Intégrales simples

18/47 $\lim_{a\to 0} \int_a^{3a} \frac{\cos(x)}{x}\,dx$?

$x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ continues sur $]0;+\infty[$

$\exists\ \xi(a) \in]a;3a[$ tel que $\int_a^{3a} \frac{\cos(x)}{x}\,dx = \cos(\xi(a)) \int_a^{3a} \frac{dx}{x}$

$$= \cos(\xi(a))\left[\ln(3a) - \ln(a)\right]$$

$$= \cos(\xi(a))\ \ln(3)$$

Si $a \to 0$ $\xi(a) \to 0$ et $\cos(\xi(a)) \longrightarrow \cos(0) = 1$ (cos continue)

d'où $\lim_{a\to 0} \int_a^{3a} \frac{\cos(x)}{x}\,dx = \ln(3)$

Calcul Intégral (IPP)

26/47 Calculons $F(x) = \int_1^x \ln(t)\,dt$

Posons $u(t) = \ln(t)$ $v'(t) = 1$ ($\Rightarrow v(t) = t$ par exemple)

$$F(x) = \left[t\ln(t)\right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \times t\,dt$$

$$= x\ln(x) - (x-1)$$

Calcul Intégral (CDV)

(i) $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ soit $x = \sin(t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$I = \int_{\sin(0)}^{\sin(\frac{\pi}{2})} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(t)} \times \cos(t)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt$$

$\pi/2$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos(2t))\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \frac{\pi}{2} + \underbrace{\left[\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi/2}}_{=0} \right\} = \frac{\pi}{4}$$

(ii) $$J = \int_1^e \frac{\ln(x)^2}{x}\, dx = \int_{\exp(0)}^{\exp(1)} \frac{\ln(x)^2}{x}\, dx \qquad \boxed{x = e^t}$$

$$= \int_0^1 \frac{\left[\ln(e^t)\right]^2}{e^t} \times e^t\, dt = \int_0^1 t^2\, dt = \frac{1}{3}$$

<u>Remarque</u> PO IC, ICBE, IMACS arrêt à 39/47

<u>MIC</u> 40→47/47 sera rarement demandé

(il faut savoir que cela existe