Cours de remise à niveau Maths 2ème année

Réduction d'endomorphismes

C. Maugis-Rabusseau
GMM Bureau 116
cathy.maugis@insa-toulouse.fr

Plan

Diagonalisable

Soit E un espace vectoriel sur K de dimension finie n.
On note $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Réduire un endomorphisme f, c'est chercher une base de E dans laquelle la matrice de f sera la plus “simple” possible, le mieux que l'on puisse espérer est que la matrice soit diagonale.

Définition

Un endomorphisme f de E est **diagonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Diagonalisable

Supposons qu'une telle base existe, notons-la $\mathcal{V} = (v_1, \cdots, v_n)$.
Alors

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{V}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, n\}, f(v_i) = \lambda_i v_i$.
Les λ_i sont appelés des **valeurs propres**, les v_i des **vecteurs propres**.

Sommaire

Valeurs propres, vecteurs propres

Définition

On appelle **valeur propre** de f un scalaire λ de K tel qu'il existe un vecteur v de E non nul tel que $f(v) = \lambda v$.
Le vecteur v est appelé **vecteur propre** de f associé à la valeur propre λ.
On appelle **spectre** de f l'ensemble des valeurs propres de f. On note cet ensemble $\mathrm{Spec}(f)$.

Remarque

Cette définition reste valable même lorsque E est de dimension infinie.

Exemple

Déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Sous-espaces propres

Proposition

Soit $\lambda \in K$. On note $E_\lambda = \{v \in E, f(v) = \lambda v\} = \mathrm{Ker}(f - \lambda id_E)$.
E_λ est un sous-espace vectoriel de E.
$\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$ alors $E_\lambda \neq \{0_E\}$ et dans ce cas, on l'appelle le **sous-espace propre** de E associé à λ.
Si $\lambda \notin \mathrm{Spec}(f)$ alors $E_\lambda = \{0_E\}$.

Exemple

Déterminez les espaces propres de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice est

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Sous-espaces propres

Proposition

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$.
Alors E_λ est **stable** par f (c'est-à-dire $f(E_\lambda) \subset E_\lambda$).
On peut donc définir f_λ, la restriction de f à E_λ, dont la matrice dans une base quelconque de E_λ est :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Théorèmes

Théorème

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec $\mathrm{Spec}(f) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p\}$.

$$\begin{aligned} f \text{ est diagonalisable} &\iff \exists \text{ une base de } E \text{ formée de vecteurs propre} \\ &\iff E = E_{\lambda_1} \bigoplus E_{\lambda_2} \bigoplus \cdots \bigoplus E_{\lambda_p}. \end{aligned}$$

Théorème

Soit λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes de f.
Alors $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0_E\}$, soit $E_{\lambda_1} \bigoplus E_{\lambda_2}$.
De même, si $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont p valeurs propres distinctes deux à deux alors $E_{\lambda_1} \bigoplus E_{\lambda_2} \bigoplus \cdots \bigoplus E_{\lambda_p}$.

Conséquences immédiates :

1. f possède au maximum n valeurs propres.
2. Si f possède n valeurs propres distinctes avec $n = \dim(E)$ alors f est diagonalisable.

Sommaire

Recherche des vp et $\overrightarrow{\text{vp}}$

Théorème

$\lambda \in \mathrm{Spec}(f) \iff \det(f - \lambda \mathrm{id}_E) = 0.$

Exemple

Déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Polynôme caractéristique

Théorème-Définition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $A = (a_{ij})_{(i,j)\in\{1,2,\dots,n\}^2} = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{E})$. On définit la fonction $P_f(x)$ par

$$P_f(x) = \det(f - x\mathrm{id}_E) = \det(A - xI_n).$$

Cette fonction est une fonction polynômiale de degré n (où $\dim(E) = n$), qui s'écrit :

$$P_A(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A)x^{n-1} + \cdots + \det(A).$$

Elle s'appelle le **polynôme caractéristique** de A.

Exemple

Calculez P_B où $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Polynôme caractéristique

Théorème

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.
Par conséquent, si $f \in \mathcal{L}(E)$, on définit le polynôme caractéristique de f par $P_f = P_A$, où A est la matrice de f dans une base quelconque de E.

ATTENTION : La réciproque est fausse en général.
En résumé, on a donc :

Théorème

Les valeurs propres de f sont les racines dans K de P_f.
Si P_f est scindé sur K(= toutes ses racines sont dans K) alors, si $\dim(E) = n$, on a :

1. f a exactement n valeurs propres, distinctes ou non.
2. La somme des valeurs propres vaut $\mathrm{Tr}(A)$.
3. Le produit des valeurs propres vaut $\det(A)$.

Multiplicité

Définition

Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$. On appelle **multiplicité** de la valeur propre λ l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine de P_f. On la note m_λ.

Théorème

- Si λ est une valeur propre de f de multiplicité m_λ alors $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$.
- Si λ est une valeur propre simple de f (i.e $m_\lambda = 1$) alors $\dim(E_\lambda) = 1$.

Sommaire

Caractérisation des endom. diagonalisables

Théorème

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note m_λ la multiplicité de la valeur propre λ.

$$f \text{ est diagonalisable} \iff \begin{cases} P_f \text{ est scindé dans } K \\ \forall \lambda \in \mathrm{Spec}(f), \dim(E_\lambda) = m_\lambda. \end{cases}$$

Corollaire

Si P_f possède n racines distinctes alors f est diagonalisable.

Exemples

1. Soient $A_1 = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Les endomorphismes f_1 et f_2 de $\mathbb{R}^2$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement A_1 et A_2 sont-ils diagonalisables ?

2. Soient $B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
   Les endomorphismes f_1 et f_2 de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement B_1 et B_2 sont-ils diagonalisables ?

Sommaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base canonique est $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On suppose que A est diagonalisable. Alors il existe $P \in GL_n(K)$ et $D = \text{ Diag } (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ telles que

$$D = P^{-1}AP \;\text{ ou }\; A = PDP^{-1}.$$

Calcul de A^m

$$
\begin{aligned}
A^m = (PDP^{-1})^m &= \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})}_{\text{m fois}} \\
&= \underbrace{PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)\cdots(P^{-1}P)DP^{-1}}_{\text{m fois}} \\
&= PD^mP^{-1},
\end{aligned}
$$

avec $D^m = \text{ Diag }(\lambda_1^m, \lambda_2^m, \cdots, \lambda_n^m)$.

Exemples

Calculez B^m où $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $m \in \mathbb{N}$.

B est diagonalisable et il existe $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ telle que

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = P^{-1}BP \text{ avec } P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} B^m &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^m 2^m & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^m 2^m \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+(-1)^m 2^{m+1} & 1+(-1)^{m+1}2^m & 1+(-1)^{m+1}2^m \\ 1+(-1)^{m+1}2^m & 1+(-1)^m 2^{m+1} & 1+(-1)^{m+1}2^m \\ 1+(-1)^{m+1}2^m & 1+(-1)^{m+1}2^m & 1+(-1)^m 2^{m+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Etude des suites récurrentes

On cherche les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} & = & u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} & = & u_n + v_n - w_n \end{array} \right.$$

Nous devons trouver pour tout entier n l'expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n, u_0,v_0 et w_0.

On définit pour tout entier n la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et alors :

$$(S) \Leftrightarrow X_{n+1} = BX_n \text{ où } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \; X_n = B^n X_0$.

D'après les calculs précédents on obtient :

$$
\begin{aligned}
X_n &= \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+(-1)^n 2^{n+1} & 1+(-1)^{n+1}2^n & 1+(-1)^{n+1}2^n \\ 1+(-1)^{n+1}2^n & 1+(-1)^n 2^{n+1} & 1+(-1)^{n+1}2^n \\ 1+(-1)^{n+1}2^n & 1+(-1)^{n+1}2^n & 1+(-1)^n 2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} u_0(1+(-1)^n 2^{n+1}) + (v_0+w_0)(1+(-1)^{n+1}2^n) \\ v_0(1+(-1)^n 2^{n+1}) + (u_0+w_0)(1+(-1)^{n+1}2^n) \\ w_0(1+(-1)^n 2^{n+1}) + (u_0+v_0)(1+(-1)^{n+1}2^n) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Résolution de syst. lin. diff. du 1er ordre

Soit à résoudre le système différentiel suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & -x(t)+y(t)+z(t) \\ y'(t) & = & x(t)-y(t)+z(t) \\ z'(t) & = & x(t)+y(t)-z(t) \end{array}\right.$$

où x, y et z sont trois fonctions dérivables définies sur $\mathbb{R}$.

Soit $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Alors $\dfrac{d}{dt}X(t) = X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$ et le système (S) s'écrit

$$X'(t) = BX(t) \text{ où } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

B étant diagonalisable, il existe une base $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3)$ dans laquelle la matrice s'écrit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Notons $X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}$ la matrice colonne des coordonnées de $(x(t), y(t), z(t))$ dans la base $\mathcal{V}$.

Nous avons $\dfrac{d}{dt}X_1(t) = X_1'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ y_1'(t) \\ z_1'(t) \end{pmatrix}$ et

$$X(t) = PX_1(t), \quad X'(t) = PX_1'(t) \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

En injectant ces relations dans le système (S) on obtient :

$$(S) \Longleftrightarrow PX_1'(t) = BPX_1(t) \Longleftrightarrow X_1'(t) = P^{-1}BPX_1(t) = DX_1(t),$$

où D est diagonale.
Ainsi

$$\begin{aligned}
(S) \quad &\Longleftrightarrow \quad X_1'(t) = P^{-1}BPX_1(t) = DX_1(t) \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcr} x_1'(t) & = & x_1(t) \\ y_1'(t) & = & -2y_1(t) \\ z_1'(t) & = & -2z_1(t) \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1(t) & = & x_0 e^{t} \\ y_1(t) & = & y_0 e^{-2t} \\ z_1(t) & = & z_0 e^{-2t} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

où x_0, y_0, z_0 sont des constantes arbitraires.

Résolution de syst. lin. diff. du 1er ordre

Les fonctions x, y et z solutions de (S) sont données par

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 e^t \\ y_0 e^{-2t} \\ z_0 e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 e^t + y_0 e^{-2t} \\ x_0 e^t + z_0 e^{-2t} \\ x_0 e^t - (y_0 + z_0) e^{-2t} \end{pmatrix}.$$