9/33 Exemples d'espaces vectoriels

Notation : ev. $\longrightarrow$ espace vectoriel

(i) E Kev alors E et $\{0_E\}$ sev

$\boxed{* E}$: $E \neq \emptyset$

$\forall \lambda \in K, \forall x,y \in E \quad \lambda x + y \in E$ (car E ev)

donc E est un sev de E.

$\boxed{* \{0_E\}}$ $\{0_E\} \neq \emptyset$

$\forall \lambda \in K, \forall x;y \in \{0_E\} \quad \lambda x + y = \lambda 0_E + 0_E = 0_E$

donc $\{0_E\}$ sev de E

(ii) $I \subset \mathbb{R}$ intervalle et $\mathcal{C}(I;\mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R} \text{ continues}\}$

* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longmapsto 0$ est dans $\mathcal{C}(I;\mathbb{R})$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f,g \in \mathcal{C}(I;\mathbb{R})$ alors

$\lambda f + g$ est continue donc $\lambda f + g \in \mathcal{C}(I;\mathbb{R})$

(iii) $\mathbb{R}_n[X] = \{ P \in \mathbb{R}[X] \ / \ \deg(P) \leq n \}$

(i) On a $P = 0 \in \mathbb{R}_n[X]$

(ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P,Q \in \mathbb{R}_n[X] \Rightarrow \lambda P + Q \in \mathbb{R}[X]$

et $\deg(\lambda P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q)) \leq n$

donc $\mathbb{R}_n[X]$ sev de $\mathbb{R}[X]$

(iv) $F = \{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = 0 \}$ sev de $\mathbb{R}^2$

* $(0;0) \in F \neq \emptyset$
* Soit $(x_1;y_1)$ et $(x_2;y_2) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

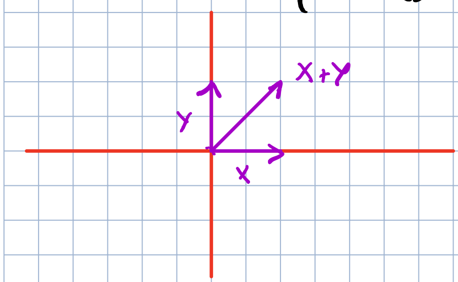
alors $\lambda(x_1;y_1) + (x_2;y_2) = (\lambda x_1 + x_2 ; \lambda y_1 + y_2)$

$\lambda(x_1;y_1)+(x_2;y_2) = (\lambda x_1+x_2 ; \lambda y_1+y_2)$

Or $x_1 = x_2 = 0$ donc $\lambda x_1 + x_2 = 0$

Ainsi $\lambda(x_1;y_1)+(x_2;y_2) \in F \Rightarrow F$ sev de $\mathbb{R}^2$

(v) $H = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, xy = 0\}$ n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$



en rouge : H

$X = (1,0) \in H$

$Y = (0;1) \in H$

mais $X+Y = (1;1) \notin H$.

13/33 (i) $F = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x-y=0\}$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ alors $X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix}$ car $y = x$

d'où $X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ainsi $F \subset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

On montre sans difficulté l'égalité

(ii) $\mathcal{E} : y'' - 3y' + 2y = 0$ $\quad \mathcal{S}ol(\mathcal{E}) = \{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x}\}$

On a evidemment $\mathcal{S}ol(\mathcal{E}) = \mathrm{Vect}(x \mapsto e^{x} ; x \mapsto e^{2x})$

14/33 $F = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x = 0\}$

$G = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = 0\}$

On a "clairement" $F + G = \mathbb{R}^2$

en effet, $F \subset \mathbb{R}^2$, $G \subset \mathbb{R}^2$ donc $F+G \subset \mathbb{R}^2$

Pour montrer l'inclusion inverse : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

alors $X = \begin{pmatrix} x \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \end{pmatrix} \in F+G \Rightarrow \mathbb{R}^2 \subset F+G$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \\ 0\end{pmatrix}}_{\in G} + \underbrace{\begin{pmatrix} \\ y\end{pmatrix}}_{\in F}$$

D'où $F + G = \mathbb{R}^2$

17/33 (i) F et G de la diapo 14/33

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in F \cap G$

$$\left.\begin{array}{l} X \in F \Rightarrow x = 0 \\ X \in G \Rightarrow y = 0 \end{array}\right) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

. F et G supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$

(ii) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$

$F = \{ f \in E \mid f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \}$

$G = \{ f \in E \mid f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \}$

- $x \longmapsto 0 \in F \cap G$ donc $F \neq \emptyset$ et $G \neq \emptyset$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g \in F$ alors

$$\begin{aligned} (\lambda f + g)(-x) &= \lambda f(-x) + g(-x) \\ &= \lambda f(x) + g(x) \quad \text{car } f, g \in F \\ &= (\lambda f + g)(x) \end{aligned}$$

donc $\lambda f + g \in F$. Même chose pour G

Donc F et G sev de E

Soit $h \in F \cap G$: on a

Soit $x \in \mathbb{R}$: $h(x) = h(-x)$ car $h \in F$

$= -h(x)$ car $h \in G$

d'où $2 \times h(x) = 0 \Rightarrow h(x) = 0$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ $h(x) = 0 \Rightarrow F \cap G = \{0_E\}$

Rq en fait, on a $E = F \oplus G$

en effet $\forall f \in E \quad f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\in F} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\in G}$.

Familles libres; génératrices et bases 22/33

ex1 $A = (\underbrace{(1;1)}_{X}; \underbrace{(1,2)}_{Y}; \underbrace{(2,3)}_{Z})$

On a $X+Y-Z=0$; famille liée

$$B = ((1,1,1);(1,2,3))$$

On suppose la famille liée : $\exists (a;b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ tq

$$a\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = 0$$

$\begin{cases} a+b=0 \\ a+2b=0 \\ a+3b=0 \end{cases} \Rightarrow$ Des deux premières équations, on tire $a=b=0$

donc B famille libre

ex2 Dans tous les exemples suivants, on commence par trouver une famille génératrice et on essaie ensuite de montrer qu'elle est libre (si non libre, cela signifie qu'il y'a des vecteurs inutiles)

① $\mathbb{R}^n$; Soit $X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ alors

$$X = x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{:= e_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{:= e_2} + \dots + x_n \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{:= e_n}$$

Alors $\mathbb{R}^n \subset \mathrm{Vect}(e_1 ; e_2 ; \dots e_n)$

Donc $(e_1 - e_n)$ famille génératrice de $\mathbb{R}^n$

Supposons cette famille liée : $\exists\, \lambda_1 - \lambda_n \,/\, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \forall i \in \{1 .. n\} \quad \lambda_i = 0$

Donc cette famille est libre

Bilan $(e_1 - e_n)$ base de $\mathbb{R}^n$ (on parle de "base canonique")

(ii) $\mathcal{M}_{np}(K) = \mathrm{Vect}\left(E_{ij} \; ; \; \begin{array}{l} i \in \{1 ; n\} \\ j \in \{1 ; p\} \end{array} \right)$

avec
$$E_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} & 0 & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & 0 & \\ 0 & \cdots\cdots & 0 \; 1 \; 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & 0 & \end{pmatrix} & \leftarrow i \\ \qquad\qquad \uparrow j & \end{array}$$

Les arguments sont identiques à ceux utilisés dans le cas $\mathbb{R}^n$

(iii) $\mathbb{R}_n[X] = \left\{ a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \, , \; a_0 \dots a_n \in \mathbb{R} \right\}$
$= \mathrm{Vect}\left\{ X^0 ; X^1 ; X^2 ; X^3 \dots X^n \right\}$

Pour montrer que c'est une famille libre ; le seul polynôme nul est celui dont tous les coefficients sont nuls.

(iv) $\mathbb{R}[X] = \text{Vect}\left(X^k,\ k \in \mathbb{N}\right)$.

<u>Dimension</u> (avec les notations de la diapo 22/30) 26/33

$\dim(\mathbb{R}^n) = n$ $\quad ((e_1 \ldots e_n)$ base de $\mathbb{R}^n)$

$\dim(\mathcal{M}_{n,p}(K)) = np$ $\quad ((E_{jk})\ j=1\ldots n,\ k=1\ldots p$ base$)$

$\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$ $\quad ((1, X; \ldots; X^n)$ base$)$

$\dim(\mathbb{R}[X]) = +\infty$

27/33

$$F\ \text{Vect}\Big(\underbrace{(1,1\ 0)}_{A};\ \underbrace{(0,0,0)}_{B};\ \underbrace{(2;2\ ,0)}_{C};\ \underbrace{(1;0,1)}_{D};\ \underbrace{(2;3;-1)}_{E}\Big)$$

On a $B = 0_{\mathbb{R}^3}$ que l'on peut éliminer

$C = 2 \times A$ ——————

$E = A \pm C - D$ que l'on peut éliminer

$$F = \text{Vect}\Big(\underbrace{(1\ 1\ 0)}_{A};\ \underbrace{(1\ 0\ 1)}_{D}\Big)$$

Montrons que $(A;D)$ est une famille libre : par l'absurde, supposons qu'il existe $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b\\a\\b\end{pmatrix} \Rightarrow a = b = 0$$

D'où (A,D) base de F

29/33 En choisissant $K = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, on obtient une famille libre $\left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]$ et de cardinal 3 : c'est une base de $\mathbb{R}^3$

30/33 $\quad \text{Card}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

Il suffit de montrer que la famille est libre

Soit $(a;b;c)$ tq

$$a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ a-c=0 \\ b-2c=0 \end{cases} \begin{matrix} \Rightarrow & a=c=0 \\ \Rightarrow & b=2c=0 \end{matrix} \Big\} \ a=b=c=0$$

La famille est libre et de cardinal 3 $\Rightarrow$ base de $\mathbb{R}^3$

31/33 On a montré que

$$F = \text{Vect}\left((1;1,0);(0;0;0);(2;2;0);(1\ 0\ 1);(2\ 3\ -1)\right)$$

$$= \text{Vect}\left((1;1,0);(1;0;1)\right) \text{ de dimension } 2$$

Donc le rang de la famille est 2

FIN