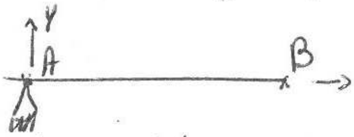
Partie II : RDM

Structures : - notion de liaison
- Degré d'hyperstaticité

Ex : ①



$u(x)$ → déplacem^t horizontal, $v(x)$ → déplacem^t vertical

(champs de déplacem^t)

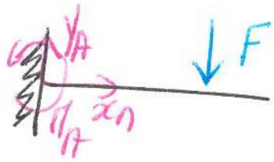
, $\theta(x)$ - rotation / z cls $u(A) = 0$, $v(A) = 0$ $\theta(A) \neq 0$

②

$u(B) = 0$ $v(B) = 0$ $\theta(B) \neq 0$

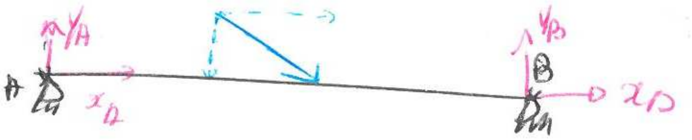
Chaq. fois q. la liaison supprime un degré de liberté elle créée une charge sur la structure.
- → Pour arreter une translat° → (force) Charge ponctuelle
- → Pour arreter une rotation → couple

③



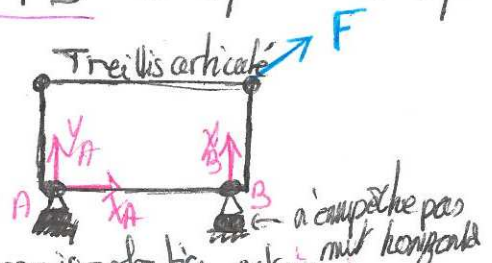
$u(A) = 0$ $\theta(A) = 0$
$v(A) = 0$

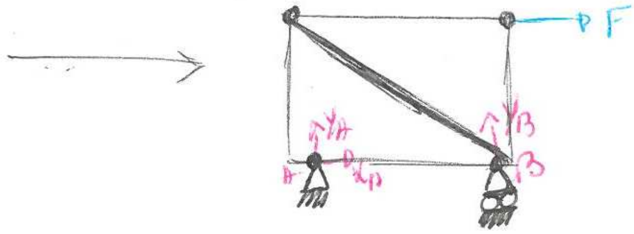
④



- Calcul des react° d'appuis / act° de liaisons
- 4 act° de liaison inconnus.
- PFS : 3 equat° d'équilibre → 4 inconnues, 3 équat° → hyperstatiq

Ex :

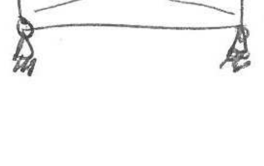




système isos externe
isos interne

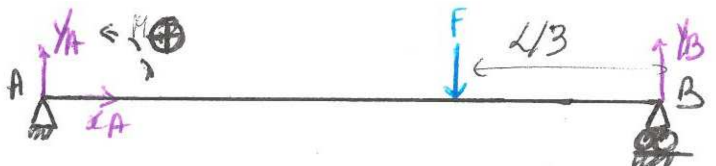
Système isostatiq externe
système hypostatiq interne

→



système isostatique externe
hyperstatiq interne

Exercice 1 :



Poids propre négligé.

① Système isostatiq car 3 act° de liaisons pr 3 équat° d'équilibre ① Nature du système

② Action de liaison

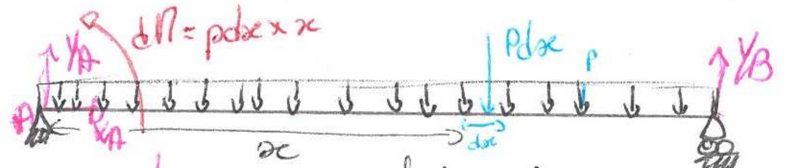
• PFS : $/x \rightarrow X_A = 0$

$/y \rightarrow Y_A + Y_B - F = 0 \rightarrow Y_A = F - Y_B$

$\sum \vec{M}_{/A}$ (moment) $\rightarrow Y_B \times L - 2/3 \times L F = 0$

$\hookrightarrow Y_B = \frac{2}{3} F \quad , \quad Y_A = 1/3 \times F .$

Exo 2 :



Charge répartie (N/m) = façon de représenter le poids propre

1/ Nature du système isostatiq (3 act° de liaiso, 3 eq équilibre)

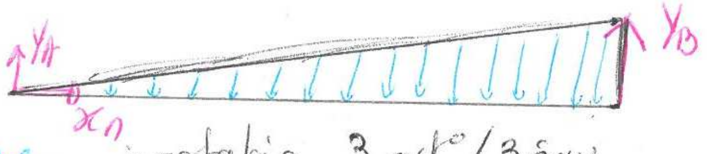
2/ Act° de liaison $/x = X_A = 0$

$/y = Y_A + Y_B - \int_0^L p dx = 0 \rightarrow Y_A = pL - Y_B$

Moment produit par p : $M = \int_0^L px \, dx$

$\sum M^{nt}/A : Y_B L - \int_0^L px dx = 0 \Rightarrow Y_B = p \frac{L}{2} \rightarrow Y_A = \frac{pL}{2}$

Exo 3 :



$p(x) = ax$

1/ Nature du système isostatiq 3 act°/3 équ

2/ Act° de liaison $/x \quad X_A = 0$

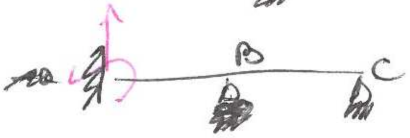
$Y_A + Y_B - \int_0^L ax \, dx = 0 \rightarrow Y_A = \left[\frac{ax^2}{2}\right]_0^L - Y_B = \frac{aL^2}{2} - Y_B$

M^{nt} produit par $p(x)$: $M = \int_0^L ax^2 dx = \left[\frac{ax^3}{3}\right]_0^L = \frac{aL^3}{3}$

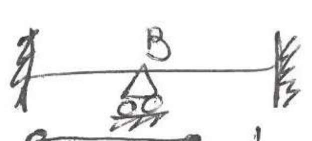
$\sum M^{nt}/A : Y_B L - \int_0^L ax^2 dx = 0 \rightarrow Y_B = \frac{aL^2}{3} \rightarrow Y_A = \frac{aL^2}{6}$

Exo 4 :

poutre continue Structure hyper 1



Structure hyper 2



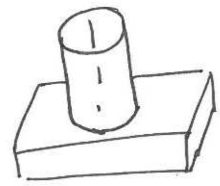
Structure hyper 4

(g) portiq simple

hyper 3 (externe)

Suite exercice surprise (TD 9):

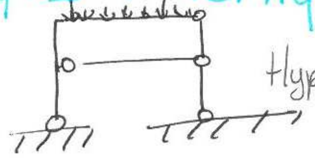
TD 13



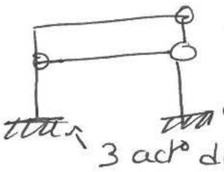
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_B(B) \end{bmatrix}$$

Par Beltrami ça se simplie.

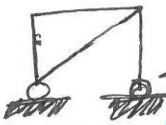
4.1 F. Portique bi-étagé



Hypostatique (Mécanisme)

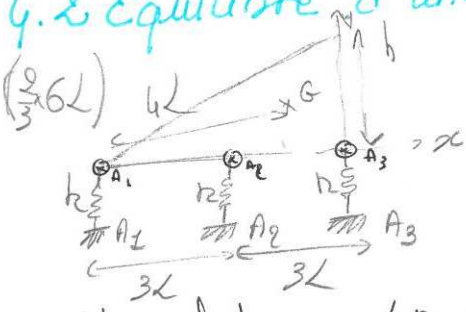


$H = 3$



Isostatique

4.2 Equilibre d'une structure hyperstatique



① Equat° d'équilibre : 2 eq d'équilibres car pas d'act° horizontales.
3 act° verticales R_1, R_2, R_3.
$\Rightarrow$ Hyperstatique $H = 1$.

Equilibre statique $/\vec{y} \rightarrow R_1 + R_2 + R_3 - P = 0$

$$\Sigma M^{nt}/_{A_1} : 3LR_2 + 6LR_3 - 4LP = 0$$

Equat° supplémentaire : Plaque indéformable. $\rightarrow$ Exploitat° des déplacem^t v_1, v_2, v_3 (appuis)

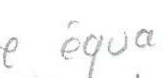
$R_1 = kv_1$ (v_1 = affaissem^t du ressort). ($F = k \cdot \Delta L$) $R_2 = kv_2$, $R_3 = kv_3$.

une autre équat° $\Rightarrow V_1 = \frac{R_1}{k}$, $V_2 = \frac{R_2}{k}$, $V_3 = \frac{R_3}{k}$

On cherche a trouver une autre équat° de la droite du triangle

Equat° donné par l'équat° de la droite reste droit.

car plaque indeformable



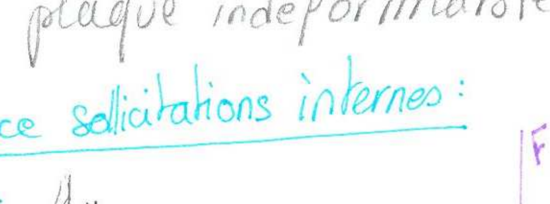
Exercice sollicitations internes :

① Nature du système

3 act° de liaisons (encastrem^t) x_0, y_0, M_0 moment

$\Rightarrow$ isostatique.

a.

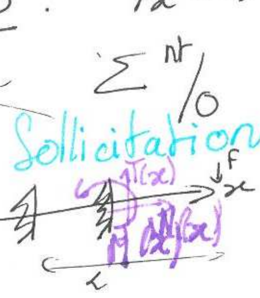


② Calcul des act° de liaisons

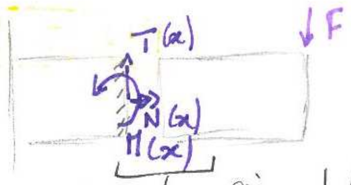
PFS : $/x \rightarrow x_0 = 0$ $\quad /y \quad y_0 - F = 0 \Rightarrow y_0 = F$.

$\Sigma M^{nt}/_0 \rightarrow M_0 - FL = 0 \rightarrow M_0 = FL$

③ Sollicitations internes On découpe la poutre



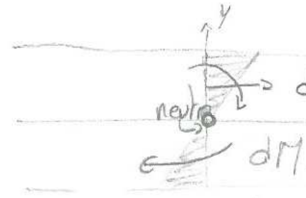
$N(x)$ = effort normal
$T(x)$ = effort tranchant
$M(x)$ = moment fléchissant



$N(x) = 0$ car pas d'effort horizontaux au delà de ma sect°.

$T(x) = -F$; $M(x) = -(L-x)F$.

F transmise ds la poutre.

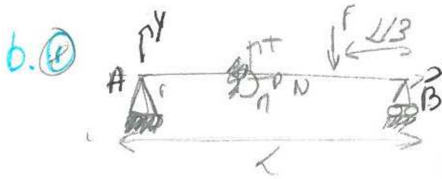


$dF = \sigma_x(y) \times dy \times e$ Integrat° des contraintes normales

$dM = y \cdot dF$

⊕ de contraintes à l'encastrem

b. 2



1 Structure Isostatiq 3eq liaisons 3eq équilibre

2 Act° de liaisons

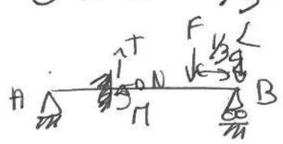
PFS $/\vec{x}$: $X_A = 0$ / $\vec{y}$ $Y_A + Y_B - F = 0$

$$\Sigma M^{nt}/_B = -\frac{FL}{3} + LY_A = 0 \Rightarrow \boxed{Y_A = \frac{1}{3}F}$$

$$\Sigma M^{nt}/_A = -\frac{2}{3}FL + Y_B L = 0 \Rightarrow \boxed{Y_B = \frac{2}{3}F}$$

3 Sollicitations internes Charges ponctuelle → On décompose le calcul des sollicitat°

$0 \leq x \leq \frac{2}{3}L$. $N(x) = 0$

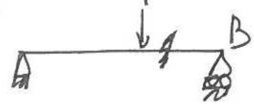


$T(x) = Y_B - F = -\frac{1}{3}F$

$M(x) = -F(\frac{2}{3}L - x) + Y_B(L-x) = -\frac{2}{3}F + Fx + \frac{2}{3}FL - \frac{2}{3}Fx$

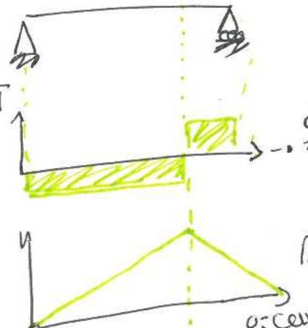
$= \frac{Fx}{3}$

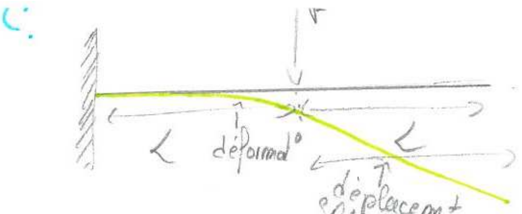
$\frac{2}{3}L \leq x \leq L$

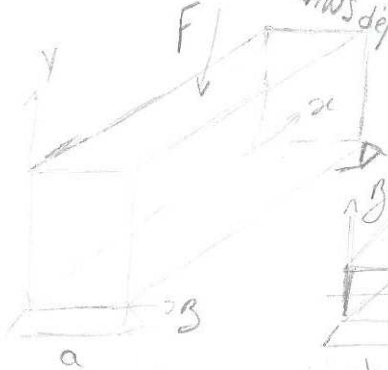


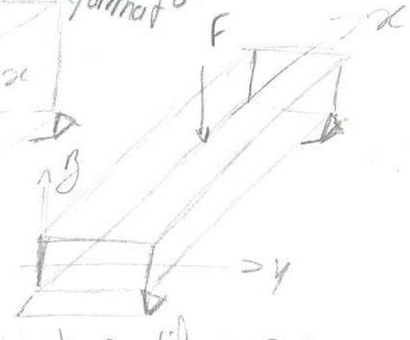
→ $N(x) = 0$ $T(x) = Y_B = \frac{2}{3}F$

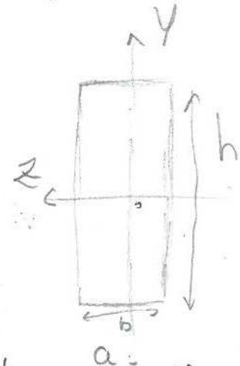
$M(x) = Y_B(L-x) = \frac{2}{3}F(L-x) = M(x)$

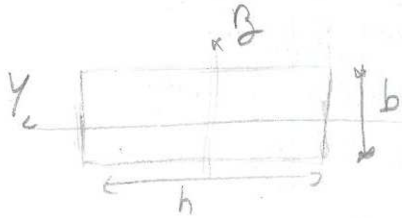












$\Rightarrow M_{fz}$ sollicite I_{gz} — $I_{gz} = \iint_{(S)} y^2 dS$

$\Rightarrow M_{fy}$ sollicite $I_{gy} = \iint_{(S)} z^2 dS$

$I_{gz} = \iint_{(S)} y^2 dS$

$I_{gy} \iint_{(S)} z^2 dS$

$$I_{gz} = \iint_{(S)} y^2 ds = b\int_{-h/2}^{h/2} y^2\, dy = \frac{bh^3}{12}$$

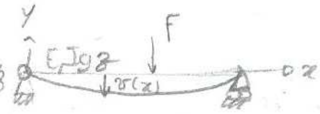
$$I_{gy} = \frac{hb^3}{12}$$

$b < h \Rightarrow I_{gz} \gg I_{gy} \Rightarrow$ a se déforme ⊕ q b.

Rigidité d'une structure dépend du module d'Young (E) et par I_g

Relation Moment - Courbure :

$$\boxed{M_{fz}(x) = \underbrace{E \cdot I_{gz}}_{\text{Rigidité}} \cdot \underbrace{\chi(x)}_{\text{Courbure}}}$$

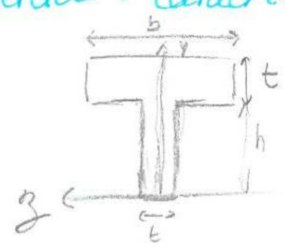


$v(x)$ = déplacem+ vertical de la poutre (flèche ou encore déformée)

$v'(x)$ = rotation de la sect° d'abscisse. $= \theta(x)$

$v''(x) = \theta'(x)$ = courbure en x. $= \boxed{\chi(x)}$

Exercice : Caractéristiques géométriques des sections



① Calcul du moment statique S_z de la sect°

$$S_z = \iint_{(S)} y\,dS = \iint_{S_1} y\,ds + \iint_{S_2} y\,dS$$

$$= b\int_h^{h+t} y\,dy + t\int_0^h y\,dy$$

$$= b\left[\frac{y^2}{2}\right]_h^{h+t} + t\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h$$

$$= b\,\frac{(h+t)^2 - h^2}{2} + \frac{th^2}{2}$$

$$= \frac{b(h^2 + 2ht + t^2 \cancel{-h^2}) + th^2}{2}$$

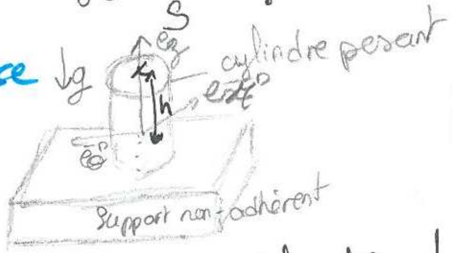
$$= bht + \frac{th^2}{2} + \frac{bt^2}{2} = S_z$$

A confirmer

② Coordonnée y_G du centre de gravité (CDG) en utilisant S_z

→ Aire Section : $S = bt + th$ → $y_G = \frac{S_z}{S} = ?$

Suite Exercice Surprise



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z(z) \end{bmatrix}$$

$$\vec{f_v} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \underbrace{-\rho g}_{\text{poids volumiq}} \end{vmatrix}$$

force volumiq

Beltrami

Choisir l'équat° pr laquelle la simplificat° est optimale.

$$\Rightarrow 2\frac{\partial f_z}{\partial z} + \frac{\nu}{1-\nu}\operatorname{div}\vec{f} + \Delta\sigma_z + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial z^2} = 0$$

ou **Equilibre local**

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\cancel{\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta}} + \cancel{\sigma_r} - \cancel{\sigma_\theta}\right) + \cancel{\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}} + \cancel{f_r} = 0 \\ \cancel{\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r}} + \frac{1}{r}\left(\cancel{\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}} - \cancel{2\tau_{r\theta}}\right) + \cancel{\frac{2\tau_{\theta z}}{\partial z}} + \cancel{f_\theta} = 0 \\ \cancel{\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r}} + \frac{1}{r}\left(\cancel{\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta}} + \cancel{\tau_{rz}}\right) + \boxed{\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_r = 0} \end{cases}$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -f_z = \rho g \xrightarrow{\text{intégrat°}} \sigma_z = \rho g z + A, \text{ avec } \sigma_z(z=h) = 0$$

↳ $A = -\rho g h$.

$$\sigma_z(z) = \rho g(z-h)$$

Retour sur l'exo "sphère ss pression"

On pose le tenseur / valeur, puis on cherche équat°.

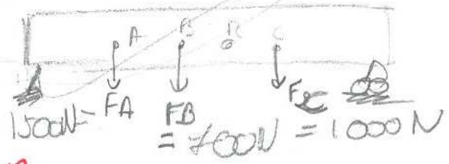
$$[\varepsilon] = \frac{1}{2}\left[\overline{\overline{\text{grad}}}(\vec{U}) + \overline{\overline{\text{grad}}}^t(\vec{U})\right]$$

$\vec{U} = u_r(r)\vec{e_r}$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{du_r}{dr} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u_r}{r} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Loi de Hooke}} [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

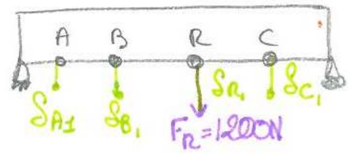
4.4 Théorème de Maxwell-Betti

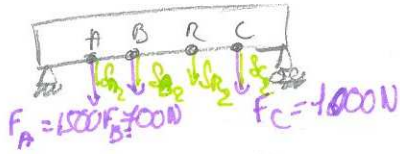


Théorème de réciprocité de M-B :
Le travail produit par le système de force (S_1) ds le chps de déplacem^t dû au système (S_2) est égal au travail du système de force (S_2) ds le chps de déplacem^t du au système (S_1).

(travail virtuel)

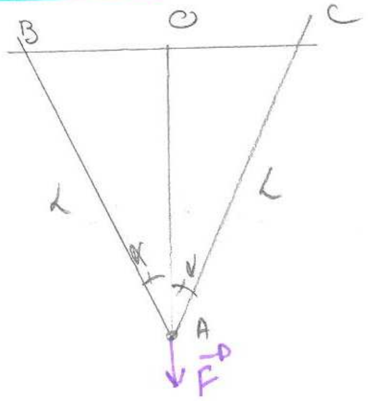
(S1)



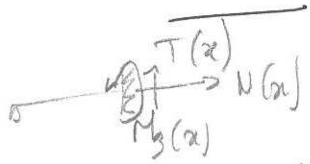


$$F_R \times \delta_R^2 = F_A \times \delta_A^1 + F_B \times \delta_B^1 + F_C \times \delta_C^1 \Rightarrow \delta_R^2 = -1,26\,cm$$

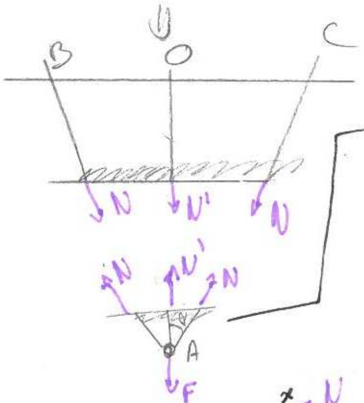
Structure rotulée :



On pose : Tension de OA = N'
——— AB = N
——— AC = N } symétrie.



① Exprimer N en fct° de N'.
② Théorème de Ménabrea
Pr calculer N' et de N

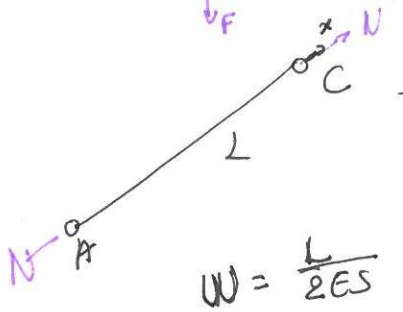


① Equilibre des efforts verticaux appliqués sur A.

$$N' + 2N\cos\alpha = F \rightarrow N = \frac{F - N'}{2\cos\alpha}$$

② Ménabrea :

$$\frac{\partial W}{\partial N'} = 0 . \quad W \text{ travail élastiq interne}$$



$$W = \frac{1}{2} \times N \times \int_0^L \varepsilon_x\,dx = \frac{1}{2} N \int_0^L \frac{\sigma_x}{E}\,dx \quad \text{avec } \sigma_x = \frac{N}{S}$$

$$= \frac{1}{2} N \int_0^L \frac{N}{ES}\,dx = \frac{1}{2}\frac{N^2 L}{ES} = W.$$

$$W = \frac{L}{2ES}\left(\frac{(F-N')^2}{4\cos^2\alpha} + N'^2\cos\alpha\right)$$

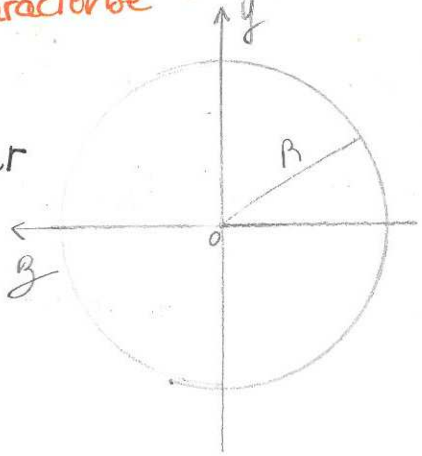
$$\rightarrow \frac{\partial W}{\partial N'} = 0 \Rightarrow N' = \frac{F}{1 + 2\cos^3\alpha} \quad \text{et} \quad N = \frac{\cos^2\alpha\, F}{1 + 2\cos^3\alpha}.$$

Déplacem^t du nœud A : Th de Castigliano. On injecte N' ds W.

$$\rightarrow \frac{\partial W}{\partial F} = \delta_A = \frac{\cos\alpha}{1 + 2\cos^3\alpha} \times \frac{FL}{ES}$$

• Caractéristiques géométriques des sections :

Exo 1 : ① Section circulaire



Moment d'inertie polaire I_O → caractérise la rigidité à la torsion

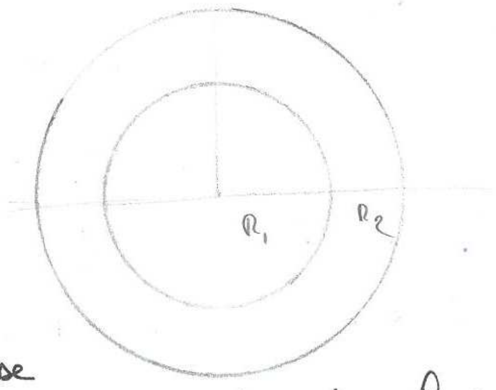
$$I_O = \iint_{(S)} r^2 dS = \iint_{(S)} r^2 \, r d\theta \times dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^R r^3 dr$$

$$= 2\pi \frac{R^4}{4} = \boxed{\frac{\pi R^4}{2}} = I_O$$

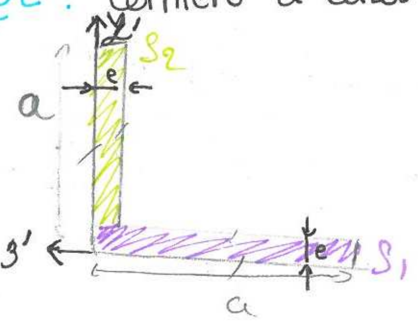
I_z et I_y ? $I_O = \iint_{(S)} r^2 dS = \iint_{(S)} (y^2 + z^2) dS = I_z + I_y$

$$I_z = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$$



② $I_O = \frac{\pi R_2^4}{2} - \frac{\pi R_1^4}{2} = \frac{\pi}{2}(R_2^4 - R_1^4)$

Exo 2 : Cornière à ailes égales



On cherche le repère q. passe par le centre de gravité de la sect°.

a = 50 mm

e = 5 mm

Cornière rapportée au repère (O, y', z')

1/ Aire de la section

$A = \underline{a \times e} + \underline{(a-e) \times e} = 475 \text{ mm}^2$

2/ Moment statique $S_{z'}$ $\quad S_{z'} = \iint_{(S)} y' dS = \iint_{(S_1)} y' dS + \iint_{(S_2)} y' dS$

$$S_{z'} = \int_0^5 y' \times a \, dy' + \int_5^{50} y' \times e \, dy'$$

$$= \left[a \frac{y'^2}{2} \right]_0^5 + \left[e \frac{y'^2}{2} \right]_5^{50} = 50 \times \frac{5^2}{2} + 5 \times \frac{50^2}{2} - 5 \times \frac{5^2}{2} = 6812,5 \text{ mm}^3$$

3/ Position y'_G du centre de gravité

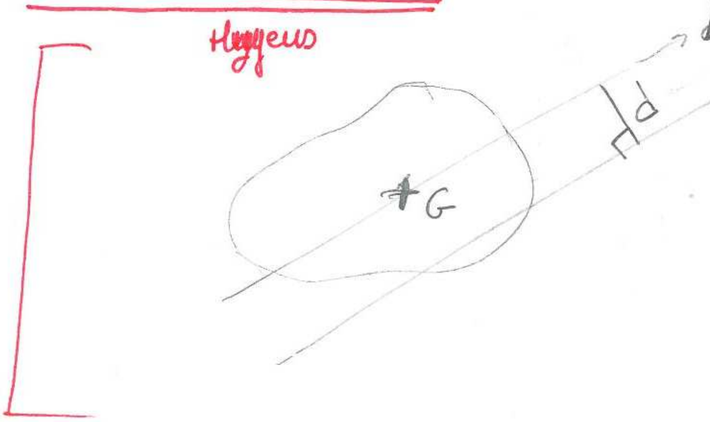
Ici : $y'_G = z'_G = \frac{S_{z'}}{S} = 14,34$ mm

$z'_G = \frac{S_{y'}}{S} = -14,3$ mm $\quad$ ~~$z'_G = \frac{S_{y'}}{S}$~~ $\quad$ car $|S_{z'}| = |S_{y'}|$

4) Calculer I_{Gz} à l'aide du Théorème de Huygens

$\boxed{I_{Gz} = I_{z'} - S \times (y'_G)^2}$ $I_{z'} = \iint_{(S)} (y')^2 dS$

Huygens



$\Delta' // \Delta$

$I_{\Delta'} = I_{G\Delta} + S \times d^2$.

Donc $I_{z'} = 112531 \ mm^4$ $\Rightarrow I_{Gz} = 11,25 \ cm^4 = I_{Gy}$.

5) Calculer le produit d'inertie I_{Gyz}

$I_{Gyz} = \iint_{(S)} y z \, dS$. Huygens : $I_{Gyz} = I_{y'z'} - S y'_G \times z'_G$

$I_{y'z'} = 31093 \ mm^4 = 3,1093 \ cm^4$

$I_{Gyz} = -6,66 \ cm^4$

Tenseur des Inerties

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{Gy} & -I_{Gyz} \\ -I_{Gyz} & I_{Gz} \end{bmatrix}_{\{Gyz\}} = \begin{bmatrix} 11,25 & 6,66 \\ 6,66 & 11,25 \end{bmatrix}_{\{Gyz\}} cm^4$$

On diagonalise pr trouver les direct° principales d'inertie

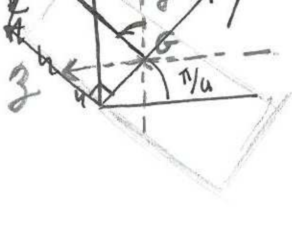
Valeurs propres : $(11,25 - \lambda)(11,25 - \lambda) - 6,66^2 = 0$ $\quad a^2 - b^2$

$\Rightarrow (11,25 - \lambda + 6,66)(11,25 - \lambda - 6,66) = 0$

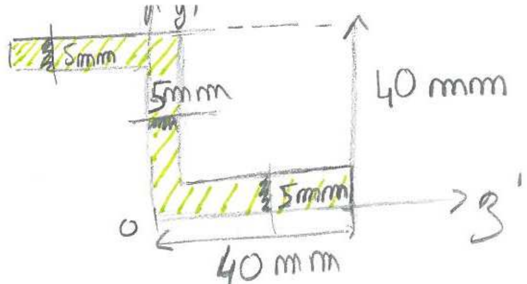
$\Rightarrow \lambda_1 = 4,59 = I_Z \quad \lambda_2 = 17,91 = I_Y$

Vecteurs propres : = Direct° principales d'inertie
$$\begin{cases} 11,25\alpha + \beta 6,66 = 17,91\alpha \Rightarrow \vec{Y} = (1,1) & \alpha = \beta \\ 6,66\alpha + \beta 11,25 = 4,59\beta \Rightarrow \vec{Z}(-1,-1) & \alpha = -\beta \end{cases}$$

Repère principal d'inertie (GYZ) $[I] = \begin{bmatrix} 17,91 & 0 \\ 0 & 4,59 \end{bmatrix}_{\{Gyz\}} cm^4$



Exercice



$y'_G = 16,11$ mm

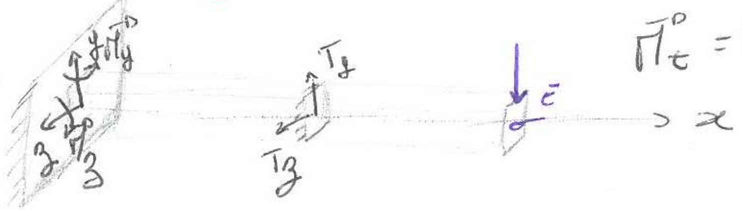
$3'_G = 8,61$ mm

Tenseur $[I] = \begin{bmatrix} 8,04 & 6 \\ 6 & 9,7 \end{bmatrix}$ cm4 $\{G, y3\}$

avec $y // y'$
$3 // 3'$

$[I] \begin{bmatrix} 2,81 & 0 \\ 0 & 14,93 \end{bmatrix} \{GYZ\}$ $\vec{Z} \begin{pmatrix} 1 \\ 1,15 \end{pmatrix}$ $\vec{Y} \begin{pmatrix} 1 \\ -0,87 \end{pmatrix}$

II - RDM - Sollicitation interne et déformat° des poutres = flexion



$\vec{M_t} = \vec{M_x}$

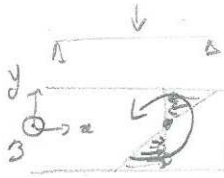
4 efforts élémentaire :
- → Moment de flexion $M_{f_3}(x)$ et/ou $M_{fy}(x)$
- → effort normal $N(x)$
- → effort tranchant $T_y(x)$ et/ou $T_3(x)$
- → moment de torsion $M_t(x) = M_x$

$N(x) \to \sigma_x$

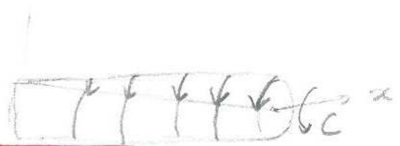
$M_f(x) \to \sigma_x(y)$

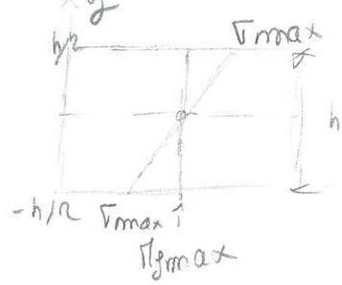
$T(x) \to \tau_{xy}$ et/ou τ_{xz}

$M_t(x) \to \tau_{xz}$ et τ_{xy}



cette distribut° n'entraine pas de $N(x)$ car les efforts normaux ~~cela~~ se compensent mais on a un moment de flex°

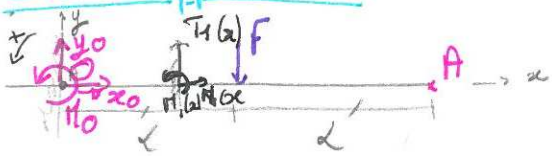




$M_{f_3}(x) \to \boxed{\sigma_x(y) = -\frac{M_{f_3}(x)}{I_{G_3}} \cdot y}$

Dans la poutre : $|\sigma_{max}| = \frac{|M_{fmax}| \cdot h/2}{I_{G_3}}$

Exo d'application



① Nature du système Isostatique

② Actions de liaisons PFS : $X_0 = 0$

$Y_0 - F = 0 \to Y_0 = F$

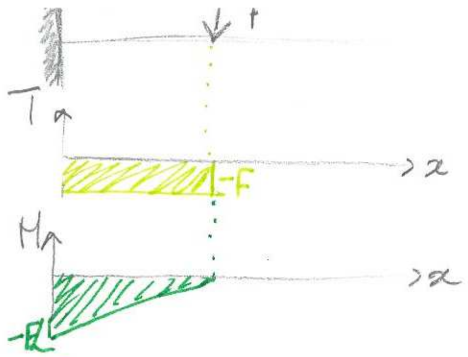
$\Sigma M^{ext}/_0 : M_0 - FL = 0 \to M_0 = FL$

③ Sollicitations internes : Charge ponctuelle → décomposit° avant et après la charge.

$0 \leq x \leq L$ $N_1(x) = 0$ $T_1(x) = -F$ $M_1(x) = -F(L - x)$

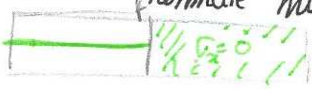
$L \leq x \leq 2L$ $N_2(x) = 0$ $T_2(x) = 0$ $M_2(x) = 0$

⚠ $M_1(x) = M_{f_{3_1}}(x)$.



$$\boxed{T(x) = \frac{-dM}{dx}}$$ utiliser pour vérification

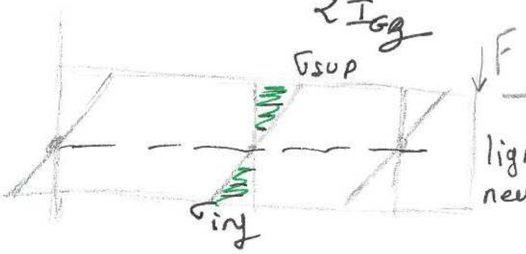
- ici $-\frac{dM_1(x)}{dx} = \frac{-(FL + Fx)}{dx} = -F = T_1(x)$
- contrainte normale nul en L et $2L$ et sur $\boxed{\text{l'axe neutre}}$?



(4) Recherche de σ_{max} : σ_{max} où ? : en $x = 0$ car M_f max en $x = 0$.

Poutre hauteur h et Inertie I_{Gz} $|\sigma_{max}| = \frac{|M_{fz\,max}| \cdot h/2}{I_{Gz}}$

$\Rightarrow |\sigma_{1\,max}| = \frac{FLh}{2I_{Gz}}$.



→ si que de la flexion (flexion simple) pas de $N(x)$

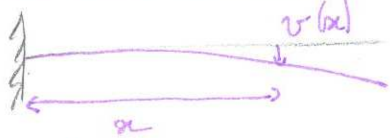
ligne neutre $\sigma_{sup} = -\sigma_{inf}$

que effort normal

- - ligne neutre $\boxed{M_f + N(x)}$

(5) Calcul de déformée : trouver $v(x), \forall x$

Relation Moment - Courbure : $\boxed{\begin{array}{l} M_{fz}(x) = EI_{Gz}\, v''(x) \\ v''(x) = \frac{d^2v(x)}{dx^2} \end{array}}$



$v(x)$ = champs de déplacem^t transversal dû à la flexion

$v'(x) = \frac{dv(x)}{dx} = \boxed{\text{Champs de rotat}^{\circ} \text{ de la sect}^{\circ}}$

$\chi(x) = v''(x) = \frac{d^2v(x)}{dx^2}$ = — de courbure.

$$v(x) = \left| \begin{array}{ll} v_1(x) & \text{pr } 0 \leq x \leq L \\ v_2(x) & \text{pr } L \leq x \leq 2L \end{array}\right.$$

$\underline{0 \leq x \leq L}$ $\quad v_1''(x) = \frac{M_1(x)}{EI} = \frac{-F(L-x)}{EI} = \frac{Fx - FL}{EI}$ (rigidité global EI)

$\rightarrow v_1'(x) = \frac{F}{EI}\left(\frac{x^2}{2} - Lx\right) + A$

$\rightarrow v_1(x) = \frac{F}{EI}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{2}\right) + Ax + B$

Calcul des constante d'intégration par l'expression des CL.

$v_1(0)=0 \to B=0$ $\quad v_1'(0)=0$ (par de rotat° ds l'encastrem^t) $\to A=0$

$\underline{v_1(x)} = \frac{F}{EI}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{2}\right)$ Vérificat° homogé

⑤ champs de déplacement

$\underline{0 \leq x \leq L}$ $\quad v_1(x) = \frac{F}{EI}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{2}\right)$

$\underline{L \leq x \leq 2L}$ $\quad v_2(x) = Cx + D$

$\Rightarrow$ $\underline{\text{Calcul de } C \text{ et } D:}$ $\quad v_1(L) = v_2(L)$ continuité chps de déplacem^t

$v_1'(L) = v_2'(L)$ " " " rotat°

$\to v_1'(L) = C = \frac{-FL^2}{2EI}$

$\to D = \frac{FL^3}{3EI}$

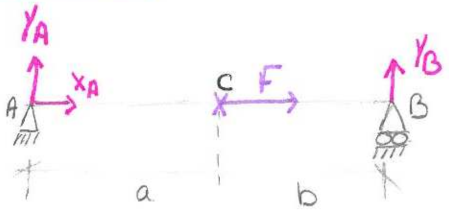
Flèche maximale $\underline{v_{max}}$ en $2L$. Si pas évident on prend $v'(x)$ et on regarde qd elle s'annule.

$v_{max} = v_2(2L) = \frac{-2FL^3}{2EI} + \frac{FL^3}{6EI}$

$= \frac{-6FL^3}{6EI} + \frac{FL^3}{6.EI} = \frac{-5FL^3}{6EI}$

Hypothèse : petit déplacem^t de déplacem^t vertical.

Exercice :



① $\underline{PFS}$: $X_A + F = 0 \to X_A = -F$

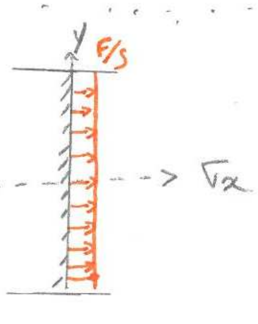
$Y_A + Y_B = 0$

$\Sigma M^{nt}/_A = Y_B(a+b) = 0 \to Y_B = 0 \to Y_A = 0$

② Sollicitat° internes

$\underline{0 \leq x \leq a} \longrightarrow \left| \begin{array}{l} N_1(x) = F \\ T_1(x) = 0 \\ M_1(x) = 0 \end{array} \right.$

$\underline{a \leq x \leq b} \to \left| \begin{array}{l} N_2(x) = 0 \\ T_2(x) = 0 \\ M_2(x) = 0 \end{array} \right.$



③ Etat de contrainte

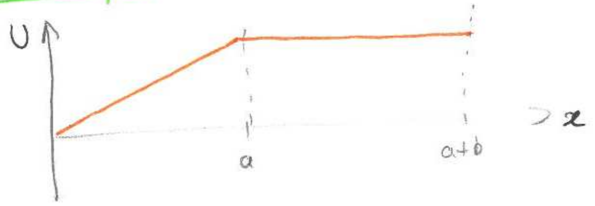
$\underline{0 \leq x \leq a}$ $\quad \sigma_x = \frac{F}{S} \to \varepsilon_x = \frac{F}{ES}$

$\underline{a \leq x \leq a+b}$ $\quad \sigma_x = 0$

④ Déplacement

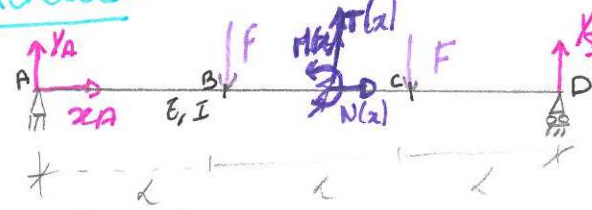
$u_C = \int_0^a \varepsilon_x \, dx = \frac{F}{ES}\int_0^a dx = \boxed{\frac{Fa}{ES} = u_C}$

Remarque : $u_C = u_B$

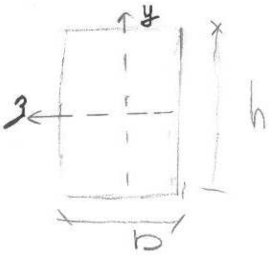


TD 18

Exercice :



Sect° :



① Isostatique PFS : $X_A = 0$

$$Y_A + Y_D - 2F = 0 \to Y_A = +2F - Y_D$$

$$\sum M_{/A} : -LF - 2LF + 3L\,Y_D = 0 \to Y_D = F$$

$\to Y_A = F$

② Sollicitat° interne :

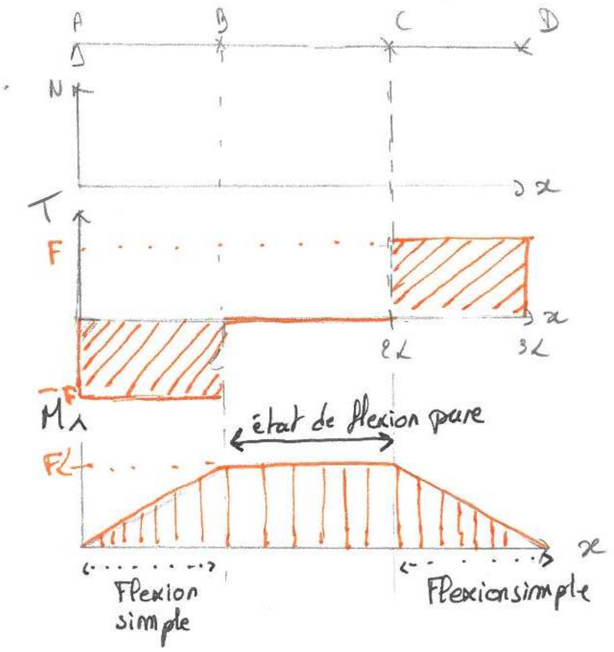
$0 \le x \le L$
$$\begin{cases} N_1(x) = 0 \\ T_1(x) = -2F + F = -F \\ M_1(x) = -(-Y_A x) = Y_A x = Fx \end{cases}$$

et $M_1(x) = -F(L-x) - F(2L-x) + Y_D(3L-x)$
$= -FL + Fx - F2L + Fx + Y_D 3L - Y_D x$
$= \cancel{-3LF} + 2xF \cancel{+ Y_D 3L} - Fx$
$= Fx$

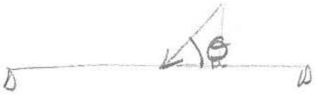
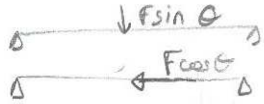
Remarque : soit on prend ts les moments du côté orienté de la facettes soit ⊖ les moments de l'autre côté.

$L \le x \le 2L$
$$\begin{cases} N_2(x) = 0 \\ T_2(x) = -F + F = 0 \\ M_2(x) = -F(2L-x) + Y_D(3L-x) = -F2L + \cancel{F}x + 3LF - \cancel{F}x = FL \end{cases}$$

$2L \le x \le 3L$
$$\begin{cases} N_3(x) = 0 \\ T_3(x) = Y_D = F \\ M_3(x) = Y_D F3L - Fx = (3L - x)F \end{cases}$$



- Contrainte maximale entre L et $2L$.
  ↳ σ_{max}
- Champs de déplacement

Note : Si pb :  alors décomposit° : 

③ Contrainte max.

$$|\sigma_{max}| = \frac{|M_{g\,max}| \cdot y}{I_{Gz}} \qquad I_{Gz} = \iint_{(S)} y^2\,dy\,dz = \int_{-b/2}^{b/2} dz \int_{-h/2}^{h/2} y^2\,dy = \frac{bh^2}{24}$$

④ Champs de déplacement $v(x)$

6 conditions aux limites à exprimer.

$$\left.\begin{array}{l} v_1(0) = 0 \;;\; v_3(3L) = 0 \;;\; v_1'(L) = v_2'(L) \\ v_1(L) = v_2(L) \;;\; v_2(2L) = v_3(2L) \;;\; v_2'(2L) = v_3'(2L) \end{array}\right\} \text{Général}$$

Ici au milieu de la poutre rotat° nul : $\boxed{\text{symétrie}}$ $\rightarrow v_2'\left(\frac{3}{2}L\right) = 0$.

$v_1(L) = v_2(2L)$ car déplacem^t b = déplacem^t c.