7/40

(i) $\psi : K[x] \longrightarrow K[x]$

$P \longmapsto P'$

Soit $\lambda \in K$, $P, Q \in K[X]$ alors $\psi(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)'$

$= \lambda P' + Q' = \lambda \psi(P) + \psi(Q)$

Donc $\psi \in \mathcal{L}(K[x])$

(ii) $f : \mathcal{C}^0([a;b]) \to \mathcal{C}^1([a;b])$

$u \longmapsto v : x \longmapsto \int_a^x u(t)\,dt$

f est bien définie par la primitive d'une fonction continue est clairement $\mathcal{C}^1$. Par linéarité de l'intégrale on a f linéaire.

(iii) $f : E \longrightarrow E$

$x \longmapsto \alpha x$ $(\alpha \in K)$ est clairement linéaire : on parle ici d'une homothétie

(iv) $p_i : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow E_i$

$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_i$ est clairement linéaire $\to$ c'est une projection

(v) $Tr : M_n(K) \longrightarrow K$

$A \longmapsto \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$ est linéaire

Soit $\lambda \in K$ et $A, B \in M_n(K)$ alors

$$Tr(\lambda A + B) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda A + B)_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^{n} A_{ii} + \sum_{i=1}^{n} B_{ii}$$

$$= \lambda\, Tr(A) + Tr(B)$$

(vi) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x;y) \longmapsto (x-y \,;\, 3y+1 \,;\, x+y)$

n'est pas linéaire. En effet $f(0,0) = (0;1;0) \neq (0,0,0)$

(vii) $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ linéaire

$(x;y) \longmapsto (x-y \,;\, 3y \,;\, x+y)$

En effet $(x;y) \longmapsto x-y$

$(x;y) \longrightarrow 3y$

$(x;y) \longmapsto x+y$

sont toutes trois linéaires.

$\boxed{11/40}$ (i) $\psi : K[x] \longrightarrow K[x]$

$P \longrightarrow P'$

On a $\mathrm{Ker}(\psi) = \mathrm{Vect}(X^0)$

$\mathrm{Im}(\psi) = K[X]$

En effet si $Q(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n X^n \in K[x]$

Si on pose $P(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ car $P' = Q$.

(ii) Soit $(x;y) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ alors $x+y = x-y = 3y = 0$

$\Rightarrow x = y = 0$ donc $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{(0,0)\}$

Si $X = \begin{pmatrix} x-y \\ 3y \\ x+y \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(\varphi)$

alors $X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

14/40

① $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ne peut être bijective car les dimensions ne coïncident pas

② NON Contre exemple : la fonction nulle.

15/40 $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}\right)$

donc $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \mathrm{rg}(\varphi) = 2$

16/40 Rq : le théorème du rang est un résultat très important à connaître par cœur

---

21/40 ① $\varphi(x;y) = (x-y ; 3y ; x+y)$

$$\begin{array}{cc} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \\ \tilde{e}_3 \end{array}$$

$(e_1 ; e_2)$ base canonique de $\mathbb{R}^2$

$(\tilde{e}_1 ; \tilde{e}_2 ; \tilde{e}_3)$ —— de $\mathbb{R}^3$

② Base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$: $\{1 ; X ; X^2\}$

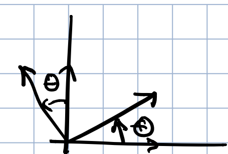
$\psi(1) = 0 \quad \psi(X) = 1 \quad \psi(X^2) = 2X$

D'où la matrice de ψ

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

③ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto \alpha x$ Matrice de f : $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

④



$r_\theta(e_1) = (\cos\theta \,;\, \sin\theta)$

$r_\theta(e_2) = (-\sin\theta \,;\, \cos\theta)$ $\qquad B = (e_1 ; e_2)$

$$R_\theta = \mathrm{Mat}(r_\theta ; B) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

26/40

$$\varphi(x;y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ 3y \\ x+y \end{pmatrix}$$

32/40 (Matrice de Passage)

$$P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'} = \mathrm{Mat}(\mathrm{Id} ; \mathcal{E}' ; \mathcal{E}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

On a $e'_1 = e_1 + e_2$

$e'_2 = e_3$

$e'_3 = e_1 - e_2 - 2e_3$

D'où $e_3 = e'_2$

$\left.\begin{array}{l} e_1 + e_2 = e'_1 \\ e_1 - e_2 = e'_3 + 2e'_2 \end{array}\right\} \Rightarrow e_1 = \frac{1}{2}(e'_1 + e'_3 + 2e'_2)$

$e_2 = \frac{1}{2}(e'_1 - e'_3 - 2e'_2)$

$$\text{D'où } (P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'})^{-1} = P_{\mathcal{E}'\mathcal{E}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{array}$$

34/40

$$P_{(e_1;e_2);(e'_1;e'_2)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} := P$$

$$P_{(\varepsilon_1;\varepsilon_2;\varepsilon_3);(\varepsilon'_1;\varepsilon'_2;\varepsilon'_3)} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix} := Q$$

$$A' = \mathrm{Mat}\left(\varphi;\ (e'_1;e'_2);(\varepsilon'_1;\varepsilon'_2;\varepsilon'_3)\right)$$

$$= Q^{-1} \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix} P$$

$$= \begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 1/2 & -1/2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 1/2 & -1/2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 6\\ 3 & 5\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2 & 7/2\\ 1 & 0\\ -1 & -5/2\end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix}7 & -12\\ 4 & -7\end{pmatrix} = \mathrm{Mat}(\Phi;\ \mathcal{E})$$

$$P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix} \qquad (P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'})^{-1} = \begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$B' = (P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'})^{-1}\, B\, P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}$$

$$= \begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & -12\\ 4 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$(1 \quad 1 \quad 1)$

38/40

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$rg(A) = \dim(\mathrm{Im}(A)) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} V_1 & V_2 & V_3 \end{matrix} \end{array} \qquad \text{On a } V_3 = 2(V_1 + V_2)$$

et $V_1 ; V_2$ sont libres donc

$$rg(B) = 2 \quad .$$