DIMENSIONNEMENT DES ARBRES

DESIGN OF SHAFTS

1. DEFINITION

Les arbres sont des pièces mécaniques, de section droite généralement circulaire dont la dimension suivant l'axe (de révolution) est grande par rapport aux autres dimensions.

On peut distinguer deux catégories d'arbres :

- ✓ Ceux qui transmettent un couple (*torque*) entre différents organes mécaniques : poulies (*fans*), engrenages (*gears*), cannelures (*splines*)
- ✓ Ceux qui ne transmettent pas de couple, supports d'organes mécaniques ou axes d'articulation, ils sont désignés sous le nom d'axes.

2. CONTRAINTES ELEMENTAIRES

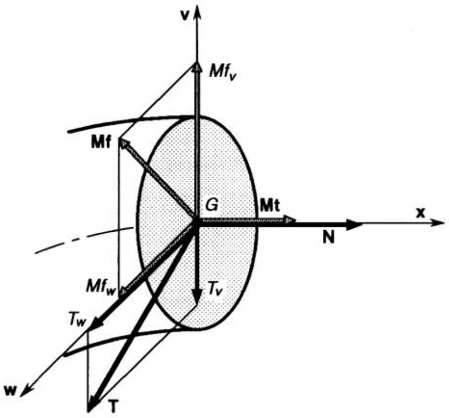

Figure 1 : Représentation du torseur des efforts intérieurs

Pour un arbre de section droite circulaire, tout axe appartenant à la section et passant par le centre de la section est un axe central principal. Dans une section donnée, on fera en sorte de choisir la base locale qui minimise le nombre de composantes du torseur des efforts intérieurs. Voici la forme générale de ce torseur en G (centre de section) :

- Résultante : N x + T z
- Moments : Mt x + Mf y

Pour des structures élancées avec section pleine, le cisaillement d'effort tranchant est négligeable devant les autres sources de contraintes. D'une manière générale dans le calcul des arbres, pour déterminer la contrainte maximale, on se place sur la périphérie de la section en un point (z_{min} ou z_{maxi}) où la contrainte normale de flexion est maximale et en négligeant la contrainte de cisaillement due à l'effort tranchant qui est très faible en ce point (notons que la contrainte de cisaillement due à l'effort tranchant est maximale en z = 0). On obtient donc pour un arbre de section circulaire de diamètre d :

- Contrainte normale d'effort normal : $\sigma_t^{max} = 4\ N / (\ \pi\ d^2\ )$ (tension stress)
- Contrainte normale de flexion : $\sigma_f^{max} = 32\ Mf / (\ \pi\ d^3\ )$ (bending stress)
- Contrainte tangentielle (ou cisaillement) de torsion : $\tau^{max} = 16\ Mt / (\ \pi\ d^3\ )$ (torsion shear stress)
- Contrainte tangentielle (ou cisaillement) d'effort tranchant: $\tau c \sim 0$ (transverse shear stress)

3. CRITERE DE RESISTANCE STATIQUE

En pratique, l'essai de caractérisation le plus simple pour des matériaux isotropes est l'essai de traction simple.

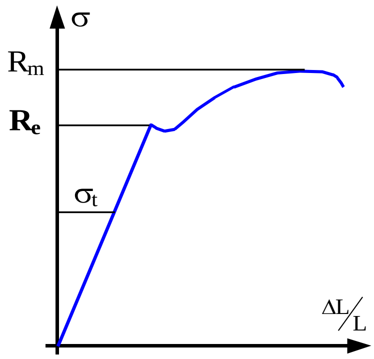

Figure 2 : Essai de traction simple

Cet essai permet principalement de déterminer la résistance à la rupture R_m (*ultimate tensile strength*) et la résistance élastique R_e (*yield strength*). Ce sont ces informations qui sont exploitées pour le dimensionnement des arbres. Les tableaux suivants fournissent les valeurs de R_m et R_e pour des matériaux de construction usuels.

<u>ACIERS (*steel*)</u>

Nom + TTh	Rm (MPa)	Re (MPa)	E (GPa)	Prix
S 235 (E24)	340	185	205	100
E 335 (A60)	570	335	205	104
C35 (XC38) recuit	585	340	205	108
34 CrMo4 (35 CD4) trempé revenu	920	550	205	263
36 NiCrMo16 (35 NCD16) trempé revenu	1200	900	205	418

<u>ACIERS INOX (*stainless steel*)</u>

Nom	Rm (MPa)	Re (MPa)	E (GPa)	Prix
X6 Cr17 (Z8C17)	400-640	240-280	190	

Lorsqu'une pièce est soumise à de la traction simple, il est facile de comparer la contrainte à la limite élastique R_e pour avoir une idée de la sécurité donnée par le calcul. En pratique, en un point donné d'une section, on a souvent un état complexe de contrainte. La méthode de calcul consiste alors à déterminer une contrainte normale équivalente σ_e. Cette contrainte est alors la contrainte qu'il faut créer dans une éprouvette de traction pour que son état de contrainte comporte le même degré de danger que l'état complexe caractérisé par les trois contraintes principales.

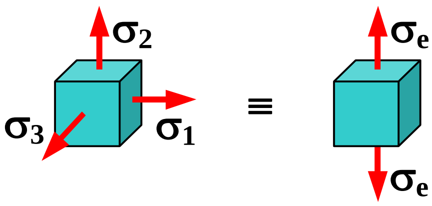

Figure 3 : Représentation d'un torseur équivalent

Le critère de Von Mises est utilisé pour les matériaux métalliques dont le mode principal de ruine est la plasticité. Il est basé sur l'hypothèse que la défaillance du matériau se produit lorsque l'énergie de variation de forme atteint une valeur limite fixée. Par exemple, on évitera d'utiliser ce critère pour des matériaux composites, dont les modes de ruines sont différents (délaminage, fissuration matricielle, rupture de fibre...).

$$\sigma_e = \sqrt{(\sigma_t + \sigma_f)^2 + 3\left(\tau^2 + \tau_c^2\right)}$$

⇨ devient $\sigma_e = \sigma_t$ dans le cas de la traction simple
⇨ devient $\sigma_e = \sqrt{3}\,\tau$ dans le cas de la torsion simple

Cette contrainte équivalente peut alors être utilisée pour déterminer le coefficient de sécurité $\alpha_S = R_e / \sigma_e$.

Le coefficient de sécurité est toujours supérieur à 1. Dans un calcul de **prédimensionnement**, pour tenir compte des effets des concentrations de contraintes locales, on cherche à obtenir **un coefficient de sécurité de 4 minimum**.

4. COMPLEMENT

1) Cas d'une goupille en cisaillement simple sous un effort tranchant T : $\sigma_e = \sqrt{3}\,\tau_{max} = \sqrt{3}\,.\,(4/3)\,.\,T / S$
Soit $\sigma_e \sim 9{,}3T/d^2$ dans le cas d'une goupille pleine de diamètre d

2) Pré-dimensionnement des engrenages :
Modules normalisés en série principale (mm) :
m = 0,5 0,6 0,8 1 1,25 1,5 2 2,5 3 4 5 6 8 10 16 20 25 32 40 50

Résistance à la flexion de la dent (avec largeur de dent : b = 10 m)
$m > [11\,C / (Z\,\sigma_f)]^{1/3}$
avec σ_f Limite en fatigue (MPa) : $\sigma_f = 0{,}56\,Rm - 1{,}4.\,10^{-4}\,Rm^2$ (avec Rm en MPa)
C : Couple transmis (N.mm)
Z : nombre de dents du pignon