TD 10

$\rightarrow v(y,z) = 2\tau \frac{1+\nu}{E} \cdot y + B(z)$
avec $v(0,z) = 0 = B(z)$

$\hookrightarrow v(y) = 2\tau \frac{1+\nu}{E} \cdot y.$

Montrer $\left| \begin{array}{l} v(x,z)=0 \\ w(x,y)=0 \end{array} \right.$

$\vec{U} \left| \begin{array}{l} 2\tau \frac{1+\nu}{E} y \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$

Méthodes de calcul en élasticité linéaire

Résoudre un pb d'élasticité :

$\hookrightarrow$ c'est calculer 2 chps tensoriels : contrainte et déformat°
et un champs vectoriel de déplacem^t $\vec{U} \left| \begin{array}{l} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{array} \right.$
$\Rightarrow$ au total 15 fct° scalaires de x, y, z à calculer.
2 méthodes principales :

① Méthodes des forces (ou des contraintes)

O

→ On pose le tenseur des $[\sigma]$ comme inconnue privilégiée du pb.
→ On déduit l'express° gnl du $[\sigma]$ de l'intégrat° de l'équat° de Beltrami.
→ Hooke → $[\varepsilon]$ → $\vec{U}$

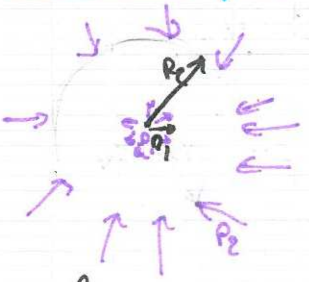
Remarque :
$[\sigma]$ statiqm^t admissible
→ vérifie l'équ d'équilibre local

② Méthode des déplacements

$[\varepsilon]$ cinematiqm^t admissible
→ Eq de compatibilité des déformat°

→ On pose le chps de déplacem^t $\vec{U}$ c inconnue privilégiée.
→ On déduit l'express° générale $\vec{U}$ de l'intégrat° de l'équat° de Navier.
→ $[\varepsilon]$ → $[\sigma]$

Exercice 3.4 : Réservoir sphérique sous pression



$$\vec{U}\begin{vmatrix} U_r(r,\theta,\varphi) \\ U_\theta(r,\theta,\varphi) \\ U_\varphi(r,\theta,\varphi) \end{vmatrix} \begin{matrix} = U_r(r) \\ = 0 \\ = 0 \end{matrix}$$

Donc

Déplacem^t selon le rayon → purem^t radial
↳ ne dépend ni de θ ni de φ.

Champs déplacement simple : $\vec{U} = U_r(r)\,\vec{e_r}$
⇒ Méthode des déplacements
Equat^o de $\boxed{\text{NAVIER}}$: forme générale

$$(\lambda+\mu)\,\overrightarrow{grad}(\operatorname{div}\vec{U}) + \mu\Delta\vec{U} = -\vec{f_v}$$

or $\Delta\vec{U} = \overrightarrow{grad}(\operatorname{div}\vec{U}) - \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}\,\vec{U}$

$$\Rightarrow (\lambda+2\mu)\,\overrightarrow{grad}(\operatorname{div}\vec{U}) - \mu\,\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}\,\vec{U} = -\vec{f_v}$$

Champs radiale ⟺ rot nul

or $\overrightarrow{rot}\,\vec{U} = 0$ car $\vec{U}$ 1 seule direct^o (radiale).

Navier → $(\lambda+2\mu)\,\overrightarrow{grad}(\operatorname{div}\vec{U}) = \underbrace{-\vec{f_v}}_{=\vec{0}}$ on néglige les force volumiq

$\overrightarrow{grad}(\operatorname{div}\vec{U}) = \vec{0}$

Rappel : a = scalaire
Coordonnées sphériques : $\overrightarrow{grad}\,a = \frac{\partial a}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a}{\partial\phi}\vec{e_\phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial a}{\partial\theta}\vec{e_\theta}$

$$\operatorname{div}(\vec{U}) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta\, U_r) + \frac{\partial}{\partial\phi}(r\cdot U_\phi) + \frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta\, U_\theta)\right]$$

$\overrightarrow{grad}(\operatorname{div}\vec{U}) = 0 \quad \operatorname{div}\vec{U} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 U_r)$

$$\overrightarrow{grad}(\operatorname{div}\vec{U}) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 U_r)\right)\vec{e_r} = \vec{0}$$

TD 10

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 U_r)\right)=0$$

Integration

$$\rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{1}{\partial r}(r^2 U_r) = a$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}(r^2 U_r) = a r^2$$

$$\Rightarrow r^2 U_r = \frac{a}{3} r^3 + b$$

$$\Rightarrow \boxed{U_r(r) = \frac{ar}{3} + \frac{b}{r^2}}$$

- $\rightarrow [\varepsilon] \rightarrow [\sigma] \rightarrow$ Calcul de a et b par les CL.

Loi de Lamé : $[\sigma] = 2\mu[\varepsilon] + \lambda tr[\varepsilon][I]$

$$\overrightarrow{\overrightarrow{grad}}\,\vec{U} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_r}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{U_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{U_r}{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{3} - \frac{2b}{r^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{3} + \frac{b}{r^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a}{3} + \frac{b}{r^3} \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon] = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\overrightarrow{grad}}\,\vec{U} + \overrightarrow{\overrightarrow{grad}}^T\,\vec{U}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{a}{3} - \frac{2b}{r^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{3} + \frac{b}{r^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a}{3} + \frac{b}{r^3} \end{bmatrix} \qquad tr[\varepsilon] = a$$

$$[\sigma] = 2\mu[\varepsilon] + \lambda tr[\varepsilon]\cdot[I]$$

$$= \begin{bmatrix} 2\mu\left(\frac{a}{3} - \frac{2b}{r^3}\right) + \lambda a & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu\left(\frac{a}{3} + \frac{b}{r^3}\right) + \lambda a & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu\left(\frac{a}{3} + \frac{b}{r^3}\right) + \lambda a \end{bmatrix}$$

CL : $\vec{T}(r = R_1, -\vec{e_r}) = [\sigma] = P_1 \vec{e_r} \Rightarrow \sigma_r(r = R_1) = -P_1$

$\vec{T}(r = R_2, \vec{e_r}) = [\sigma]\cdot\vec{e_r} = -P_2 \vec{e_r} \Rightarrow \sigma_r[r = R_2] = -P_2$