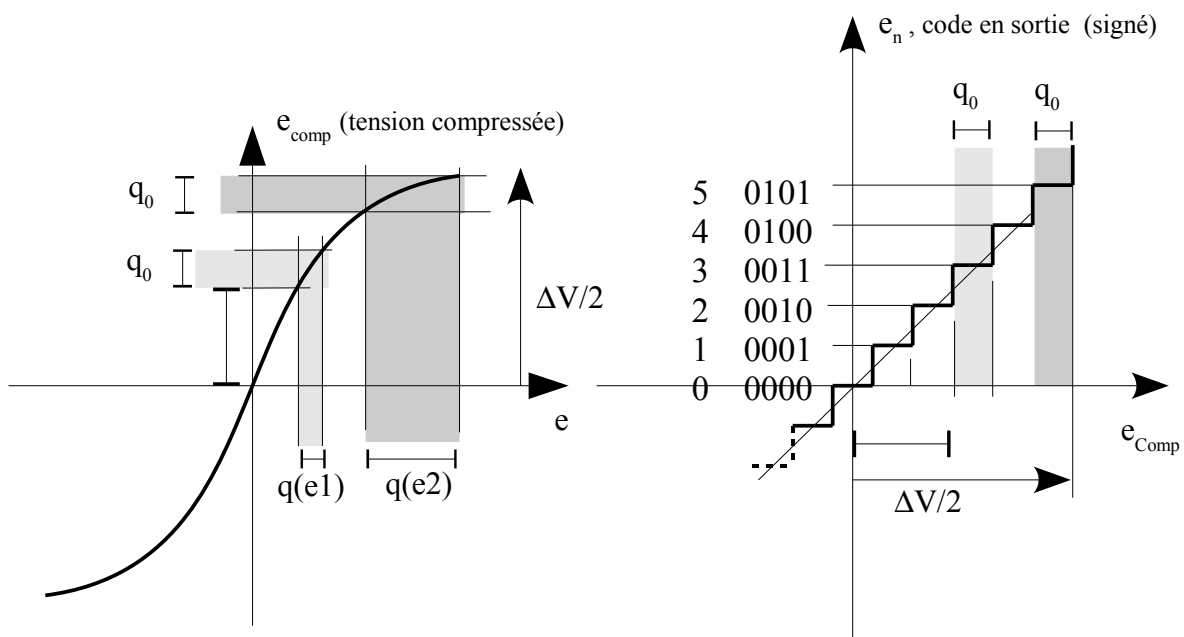


Fig 3.3 Courbe de compression

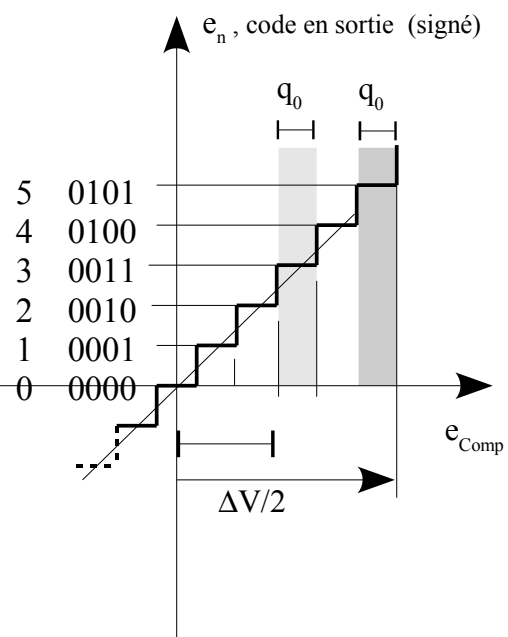


Fig 3.4 Courbe de quantification uniforme

La courbe de compression donne  $e_{comp}$  en fonction de  $e$ , toutes deux analogiques. La tension  $e_{comp}$  se retrouve en l'entrée de quantification.

Sur les courbes présentées, deux exemples ont été pris. Dans un premier temps, on considère une entrée  $e$  aux environs de  $e1$ . Cette tension se trouve dans l'intervalle grisé clair, qui a pour largeur  $q(e1)$ , pas de quantification correspondant à  $e1$ . Cet intervalle est fin, ce qui dénote une bonne résolution aux faibles valeurs de  $e$ . Dans le second cas, on considère une tension aux environs de  $e2$  (gris foncé). On se rend compte alors que l'intervalle est bien plus large.

En fait, tout se passe comme si le signal  $e$  était quantifié par les intervalles :



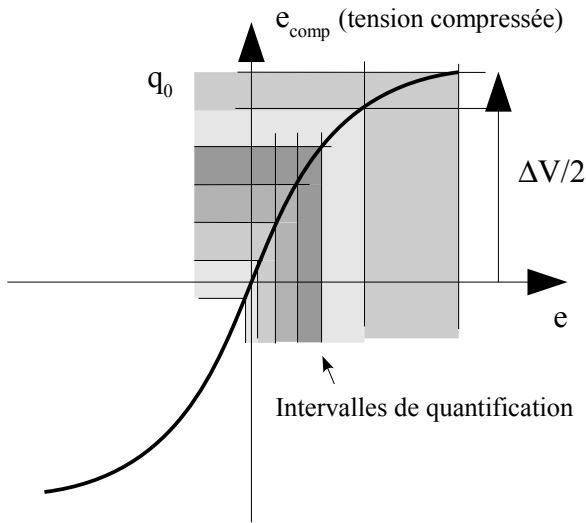


Fig 3.5 Courbe de compression, détail des pas

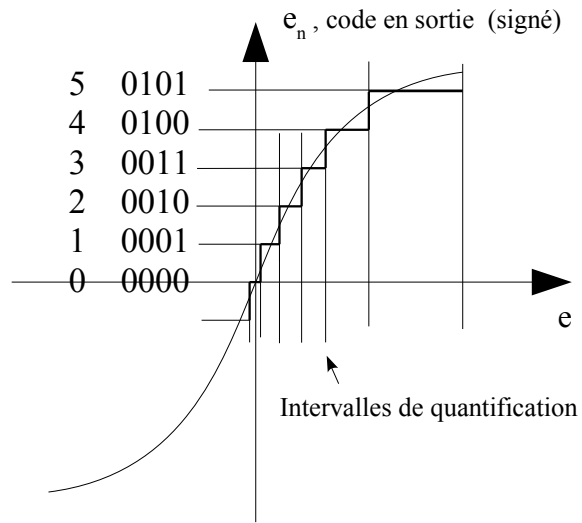


Fig 3.6 Courbe de compression complète, code = f(e)

Il serait très judicieux de trouver une loi qui permette de garder constant le SNR, quelque soit le niveau d'entrée. Nous avons vu dans exercice 2, que le SNR est proportionnel à  $e/q$ . Autrement dit, la loi de quantification doit vérifier, autant que faire se peut, la relation :

(a)  $|e|/q(e) = \text{Cste}$ , e tension appliquée en entrée.

D'après la courbe de compression présentée, on peut mettre en relation la dérivée de la courbe avec le pas de quantification:

(b)  $\frac{q_0}{q(e)} = \frac{d e_{Comp}}{d e}$

On en déduit à partir de (a) et (b)  $\frac{\text{Cste } q_0}{|e|} = \frac{d e_{Comp}}{d e}$  c'est à dire  $d e_{Comp} = \text{Cste } q_0 \frac{d e}{|e|}$

Ainsi, la courbe de quantification qui permet une conservation du SNR est une **loi logarithmique**. Une telle caractéristique devient irréaliste aux environs de 0. C'est pourquoi des approximations ont été définies. Citons la loi en A (utilisée en Europe) et la loi  $\mu$  (utilisée en Amérique).

**Exercice 3:**

La loi en A est définie par ( $E=e/e_{\text{Max}}$  et  $E_{\text{Comp}}=e_{\text{Comp}}/e_{\text{CompMAX}}$ ) :

$$E_{\text{Comp}} = \frac{A.E}{1 + \ln A} \quad \text{pour } E < 1/A$$

$$E_{\text{Comp}} = \frac{1 + \ln(A.E)}{1 + \ln A} \quad \text{pour } 1/A < E < 1$$

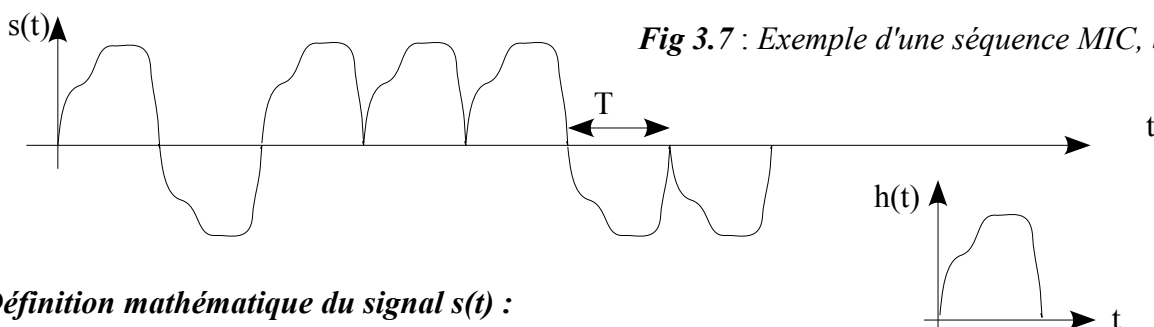
La valeur  $C = \frac{A}{1 + \ln A}$  vaut 16, ce qui implique  $A=87,5$ .

Cette loi, avec ses valeurs numériques doit permettre de garantir un SNR de 35dB pour un niveau maximal, mais aussi pour un niveau de 40dB (en amplitude) en dessous du niveau maximal. Enfin, la quantification (non uniforme bien sûr) se fera sur 8 bits.

1. Tracer la courbe de compression en relatif
2. Exprimer le SNR en dessous de  $1/A$ , on supposera  $e$  sinusoïdal dont l'amplitude est la plus grande possible.
3. Exprimer le SNR en dessus de  $1/A$ , on supposera  $e$  sinusoïdal
4. Tracer la courbe du SNR en fonction de  $|e|/|e_{\text{Max}}|$  (abscisse relative).
5. Vérifier que les spécifications sont satisfaites.
6. Quel nombre de bits aurait été nécessaire, si on avait utilisé une loi de quantification linéaire ?
7. Quel est l'intérêt d'avoir un codage sur un faible nombre de bits.

## 5. Détermination des spectres de puissance des signaux PCM

Dans ce chapitre, on propose une méthode simple, qui permet d'obtenir la densité spectrale de puissance  $\gamma_s(f)$  d'un signal PCM  $s(t)$ , tel que celui qui se trouve en sortie du dispositif classique illustré *figure 3.1*. En voici un exemple :



**Fig 3.7 :** Exemple d'une séquence MIC, binaire

**Définition mathématique du signal  $s(t)$  :**

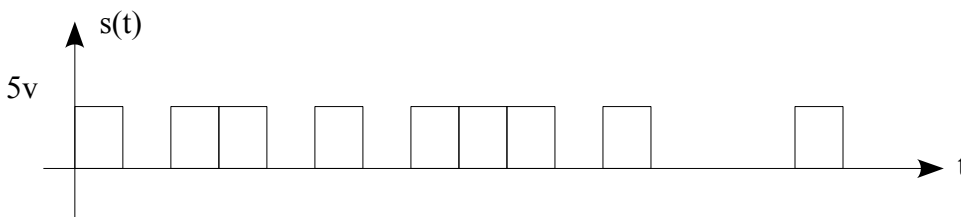
$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot h(t - k.T) \quad h(t) \text{ est le motif. C'est lui qui est répété tout au long de la séquence.}$$

L'entier  $k$  est l'indice qui correspond à chaque apparition du motif.  $T$  est la période de répétition, donc la durée du motif. La variable  $a_k$  peut prendre dans cet exemple deux valeurs, +1 et -1. On lui associera la VAR  $Ak$ . Enfin, la fonction  $h(t - kT)$  est bien entendu le motif de base décalé  $kT$  fois vers la droite.

**Formule de Bennett :**

Elle donne directement la densité spectrale de puissance  $\gamma_s(f)$  à partir de la connaissance du motif  $h(t)$ , de la période de répétition  $T$ , et des propriétés statistiques de la VAR  $A_k$ .

$$\gamma_s(f) = \left[ \frac{\sigma_{A_k}^2}{T} + \frac{m_{A_k}^2}{T^2} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \right] \cdot |H(f)|^2 \quad H(f) \text{ est la transformée de Fourier du motif } h(t).$$

**Exemple d'utilisation : transmission NRZ unipolaire**

Notons  $V$ , l'amplitude du signal (5v dans l'exemple).

$h(t)$  vaut donc  $h(t) = V \cdot \text{rect}_T(t)$ , (on précise que  $\text{rect}_T(t) = 1$  pour tout  $t \in [0, T]$ , 0 ailleurs).

Transformée de Fourier du motif :

$$\mathcal{F}\{h(t)\} = \int_0^T V \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt = \frac{V}{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot (e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot T} - 1) = \frac{V \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot T/2}}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot (e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot T/2} - e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot T/2})$$

$$\mathcal{F}\{h(t)\} = H(f) = V \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot T/2} \cdot T \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f \cdot T)$$

et donc,  $|H(f)|^2 = V^2 \cdot T^2 \cdot \text{sinc}^2(\pi \cdot f \cdot T)$

Propriétés statistiques du coefficient  $a_k$  (VAR  $A_k$ ):

$A_k$  peut prendre deux valeurs distinctes, 0 et 1, avec la même probabilité ( $1/2$  pour chaque événement).

Moyenne :  $m_{a_k} = 1 \cdot 1/2 + 0 \cdot 1/2 = 1/2$ .

Ecart type :  $\sigma_{a_k}^2 = E[A_k^2] - m_{a_k}^2 = (1^2 \cdot 1/2 + 0^2 \cdot 1/2) - (1/2)^2 = 1/4$

Ainsi, nous obtenons directement la densité spectrale de puissance grâce à la formule de Bennett :

$$\gamma_s(f) = \frac{V^2 \cdot T}{4} \cdot \text{sinc}^2(\pi \cdot f \cdot T) + \frac{V^2}{4} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{k}{T}) \cdot \text{sinc}^2(\pi \cdot f \cdot T)$$

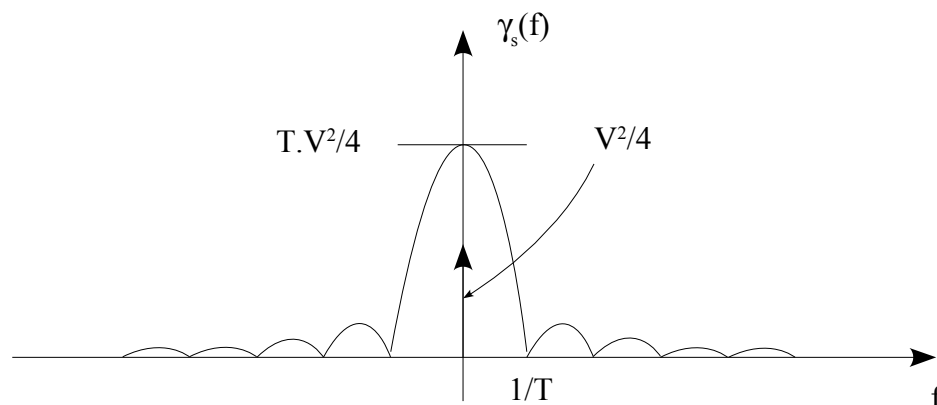
**Remarque** : Cette formule est homogène. En effet, si l'on se rappelle que la fonction d'autocorrélation,  $\Gamma_s(\tau)$ , est homogène à des volts au carré  $[V]^2$  (puisque notamment  $\Gamma_s(0) = P_0$  puissance globale du signal, donc homogène à des  $[V]^2$ ), alors la densité spectrale de puissance,  $\gamma_s(f)$ , qui est la transformée de Fourier de  $\Gamma_s(\tau)$ , ne peut être que des  $[V]^2 \cdot [s]$  (par définition de la transformée de Fourier).

Une autre manière de le voir, est de penser également que la puissance globale du signal  $P_0$  est aussi l'intégrale de la densité spectrale de puissance sur tout le spectre,  $P_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(f) df$ . On voit bien que la dimension de  $\gamma_s(f)$  est  $[V]^2/[Hz]$  soit  $[V]^2 \cdot [s]$ .

Enfin, pour procéder à la vérification d'homogénéité, il faut garder présent à l'esprit que la dimension d'un Dirac, est l'inverse de la dimension de son argument. En effet, son intégrale est sans dimension et vaut 1. Donc nécessairement, la dimension ordonnée est l'inverse de la dimension abscisse.

La formule précédente se simplifie. En effet, le second terme est un peigne de Dirac pondéré par un sinus cardinal, dont les valeurs d'annulation se situent justement aux fréquences  $f = k/T$ , sauf pour  $k=0$ .

L'expression devient donc :  $\gamma_s(f) = \frac{V^2}{4} \cdot T \cdot \text{sinc}^2(\pi \cdot f \cdot T) + \frac{V^2}{4} \cdot \delta(f)$



**Figure 3.8** : densité spectrale de puissance d'un signal NRZ polarisé

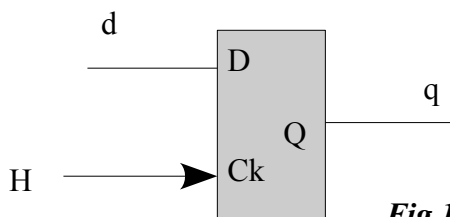
**Remarques** : Le spectre est continu, puisque  $s(t)$  est non périodique à cause du caractère aléatoire de répétition des motifs. Le Dirac en 0Hz était attendu, puisque l'équiprobabilité amène une valeur moyenne non nulle de la séquence. Enfin, notons que l'encombrement spectral est uniquement dû au symbole. Il doit donc être choisi en fonction des limitations du canal.

## La modulation delta [2],[3],[7]

Contrairement à la MIC classique, dont chaque échantillon du signal informatif  $m(t)$  est codé par  $n$  bits, dans une modulation delta, c'est la **différence entre un échantillon et une valeur estimative** qui est codées. Cette différence est codé sur un seul bit ! Toutefois, ce codage réduit à sa plus simple expression doit s'accompagner d'une fréquence d'échantillonnage très élevée, bien supérieure à la limite édictée par le théorème de Shannon. Ses applications concernent essentiellement les signaux audio fréquence, donc la parole, ainsi que la musique.

### 1. Principe du modulateur et démodulateur Delta linéaire

**Rappel:** fonctionnement d'une bascule D



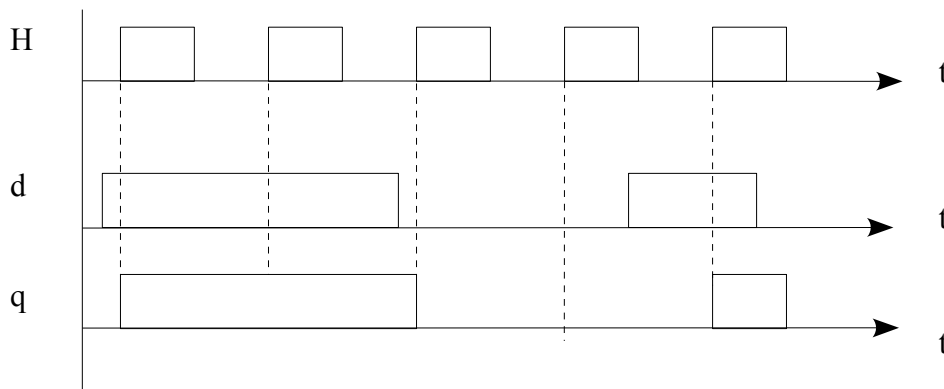
**Fig 1.1** Symbole d'une Bascule D

La sortie  $q$  **change d'état** uniquement au **front montant** de  $H$ .

La valeur (logique) de  $q$  est celle de l'entrée  $d$  au moment précis du front montant de  $H$ .

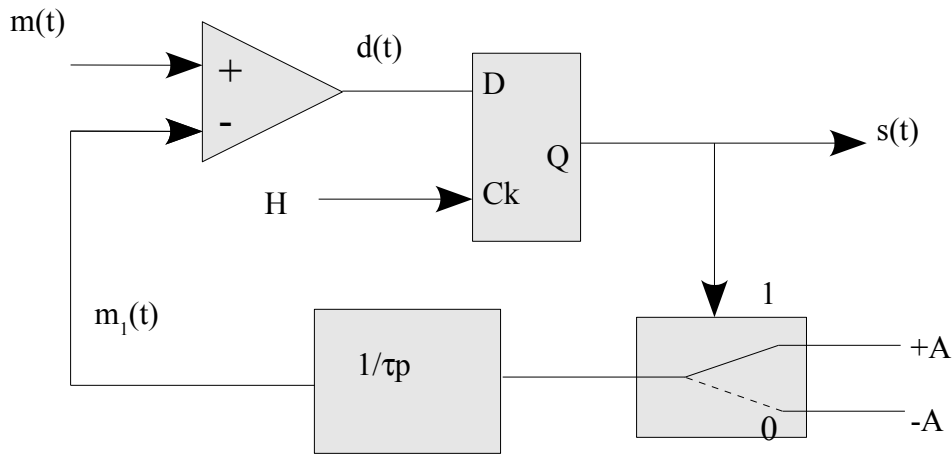
La sortie  $q$  garde son état jusqu'au prochain front.

Exemple de chronogramme:



**Fig 1.2** Chronogrammes associés à la bascule D

Le schéma de principe d'un modulateur **delta linéaire** est le suivant :



**Fig 1.3** Principe d'un modulateur delta linéaire

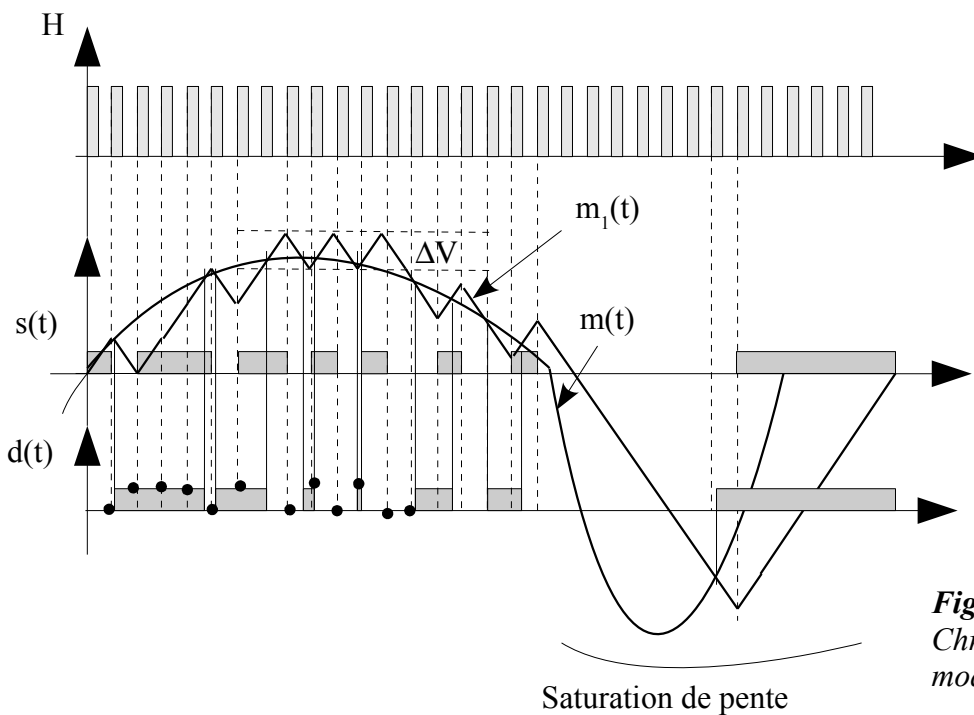
Le modulateur est constitué d'un comparateur, d'une bascule D, d'un interrupteur commandé, d'un intégrateur.

**Explication :**

Si  $m(t) > m_1(t)$ , alors  $d(t)$  vaut '1'.

Au front montant suivant de H,  $s(t)$  vaut '1', ce qui place la valeur analogique A sur l'intégrateur.  $m_1(t)$  va donc croître.

Au front suivant de H, soit  $m_1(t)$  a réussi à dépasser  $m(t)$ , auquel cas,  $s(t) = '0'$  avec pour conséquence la redescente de  $m_1(t)$ , soit  $m_1(t)$  est encore en dessous de  $m(t)$ ,  $s(t)$  vaut toujours '1'.  $m_1(t)$  a donc une forme de dent de scie qui va suivre  $m(t)$  en l'encadrant :



**Fig 1.3**  
Chronogrammes d'un modulateur Delta

On dit que  $m_1(t)$  est le **signal de prédiction**. C'est à dire que  $m_1(t)$  est une **estimation** de  $m(t)$ . C'est ce signal qui est transporté. Finalement, le signal de prédiction est entaché d'une erreur, de la même façon qu'en MIC, la quantification amène, elle aussi, une erreur.

La relation entre  $m_1(t)$  et  $s(t)$  est une dérivée à peu de choses près. En effet, soit  $s_1(t)$ , un signal identique à  $s(t)$ , mais bipolaire. Alors on peut dire que  $s_1(t) = dm_1(t)/dt$ .

On peut donc construire le démodulateur delta linéaire : deux blocs sont nécessaires, le premier qui convertit  $s(t)$  en un signal bipolaire, un second qui procède à l'intégration du signal obtenu, selon les mêmes propriétés que l'intégrateur du modulateur. Enfin, on peut ajouter un filtre passe-bas qui va lisser les angles aigus de  $m_1(t)$ .

Schéma du démodulateur :

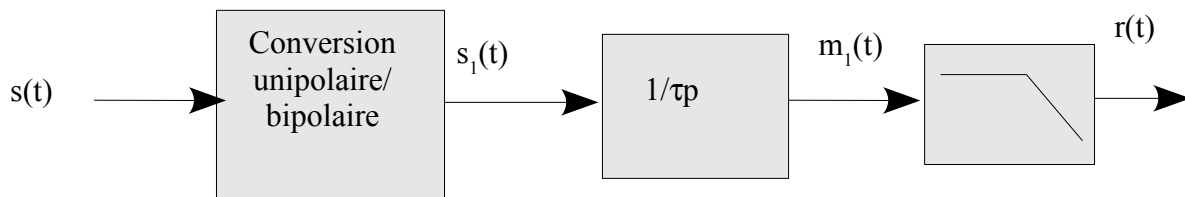


Fig 1.4 Principe du démodulateur Delta linéaire

$r(t)$  correspond à  $m(t)$ , à l'erreur de prédiction près.

Sur la figure 1.3, nous pouvons voir qu'entre deux fronts successifs, le signal de prédiction évolue d'une quantité  $+\Delta V$  ou  $-\Delta V$ . Cette valeur correspond à l'intégration de la valeur  $+/-A$ , durant la période  $T_e$  :

$$m_1(t) = \frac{1}{\tau} \cdot \int e(t) dt, \text{ avec } e, \text{ entrée de l'intégrateur } (+/-A)$$

On en déduit  $\Delta V = \frac{A \cdot T_e}{\tau}$

## 2. Les limitations du procédé delta linéaire

### 2.1 La saturation de pente

Sur la figure précédente, on peut voir que le signal de prédiction est incapable de suivre le signal d'entrée, car la pente de sortie de l'intégrateur ( $A/\tau$ ) est inférieure à la pente de  $m(t)$ . C'est la **saturation de pente**.

Quelles conditions doivent être respectées pour que ce phénomène ne se produise pas ?

$$\frac{dm(t)}{dt} < \frac{A}{\tau} \text{ supposons } m(t) \text{ sinusoïdal d'amplitude } A_m \text{ et de fréquence } f_m,$$

$$2 \cdot \pi \cdot f_m \cdot A_m < \frac{A}{\tau} \text{ soit encore, } f_m \cdot A_m < \frac{A}{2 \cdot \pi \cdot \tau}$$

On peut aussi faire apparaître dans la formule la fréquence d'échantillonnage et l'incrément  $\Delta V$ :

$$f_m \cdot A_m < \frac{F_e \cdot \Delta V}{2 \cdot \pi}$$

Le produit  $A_m \cdot f_m$  ne doit pas dépasser une certaine limite. On voit donc que les problèmes vont se poser lors de fréquence élevée et d'amplitude élevée. Il se trouve que pour la parole humaine, l'amplitude des aigus a tendance à décroître, ce qui en fait un domaine d'application privilégié.

**2.2 Le bruit granulaire**

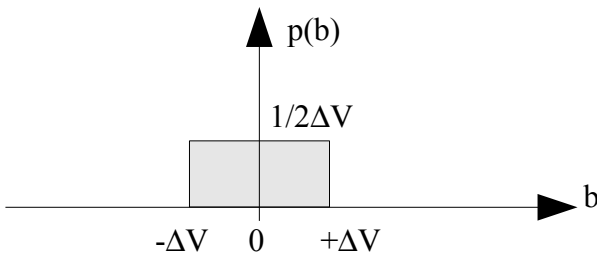
Ce bruit provient du fait que le signal de prédiction  $m_1(t)$  encadre  $m(t)$  avec une erreur  $b(t) = m_1(t) - m(t)$ . Imaginons que l'entrée  $m(t)$  soit nulle, alors  $m_1(t)$  va prendre l'allure d'un signal en dent de scie d'amplitude  $A \cdot T_e / \tau$ .

Cette remarque nous amène à conclure qu'il existe une tension d'entrée minimale en dessous de laquelle, le procédé ne fonctionnera pas :  $A_{mMIN} = A \cdot T_e / \tau$ .

Afin de déterminer le SNR pour une telle modulation, il faut se donner des hypothèses simplificatrices :

- On suppose qu'il n'y a pas de saturation de pente, donc  $b(t)$  évolue entre +/-  $\Delta V$ .
- $b(t)$  peut prendre n'importe quelle valeur dans l'intervalle +/-  $\Delta V$ . La densité de probabilité est donc uniforme dans cet intervalle.
- Le spectre de ce bruit est uniforme (blanc) sur toute la bande 0 à  $F_e$ .

**Densité de probabilité du bruit granulaire:**

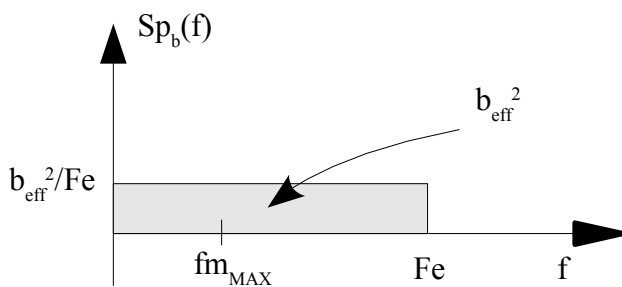


$$b_{eff}^2 = \int_{-\Delta V}^{+\Delta V} \frac{1}{2 \cdot \Delta V} \cdot b^{2db}$$

$$b_{eff}^2 = \frac{1}{2 \cdot \Delta V} \frac{b^3}{3} \Big|_{-\Delta V}^{+\Delta V} = \frac{(\Delta V)^2}{3}$$

**Fig 2.1** Densité de probabilité du bruit granulaire

La densité spectrale de puissance (monolatérale)  $Sp_b(f)$  est le suivant :



**Fig 2.2** Densité spectrale supposée du bruit granulaire



Seule la bande 0- $f_{m_{MAX}}$  nous intéresse. Un filtrage efficace peut donc réduire sensiblement le bruit de granularité :

$$b_{eff}^2 = \frac{(\Delta V)^2}{3 \cdot f_{m_{MAX}} \cdot Fe}$$

Supposons  $m(t) = A_m \cos(2 \cdot \pi \cdot f_m \cdot t + \phi)$ , sa valeur efficace est  $A_m/\sqrt{2}$ ,  $m_{eff}^2 = A_m^2/2$

Le rapport signal sur bruit est donc :

$$SNR = \frac{3}{2} \frac{A_m^2}{(\Delta V)^2} \cdot \frac{Fe}{f_{m_{MAX}}}$$

Plus la fréquence d'échantillonnage est élevée vis à vis de la fréquence du signal d'entrée, plus le SNR s'améliore.

**Attention** : ce résultat n'est valable qu'en absence de saturation de pente. Une saturation de pente dégrade sérieusement le SNR.

### 3. La modulation delta adaptative.

Ce procédé permet surtout d'éviter la saturation de pente. On appelle ce type de modulation, une modulation delta **adaptative** car la pente de l'intégrateur, donc  $\Delta V$ , va être modifiée dynamiquement de manière à ce que le signal de prédiction suive au mieux le signal  $m(t)$ . Un moyen d'y parvenir, est de jouer sur la grandeur A (voir schéma du modulateur).

Voici un exemple de structure :

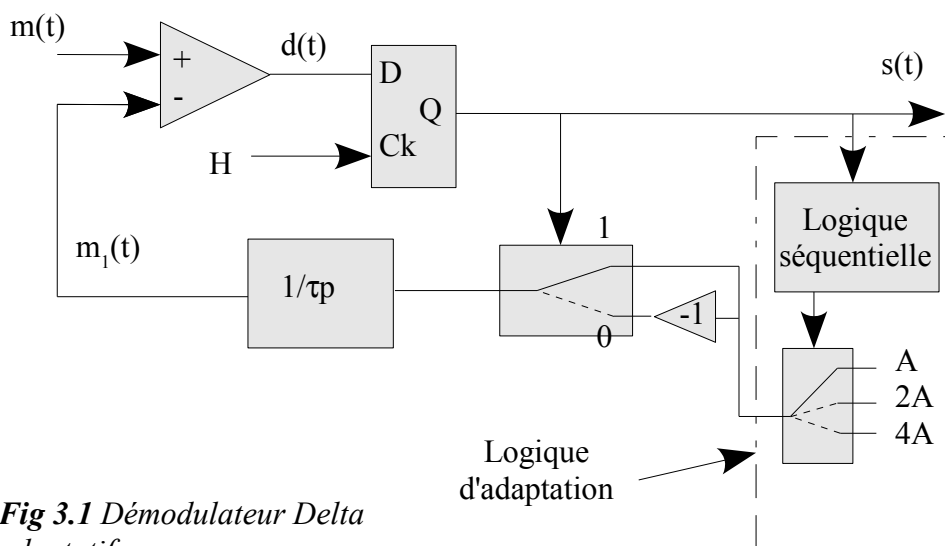


Fig 3.1 Démodulateur Delta adaptatif

Le bloc de logique séquentielle a pour rôle de choisir l'amplitude à appliquer à l'intégrateur. Ainsi, la pente va être modifiée dans un rapport 1, 2 à 4. La logique va "observer" la valeur en cours de  $s(t)$ ,  $s(n)$ , mais aussi,  $s(n-1)$  et  $s(n-2)$ . L'algorithme est alors le suivant :

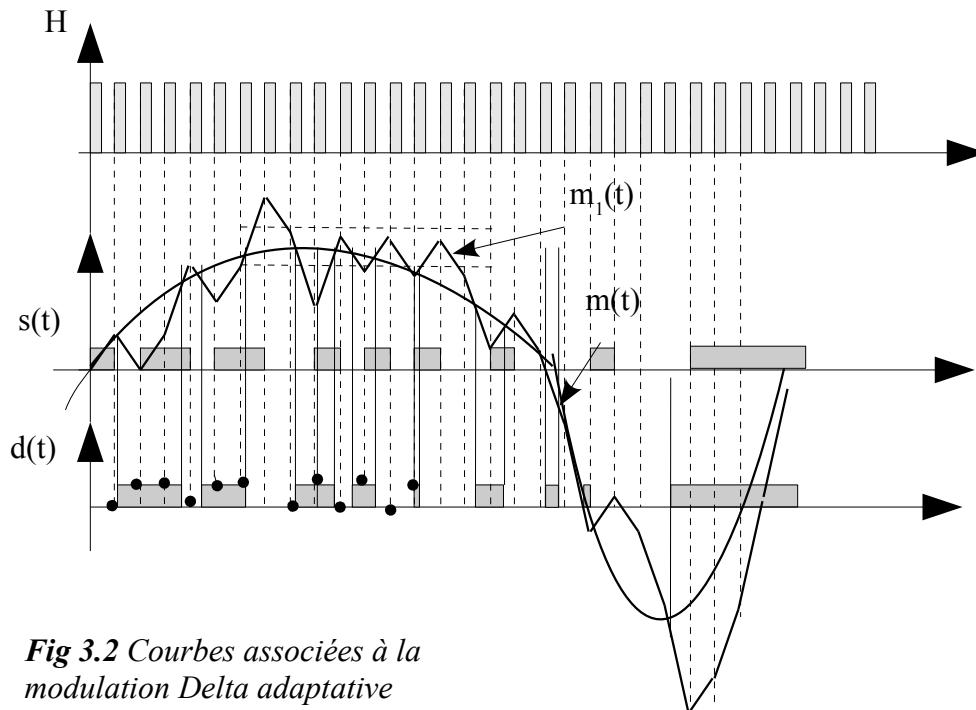
$S(n-2)$	$S(n-1)$	$S(n)$	Coefficient de pente
X	0	1	1
0	1	1	2
1	1	1	4
0	0	0	4
1	0	0	2
X	1	0	1

Première et dernière ligne : la valeur de  $s$  vient de changer. Le signal de prédiction  $m_1(t)$  suit bien  $m(t)$ .

Lignes 2 et 5 : la valeur précédente de  $s$  est la même, le signal de prédiction a du mal à rattraper  $m(t)$ . La pente est doublée.

Lignes 3 et 4 : Les 2 dernières valeurs sont les mêmes que l'actuelle. Le signal estimatif est encore plus à la traîne, la pente est encore doublée.

Reprenons les chronogrammes de la modulation delta linéaire, et appliquons cet algorithme :

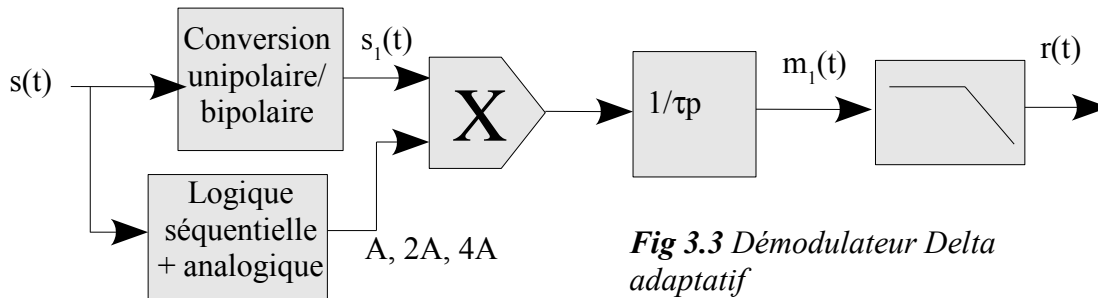


*Fig 3.2 Courbes associées à la modulation Delta adaptative*

Le pas le plus grand, est en fin de compte assez proche de la dynamique du signal  $m(t)$ . C'est pourquoi on ne constate pas une amélioration du SNR, au contraire. L'amélioration porte sur le suivi des pentes élevées.

Pour améliorer le SNR tout en conservant un pas  $\Delta V$  maximal qui correspond à la modulation delta linéaire précédente, il faut augmenter la fréquence d'échantillonnage  $F_e$ . La formule déterminée précédemment le confirme.

La démodulation peut être schématisée comme suit :



**Fig 3.3** Démodulateur Delta adaptatif

La seule différence avec la modulation linéaire, réside dans le contrôle de l'amplitude de  $s_1(t)$ . Ce contrôle est fait de la même manière que le modulateur. En fonction de la succession des bits d'arrivée du signal  $s(t)$ , la logique séquentielle va définir quelle amplitude donner à  $s_1(t)$ .

## 4. La modulation delta-sigma

Le problème de saturation de pente peut se résumer par une conservation du produit amplitude-fréquence de  $m(t)$ . C'est en fréquence élevée que vont apparaître les problèmes. Une solution consiste à insérer derrière  $m(t)$  un intégrateur. Son but est de réduire l'amplitude des fréquences élevées de manière éviter la saturation de pente. En démodulation, c'est l'inverse. On placera en fin de chaîne un dérivateur ayant les caractéristiques réciproques de l'intégrateur, le but étant de restituer les niveaux de tension d'origine. Ce procédé porte le nom de modulation **delta-sigma**.

## 5. Exercice d'application

On se propose de transmettre en modulation delta linéaire, un message audio dans la bande 300Hz-3400 Hz. Pour l'étude, on supposera que ce message est une sinusoïde pouvant s'étendre sur toute la plage donnée. Son amplitude sera de 1V. On se fixe une fréquence d'échantillonnage  $F_e$  de 300 kHz.

1. Calculer l'incrément  $\Delta V$  nécessaire pour ne pas avoir de problèmes de saturation de pente.
2. On suppose  $A = 500\text{mV}$ . Calculer la constante de l'intégrateur  $\tau$ .
3. Sachant que l'on dispose en sortie de démodulation d'un filtre passe bas à 5000 Hz, calculer le SNR obtenu (en dB).
4. On veut maintenant étendre la bande passante du message à 15 kHz, sans changer la fréquence  $F_e$  (on ne touche pas aux propriétés du canal de transmission). On élargit le filtre de sortie à 20 kHz. Déterminer l'incrément maximal,  $\Delta V_{\text{MAX}}$ , que doit atteindre la modulation delta adaptative.
5. Qualitativement, que peut-on dire du SNR ?

**Bibliographie :**

- [1] **Robert DUBOIS** : *Structure et applications des émetteurs et des récepteurs*, Presses polytechniques et universitaires romandes.
- [2] **FONTOLLIET**: *Systèmes de télécommunications*,
- [3] **Jacques HERVE** : *Electronique pour les transmissions numériques*, Ellipses
- [4] **Christophe MORE** : *Transmission de signaux*, TEC&DOC
- [5] **MANNEVILLE-ESQUIEU** : *Electronique, systèmes bouclés linéaires, de communication et de filtrage*, DUNOD
- [6] **Jon B.HAGEN** : *Comprendre et utiliser l'électronique des hautes fréquences*, Publitrone/Elektor
- [7] **Alexandru SPĂTARU** : *Fondement de la théorie de la transmission de l'information*, Presses polytechniques romandes.

**Documentation qui accompagne les plaques de modulation de TP :**

- [7] PS 7.2.2.3 Modulation delta, Klaus Breidenbach, Leybold Didactic
- [8] Procédés de démodulation (démodulateur), S.E.T.