

Modélisation et Calcul Scientifique

Exemples de modèles basés sur des edp

Philippe Villedieu

Philippe.villedieu@insa-toulouse.fr

Plan

1. Exemples de modèles basés sur une edp
 - ✓ Conduction de la chaleur dans un solide
 - ✓ Propagation des ondes acoustiques dans un solide
 - ✓ Transport d'un polluant dans un fluide

2. Exemples de modèles basés sur un système d'edp
 - ✓ Modèle de réaction-diffusion en dynamique des populations
 - ✓ Equations de la mécanique des milieux continus
 - ✓ Equations de Maxwell

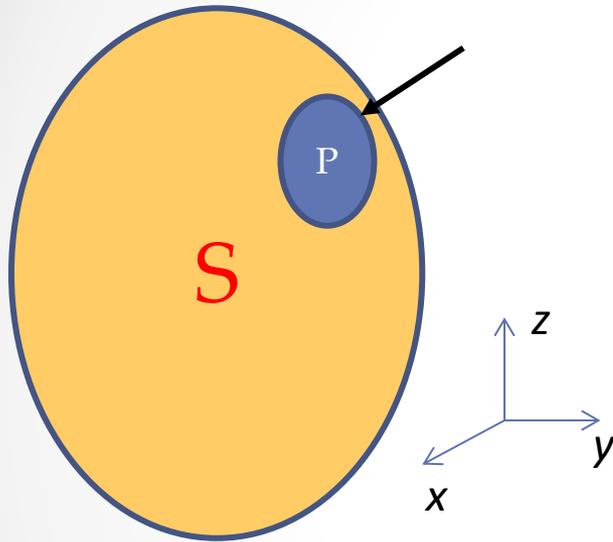
Plan

1. Exemples de modèles basés sur une edp
 - ✓ Conduction de la chaleur dans un solide
 - ✓ Propagation des ondes acoustiques dans un solide
 - ✓ Transport d'un polluant dans un fluide

2. Exemples de modèles basés sur un système d'edp
 - ✓ Modèle de réaction-diffusion en dynamique des populations
 - ✓ Equations de la mécanique des milieux continus
 - ✓ Equations de Maxwell

1.1 Modélisation du transport de la chaleur dans un solide

Sous partie
quelconque **P** de S



Solide S

Considérons une sous partie P de S. **P constitue un système thermodynamique fermé auquel on peut à chaque instant appliquer le 1er principe de la thermodynamique:**

$$\frac{d\mathcal{U}_P}{dt} = \dot{W}_P + \dot{Q}_P$$

où

- \mathcal{U}_P désigne **l'énergie interne** de P,
- \dot{W}_P désigne **le travail échangé par unité de temps** entre P et le reste du solide ou avec l'extérieur de S
- \dot{Q}_P désigne **la chaleur échangée par unité de temps** entre P et le reste du solide ou avec l'extérieur de S

1.1 Modélisation du transport de la chaleur dans un solide

Dans un solide, les variations relatives de volume sont en général très faibles devant les variations relatives de température (contrairement aux cas des gaz).

On peut montrer qu'il est possible de négliger le terme \dot{W}_P (qui implique un déplacement de matière) devant le terme \dot{Q}_P .

On a donc finalement l'équation suivante (valable pour toute sous-partie P de S):

$$(1) \quad \frac{d\bar{U}_P}{dt} = \dot{Q}_P$$

Il reste maintenant à :

- exprimer \bar{U}_P et \dot{Q}_P en fonction du champ de température $T(t,x)$ dans S,
- utiliser le fait que l'équation obtenue est valable pour toute sous-partie P de S afin d'en déduire une équation locale valable pour tout t et pour tout x de S (e.d.p.)

***Remarque:** pour un gaz à pression constante, l'équation (1) reste vraie à condition de remplacer l'énergie par l'enthalpie.*

1.1 Modélisation du transport de la chaleur dans un solide

L'énergie étant une grandeur additive, on a par définition de la densité massique d'énergie interne u :

$$\text{Energie de P [J]} \leftarrow \mathcal{U}_P(t) = \int_P u(t, \mathbf{x}) dm = \int_P \rho(t, \mathbf{x}) u(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \rightarrow \text{Volume [m}^3\text{]}$$

\swarrow Energie massique [J kg⁻¹] \downarrow Masse [kg] \downarrow Masse volumique [kg m⁻³]

où ρ désigne **la masse volumique du solide que l'on supposera constante** par la suite (par soucis de simplicité).

Si on fait l'hypothèse que le solide est en équilibre thermodynamique local, on peut définir sa température en chaque point, notée $T(t, \mathbf{x})$, et on peut écrire que u est une fonction de T . On a donc:

$$\mathcal{U}_P(t) = \int_P \rho u(T(t, \mathbf{x})) d\mathbf{x}$$

D'où finalement la relation suivante (en omettant les variables t et \mathbf{x} pour alléger les notations) :

$$(2) \quad \frac{d\mathcal{U}_P}{dt} = \int_P \rho c(T) \frac{\partial T}{\partial t} d\mathbf{x}$$

avec

$$c(T) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{du}{dT}(T)$$

Chaleur spécifique du solide [J kg⁻¹ K⁻¹]

1.1 Modélisation du transport de la chaleur dans un solide

Les transferts de chaleur dans un solide ou entre un solide et l'extérieur peuvent se faire:

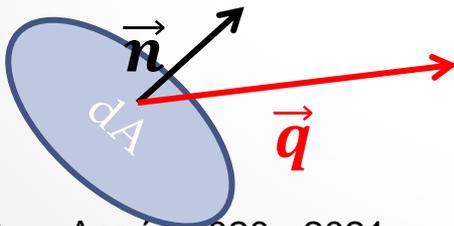
- **par conduction** (échange d'énergie de proche en proche entre les atomes ou les molécules du réseau)
- **par rayonnement** (échange d'énergie à distance entre les atomes ou les molécules par émission et absorption de photons)

Au températures usuelles, les échanges par rayonnement sont négligeables devant les échanges par conduction.

On supposera donc dans la suite que \dot{Q}_P provient uniquement de la conduction. Dans ce cas on peut écrire que:

$$(3) \quad \dot{Q}_P = - \int_{\partial P} \vec{q} \cdot \vec{n} \, dA$$

$\vec{q} \cdot \vec{n} \, dA$ correspond (par définition du vecteur \vec{q}) à la quantité de chaleur qui tranverse par unité de temps la surface dA de normale \vec{n} .



\vec{q} s'exprime en $W \, m^{-2}$ (ou en $J \, s^{-1} \, m^{-2}$)

1. Modélisation du transport de la chaleur dans un solide

En regroupant (1), (2) et (3), on obtient l'équation:

$$\int_P \rho c(T) \frac{\partial T}{\partial t} d\mathbf{x} = - \int_{\partial P} \vec{\mathbf{q}} \cdot \vec{\mathbf{n}} dA$$

Or d'après le théorème de Green-Ostrogradsky:

$$\int_P \vec{\mathbf{q}} \cdot \vec{\mathbf{n}} dA = \int_P \text{div}(\vec{\mathbf{q}}) d\mathbf{x}$$

d'où finalement l'équation :

$$\int_P \left[\rho c(T) \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div}(\vec{\mathbf{q}}) \right] d\mathbf{x} = 0$$

Cette dernière équation étant vérifiée pour toute sous-partie P (suffisamment régulière) du solide S, on en déduit **l'équation locale** suivante:

$$(4) \quad \rho c(T) \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div}(\vec{\mathbf{q}}) = 0$$

1.1 Modélisation du transport de la chaleur dans un solide

L'équation (4) n'est pas fermée (plus d'inconnues que d'équations). Pour fermer le problème, il faut relier le flux de chaleur à la température.

Pour cela on utilise la **loi semi-empirique de Fourier**:

$$(5) \quad \vec{q} = -\lambda(T) \vec{\nabla}T = -\lambda(T) \begin{pmatrix} \partial_x T \\ \partial_y T \\ \partial_z T \end{pmatrix}$$

λ est appelée **conductivité thermique du matériau** et s'exprime en $W m K^{-1}$. C'est une fonction strictement positive de la température. La loi (5) exprime le fait que la chaleur « s'écoule » du chaud vers le froid (d'où le signe -).

Finalement en regroupant (4) et (5), on obtient l'équation dite de la chaleur:

$$(6) \quad \rho c(T) \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div}(\lambda(T) \vec{\nabla}T) = 0$$

1.1 Modélisation du transport de la chaleur dans un solide

Si, sur la plage de température considérée, on peut négliger les variations de c et λ , on peut simplifier l'équation (6) et l'écrire sous la forme:

$$(7) \quad \frac{\partial T}{\partial t} - D \operatorname{div}(\vec{\nabla} T) = 0 \quad \text{avec :}$$

$$D = \frac{\lambda}{\rho c} \quad [\text{m}^2\text{s}^{-1}]$$

Par définition de l'opérateur Δ (Laplacien), on a:

Diffusivité thermique du solide

$$\operatorname{div}(\vec{\nabla} T) = \Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

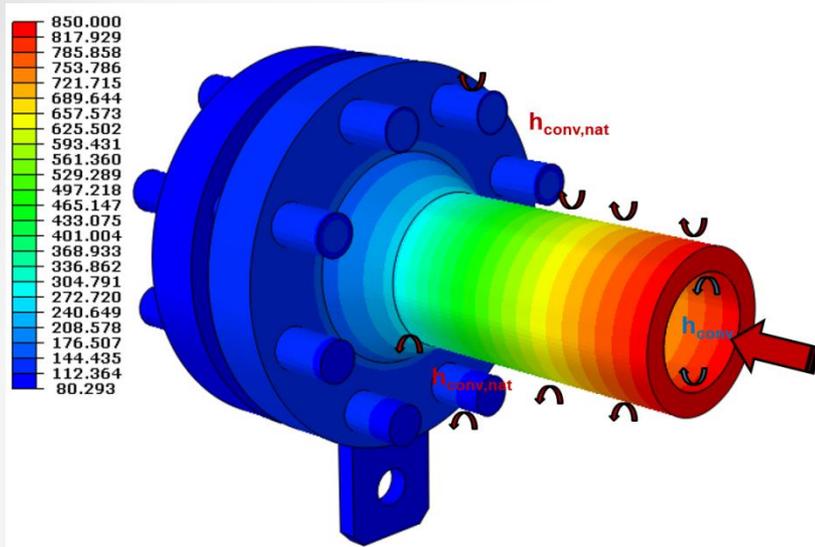
d'où finalement l'équation:

$$(8) \quad \frac{\partial T}{\partial t} - D \Delta T = 0$$

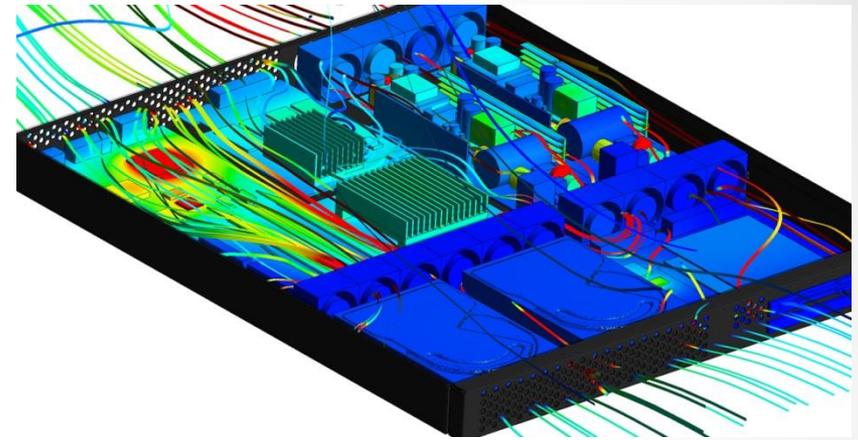
La chaleur se propage d'autant plus vite dans un solide que D est grand. On peut montrer à partir de (8) que la distance caractéristique sur laquelle la chaleur diffuse pendant un temps τ a pour expression $l \approx \sqrt{D\tau}$. Il suffit d'appliquer (8) et d'écrire formellement que:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{\delta T}{\tau} \quad \Delta T \approx \frac{\delta T}{l^2}$$

1.1 Modélisation du transport de la chaleur dans un solide



Simulation numérique (ANSYS) du refroidissement d'une pièce métallique par un flux d'air froid



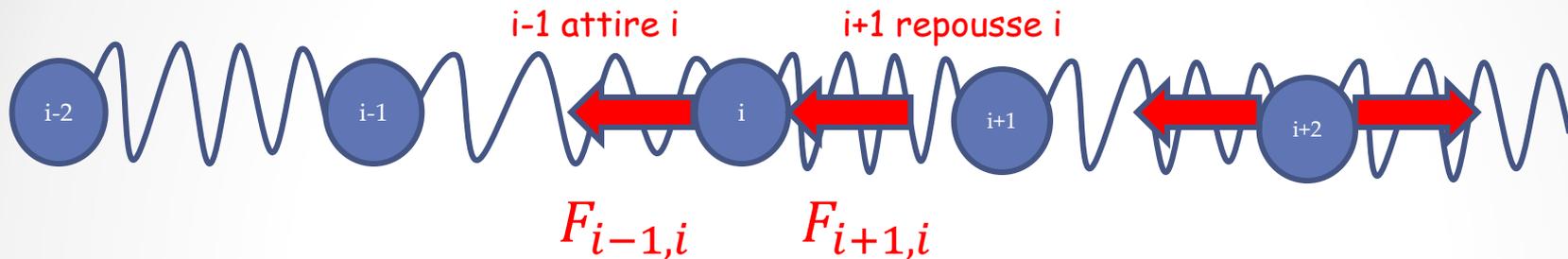
Simulation numérique (ANSYS) du refroidissement d'une carte à puce par un flux d'air froid

Dans les deux cas, la simulation couple la résolution numérique de l'équation de la chaleur dans le solide et dans l'air (voir suite).

1.2 Modélisation de la propagation du son dans un solide

Modèle unidimensionnel

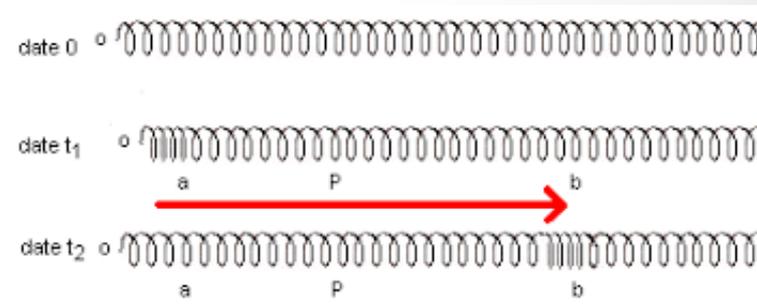
Considérons un chaîne linéaire d'atomes liés entre eux par des forces de rappel d'origine électrique. On peut modéliser cette chaîne par un ensemble de N points matériels de masse m liés entre eux par des ressorts de raideur k .



Contrairement au cas de la chaleur, on s'intéresse à la modélisation du déplacement d'ensemble des atomes le long de la chaîne provoqué par une sollicitation extérieure.

A un instant donné, des atomes de la chaîne sont mis en mouvement à un endroit donné sur la chaîne (en général à une extrémité) et ce mouvement se transmet de proche à tous les atomes par l'intermédiaire des forces électriques liant les atomes entre eux.

L'objectif est de modéliser ce phénomène de propagation.



1.2 Modélisation de la propagation du son dans un solide

Modèle unidimensionnel

- Notons u_i le déplacement de l'atome i par rapport à sa position d'équilibre (en l'absence de la sollicitation).
- **Il est important de noter que u_i est en général très grand devant la distance interatomique moyenne a .** On s'intéresse donc ici à des **vibrations collectives du réseau atomique** (mouvement d'ensemble des atomes), alors que dans le mouvement d'agitation thermique il s'agit de vibrations individuelles non cohérentes et de faible amplitude

La loi de Newton appliquée à l'atome i s'écrit:

$$(1) \quad m \frac{d^2 u_i}{dt^2} = -k(u_i - u_{i-1}) + k(u_{i+1} - u_i)$$

On pose

$$\rho = \frac{m}{a^3} \quad (\text{masse volumique du solide})$$

$$E = \frac{k}{a} \quad (\text{E s'identifie avec le **module d'Young du solide** et peut donc être mesuré facilement par une simple expérience de traction pure})$$

1.2 Modélisation de la propagation du son dans un solide

Modèle unidimensionnel

Avec ces notations, l'équation (1) peut être réécrite sous la forme:

$$(2) \quad \frac{d^2 u_i}{dt^2} - \frac{E}{\rho} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{a^2} = 0$$

On note x_i la position d'équilibre de l'atome i et on pose: $u_i = u(t, x_i)$.
La fonction u est appelée champ de déplacement.

Elle n'est rigoureusement définie qu'aux noeuds x_i . Cependant, à l'échelle macroscopique, la distance interatomique a (de l'ordre de 10^{-10} m) est négligeable et **on peut donc considérer que u est définie pour tout réel x . On dit que le solide est assimilé à un milieu continu.**

L'équation (2) peut donc encore s'écrire sous la forme :

$$(3) \quad \frac{\partial^2 u(t, x_i)}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{u(t, x_{i+1}) - 2u(t, x_i) + u(t, x_{i-1}))}{a^2} = 0$$

1.2 Modélisation de la propagation du son dans un solide

Modèle unidimensionnel

Pour finir, il suffit de noter que:

$$\begin{aligned} & \frac{u(t, x_{i+1}) - 2u(t, x_i) + u(t, x_{i-1}))}{l^2} \\ &= \frac{1}{l} \left[\frac{u(t, x_{i+1}) - u(t, x_i)}{l} - \frac{u(t, x_i) - u(t, x_{i-1}))}{l} \right] \\ &\approx \frac{1}{l} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \left(t, x_{i+\frac{1}{2}} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \left(t, x_{i-\frac{1}{2}} \right) \right] \\ &\approx \frac{\partial^2 u(t, x_i)}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Cette approximation est d'autant plus exacte que a est petit devant l'échelle de longueur Λ caractéristique des variations de u (longueur d'onde), hypothèse toujours largement vérifiée en pratique.

1.2 Modélisation de la propagation du son dans un solide

Modèle unidimensionnel

On en déduit finalement l'équation suivante pour la fonction u

$$(4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

avec par définition :

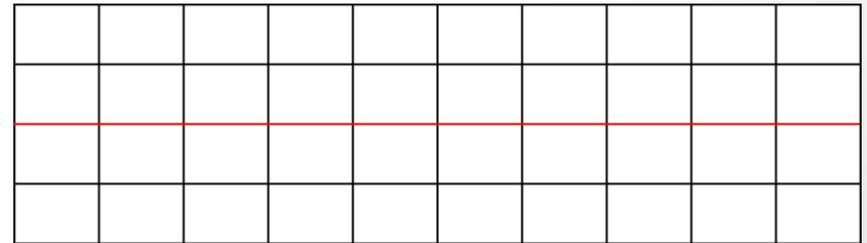
$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

L'équation (4) est appelée équation des ondes (monodimensionnelle). En l'absence de conditions aux limites (chaîne infinie), sa solution générale est de la forme*:

$$u(t, x) = g(x - ct) + f(x + ct)$$

où f et g sont deux fonctions arbitraires (deux fois dérivables par rapport à x et t) dépendant des conditions initiales.

Le premier terme (g) correspond à **une onde se propageant dans le sens des x croissants à la vitesse c** , le second (f) à **une onde se propageant dans le sens des x décroissants à la vitesse $-c$** .



* Il suffit de poser $\theta = x - ct$ et $\mu = x + ct$. Avec ces nouvelles variables l'équation (4) est équivalente à : $\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \mu} = 0$ d'où l'existence de deux fonctions f et g telles que: $u = f(\theta) + g(\mu)$.

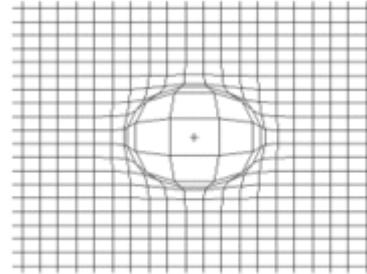
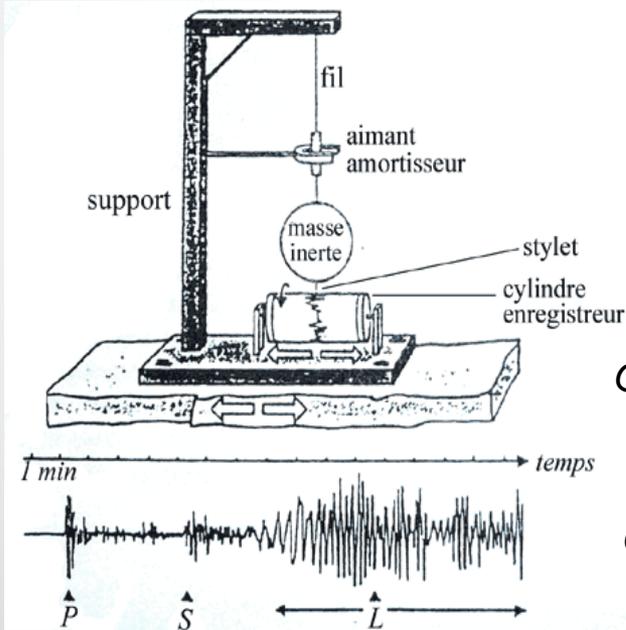
1.2 Modélisation de la propagation du son dans un solide

Généralisation au cas multidimensionnel

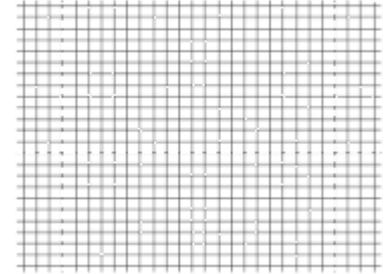
Dans le cas tridimensionnel, l'équation des ondes s'écrit:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0 \quad \text{soit :} \quad (5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0$$

Exemple d'application: modélisation des séismes



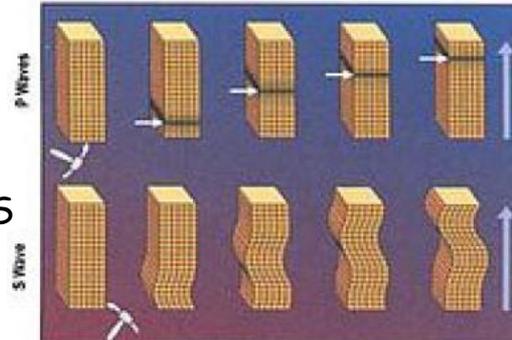
Onde sphérique de type P



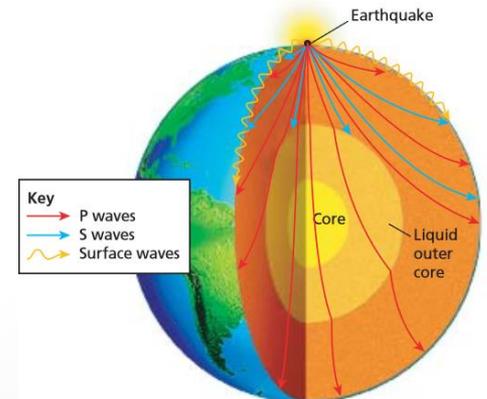
Onde plane de type P

Body Waves

Onde P



Onde S

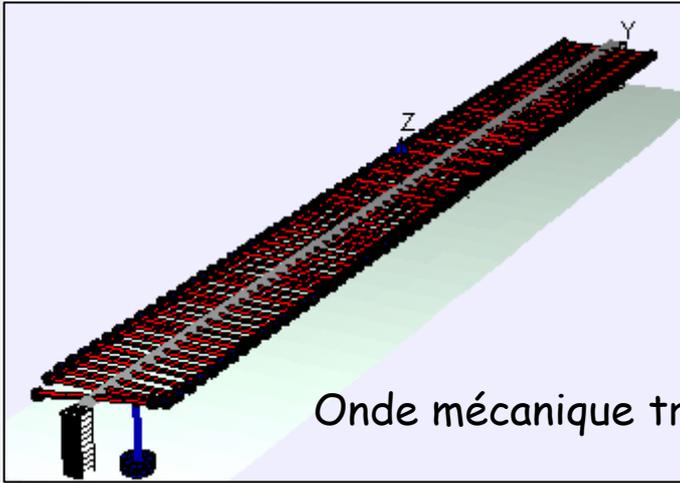


Key
 → P waves
 → S waves
 ~ Surface waves

1.2 Modélisation de la propagation du son dans un solide

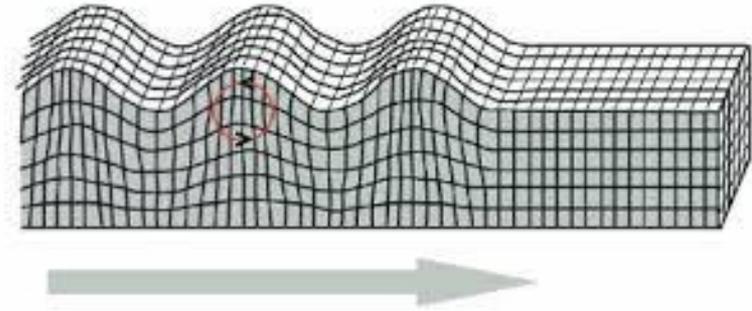
Autres exemples d'ondes

La machine à onde de John Shive



Onde mécanique transversale

Rayleigh Wave



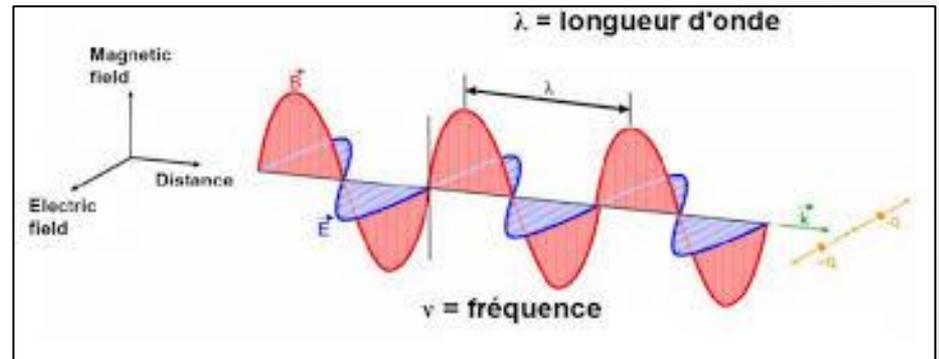
Onde mécanique de surface

Propagation d'une onde sonore plane



Onde acoustique dans l'air

<https://www.youtube.com/watch?v=6dIqCQ-WA10>



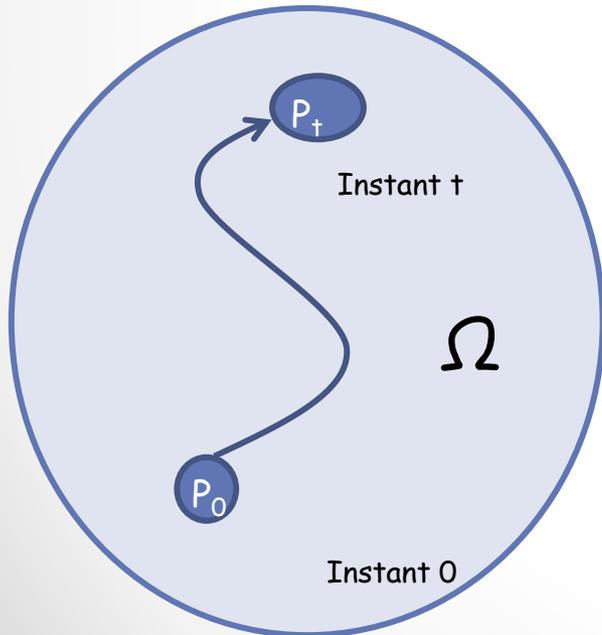
Onde électromagnétique plane

Les champs électrique et magnétique oscillent dans des plan orthogonaux à la direction de propagation.

1.3 Transport d'un polluant dans un fluide

Cas avec convection pure

- On considère un fluide en mouvement occupant un domaine Ω de l'espace. On suppose connue sa vitesse $\vec{V}(t, \mathbf{x})$ en tout point et à tout instant.
- **On souhaite modéliser le transport d'un polluant par le fluide** en admettant que le polluant se déplace localement exactement à la même vitesse que le fluide.
- On note $y(t, \mathbf{x})$ la fraction massique de polluant au point \mathbf{x} à l'instant t . Pour obtenir l'équation vérifiée par y , on écrit l'équation traduisant la conservation de la masse du polluant sur toute sous-partie P du fluide, occupant le domaine P_t à l'instant t :



$$\frac{d}{dt} \int_{P_t} \rho(t, \mathbf{x}) y(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$$

d'où en supposant que le polluant se déplace à la même vitesse que le fluide :

$$\int_{P_t} \frac{\partial \rho y}{\partial t} d\mathbf{x} + \int_{\partial P_t} \rho y \vec{V} \cdot \vec{n} dA = 0$$

d'où en utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\int_{P_t} \left[\frac{\partial \rho y}{\partial t} + \text{div} (\rho y \vec{V}) \right] d\mathbf{x} = 0$$

1.3 Transport d'un polluant dans un fluide

Cas avec convection pure

En utilisant une nouvelle fois le fait que P_t est arbitraire, on obtient finalement l'edp suivante:

$$(1) \quad \frac{\partial \rho y}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho y \vec{V}) = 0$$

Par ailleurs, en appliquant le même raisonnement pour la conservation de la masse du fluide, on peut également établir l'équation :

$$(2) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{V}) = 0$$

En combinant l'équation (1) avec l'équation (2), on obtient finalement l'équation fondamentale suivante pour la fonction y :

$$(3) \quad \frac{\partial y}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} y = 0$$

Cette équation modélise le transport d'un traceur passif à la vitesse du fluide.

1.3 Transport d'un polluant dans un fluide

Cas avec convection & diffusion

On reprend le même problème mais **on distingue cette fois que la vitesse du polluant** (c'est-à-dire la vitesse moyenne locale des molécules de polluant), que l'on note \vec{V}_p , **de celle du fluide**.

En reprenant exactement les mêmes arguments que précédemment, on trouve cette fois l'équation suivante:

$$(4) \quad \frac{\partial \rho y}{\partial t} + \text{div}(\rho y \vec{V}_p) = 0 \quad \text{avec:} \quad \vec{V}_p = \vec{V} + \delta \vec{V}$$

$\delta \vec{V}$ s'appelle **vitesse de diffusion du polluant**. Elle est liée au mouvement d'agitation désordonné des molécules au sein du fluide.

Pour fermer le modèle (4), il faut utiliser une relation semi-empirique permettant de relier $\delta \vec{V}$ à $\vec{\nabla} y$. Le modèle le plus souvent utilisé est la loi de Fick:

$$\delta \vec{V} = -D \vec{\nabla} \ln(y) = -D \frac{\vec{\nabla} y}{y}$$

D est appelé **coefficient diffusion** du polluant dans le fluide (il dépend à la fois de la nature du polluant et du fluide considéré)

1.3 Transport d'un polluant dans un fluide

Cas avec convection & diffusion

On obtient donc l'équation suivante:

$$\frac{\partial \rho y}{\partial t} + \text{div} (\rho y \vec{V}) - \text{div} (\rho D \vec{\nabla} y) = 0$$

En combinant cette équation avec l'équation (2) exprimant la conservation de la masse du fluide, on obtient finalement :

$$(5) \quad \rho \frac{\partial y}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \vec{\nabla} y - \text{div} (\rho D \vec{\nabla} y) = 0$$

Cette équation est appelée **équation de convection-diffusion**.

On peut également tenir compte de termes source ou puit modélisant par exemple l'émission du polluant, son dépôt sur des surfaces, des réactions chimiques entre le polluant et d'autres espèces chimiques du fluide. On obtient alors un modèle de la forme:

$$(6) \quad \rho \frac{\partial y}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \vec{\nabla} y - \text{div} (\rho D \vec{\nabla} y) = R(y)$$

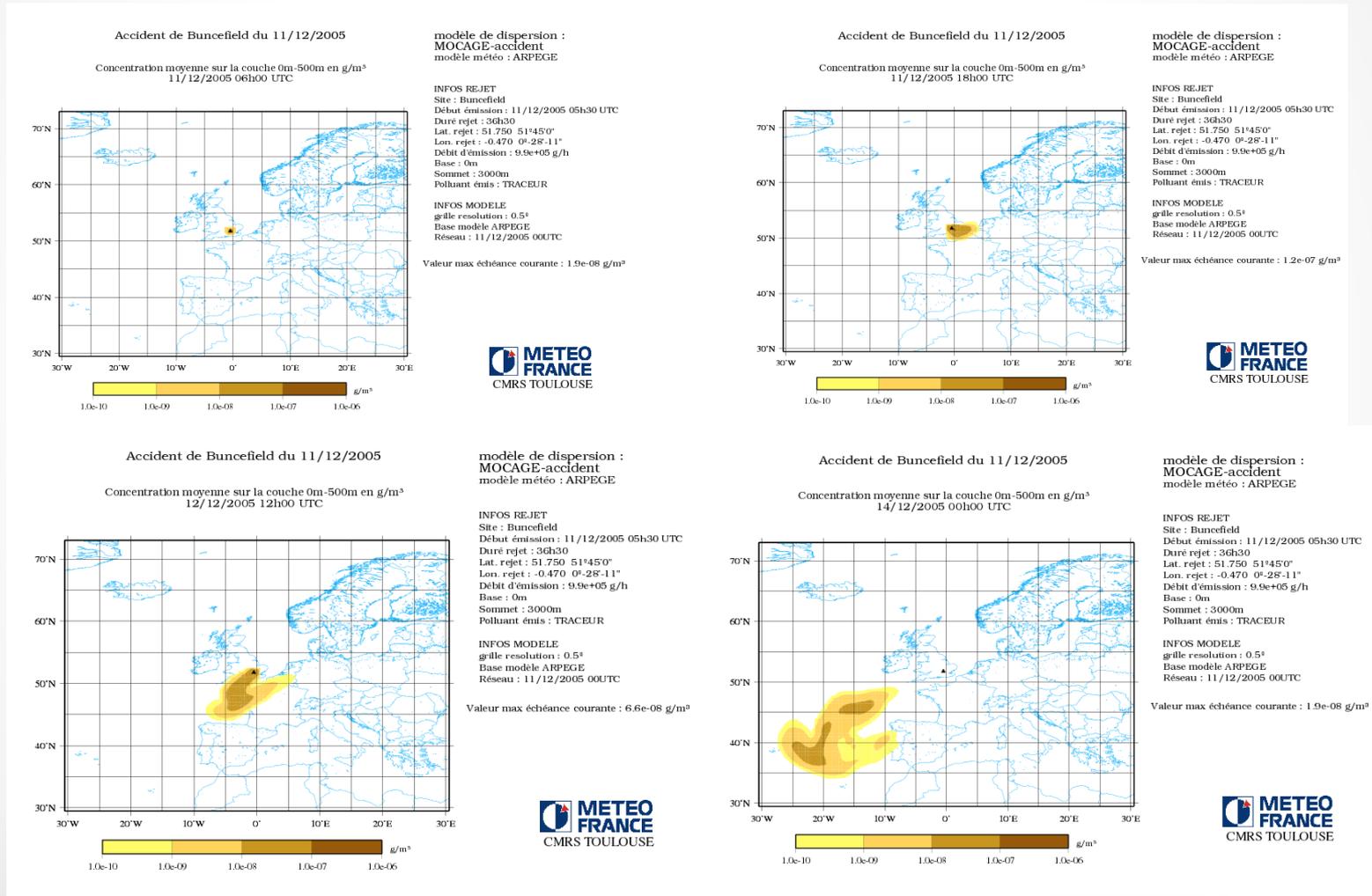
où R modélise le taux volumique de production (de disparition si $R < 0$) du polluant.

x

1.3 Transport d'un polluant dans un fluide

Exemple d'application

Modélisation de la dispersion d'un polluant dans l'atmosphère suite à un accident



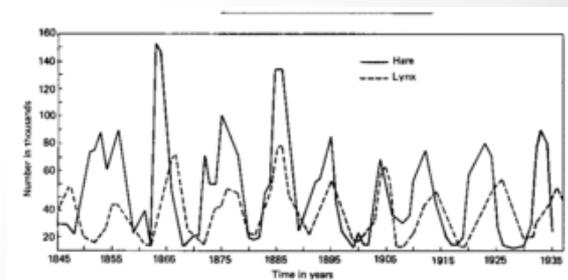
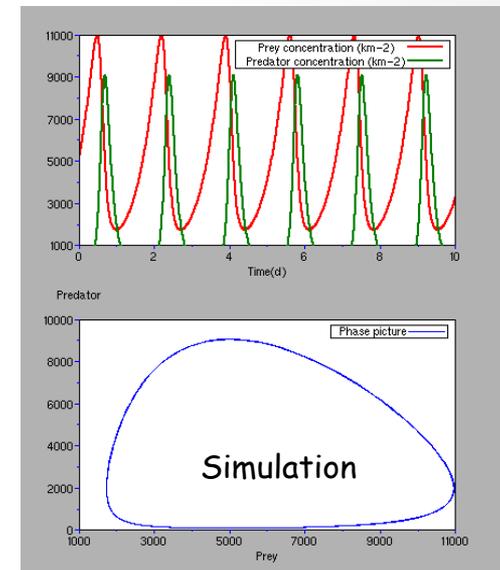
Plan

1. Exemples de modèles basés sur une edp
 - ✓ Conduction de la chaleur dans un solide
 - ✓ Propagation des ondes acoustiques dans un solide
 - ✓ Transport d'un polluant dans un fluide
2. Exemples de modèles basés sur un système d'edp
 - ✓ Modèle de réaction-diffusion en dynamique des populations
 - ✓ Equations de la mécanique des milieux continus
 - ✓ Equations de Maxwell

2.1 Modèle de Dynamique des populations

Modèle prédateurs - proies

- **Modèle de Lotka-Volterra (1926)**
- Deux espèces sur le même territoire : une herbivore, une carnivore. Exemple : lapins et lynx dans le nord du Canada.
- R = nombre de lapins, F = nombre de lynx (normalisés)
- Le modèle de LV est un modèle dynamique en temps continu à 4 paramètres (que l'on doit déterminer à partir de données d'observation)



Données du Canada entre 1845 et 1935

$$(LV) \begin{cases} \dot{R} = r_1 R (1 - R - a_1 F) \\ \dot{F} = r_2 R (1 - F + a_2 R) \end{cases}$$

2.1 Modèle de Dynamique des populations

Prise en compte de la répartition spatiale

- Le modèle de Lotka-Volterra ne tient pas compte de la distribution spatiale des populations.
- On peut complexifier le modèle en considérant R et F comme des fonctions du temps **et de l'espace** représentant des **nombre d'individus par unité de surface**.
- On peut (en première approximation) modéliser les mouvements de population comme des phénomènes de diffusion isotrope (hypothèse sous-jacente de mouvements aléatoires à petite échelle).
- On obtient alors un **modèle de réaction – diffusion**.

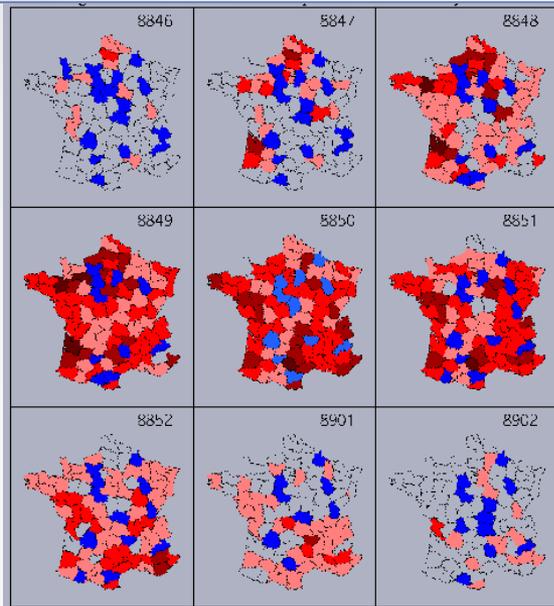


Ronald Fisher (1890-1962)

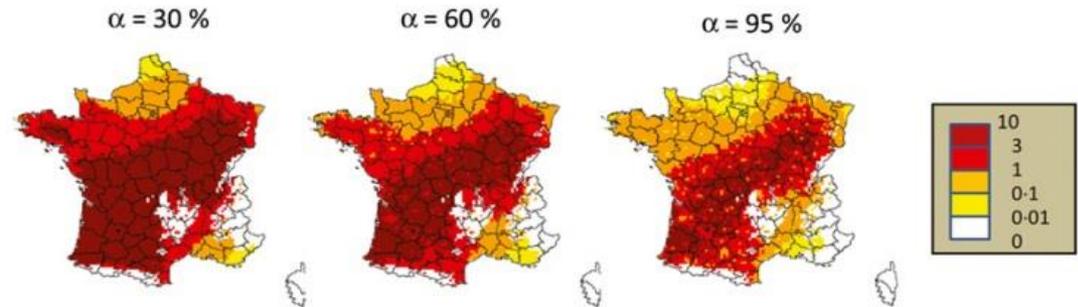
$$(RD) \begin{cases} \partial_t R - D_1 \Delta R = r_1 R (1 - R - a_1 F) \\ \partial_t F - D_2 \Delta F = r_2 R (1 - F + a_2 R) \end{cases}$$

2.1 Modèle de Dynamique des populations

Modèles de réaction-diffusion



Propagation et extinction d'une épidémie de grippe



Modélisation de la propagation du frelon asiatique en France pour trois valeurs différentes d'un paramètre du modèle rendant compte de l'influence des mesures de contrôle humaines sur la propagation.

Référence: Robinet, C., Suppo, C., & Darrouzet, E. (2016). Rapid spread of the invasive yellow-legged hornet in France: the role of human-mediated dispersal and the effects of control measures. *Journal of Applied Ecology*. <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/1365-2664.12724/full>

- Ces modèles peuvent être utilisés pour simuler la croissance forestière, l'invasion d'un territoire par une nouvelle espèce, la propagation d'une épidémie ...
- La principale difficulté est l'identification des paramètres et la prise en compte de leurs variations dans le temps et l'espace → Assimilation de données
- Ces modèles, même très simples, peuvent permettre d'expliquer l'apparition spontanée de formes observées dans le monde vivant (par exemple les rayures d'un zèbre).

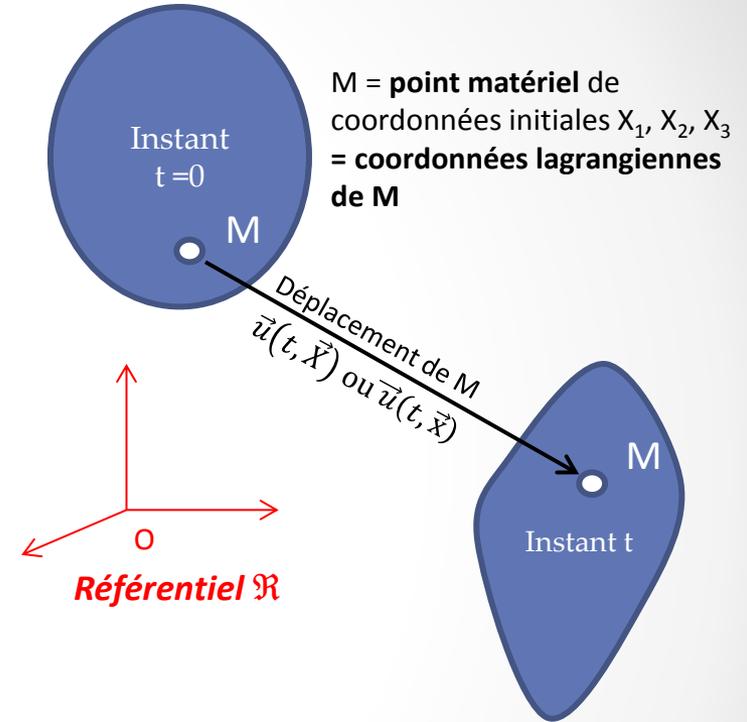
References: **A. Turing**. *The chemical basis of morphogenesis*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. B 1952 **237**, 37-72. & **J.D. Murray**. *Mathematical Biology*, tomes 1 et 2, Interdisciplinary applied mathematics, Springer (1989).

2.2 Equations de la mécanique des milieux continus

Cas général

- On souhaite modéliser le mouvement d'un fluide ou d'un solide (le *système*) constitué d'un très grand nombre de particules élémentaires (typiquement de l'ordre de 10^{20} à 10^{30}).
- La distance inter-particulaire moyenne étant en général très petites devant les dimensions macroscopiques du système, on peut assimiler celui-ci à un « **milieu continu** »
- On peut donc parler en chaque point **M** du système de la **vitesse au point M**, de la **masse volumique au point M**, du **déplacement au point M** (par rapport à une configuration de référence), etc.
- Un modèle mécanique du système est un ensemble d'équations aux dérivées partielles couplées permettant de prévoir vitesse, masse volumique, déplacement, contraintes ... en chaque point et à chaque instant et leur (éventuel) état stationnaire c'est-à-dire leur valeur asymptotique pour $t \rightarrow +\infty$.

Configuration initiale (ou de référence)



Configuration "actuelle"

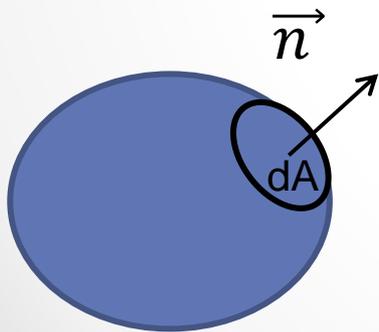
Coordonnées de M = x_1, x_2, x_3 = **coordonnées eulériennes** de M

2.2 Equations de la mécanique des milieux continus

Cas général

Considérons le mouvement d'une sous-partie **P** du milieu continu étudié, qui à l'instant initial occupe le domaine P_0 et à l'instant t le domaine P_t , et appliquons le principe fondamental de la dynamique :

$$(1) \quad \underbrace{\frac{d}{dt} \int_{P_t} \rho \vec{V} dx}_{\text{Quantité de mouvement}} = \underbrace{\int_{\partial P_t} \vec{\sigma} dA}_{\text{Forces surfaciques exercées par le reste du système}} + \underbrace{\int_{P_t} \rho \vec{f}_{ext} dx}_{\text{Forces volumique d'origine externe au système (exemple : gravité)}}$$



- $\vec{\sigma} dA$ est la force exercée à travers la surface élémentaire dA par les particules du système situées à l'extérieur de P_t sur les particules situées à l'intérieur de P_t
- $\vec{\sigma}(M)$ est appelé (vecteur) **contrainte** au point M . C'est une force par unité de surface. Unité = Pa ou $N m^{-2}$
- $\vec{\sigma} = \Sigma \vec{n}$ où Σ désigne le **tenseur des contraintes**

2.2 Equations de la mécanique des milieux continus

Cas général

En projetant sur chacun des axes de coordonnées du référentiel et en exprimant $\rho, \vec{v}, \vec{\sigma}$... comme des fonctions des coordonnées eulériennes et du temps, on déduit de (1) que :

$$\int_{P_t} \frac{\partial \rho V_i}{\partial t} dx + \int_{\partial P_t} \rho V_i \vec{V} \cdot \vec{n} dA = \int_{\partial P_t} \sum_{j=1..3} \Sigma_{ij} n_j dA + \int_{P_t} \rho f_{ext_i} dx$$

qui en appliquant le théorème de Green-Ostrogradsky donne :

$$\int_{P_t} \left(\frac{\partial \rho V_i}{\partial t} + \sum_{j=1..3} \frac{\partial \rho V_j V_i}{\partial x_j} - \sum_{j=1..3} \frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial x_j} - \rho f_{ext_i} \right) dx = 0$$

d'où le système d'edp :

$$(2) \quad \frac{\partial \rho V_i}{\partial t} + \sum_{j=1..3} \frac{\partial \rho V_j V_i}{\partial x_j} - \sum_{j=1..3} \frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial x_j} - \rho f_{ext_i} = 0, \quad \text{pour } i = 1, 2, 3$$

2.2 Equations de la mécanique des milieux continus

Cas général

Par ailleurs la conservation de la masse contenue dans P se traduit par l'équation:

$$\frac{d}{dt} \int_{P_t} \rho \, dx = 0$$

ce qui conduit à l'edp (déjà vue plus haut) : (3) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{j=1..3} \frac{\partial \rho V_j}{\partial x_j} = 0$

En combinant (2) et (3), on peut remplacer (2) par le système d'équations suivant:

$$(4) \quad \rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + \rho V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \sum_{j=1..3} \frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial x_j} - \rho f_{ext_i} = 0, \quad \text{pour } i = 1,2,3$$

que l'on peut encore écrire sous la forme vectorielle suivante:

$$(5) \quad \rho \vec{\gamma} = \overline{\text{div}(\vec{\Sigma})} + \rho \vec{f}_{ext}$$

avec

$$\vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}$$

Vecteur accélération

(5) correspond à la généralisation de la **loi fondamentale de la dynamique pour les milieux continus matériels (solide ou fluide)**.

2.2 Equations de la mécanique des milieux continus

Cas général

Milieu continu

Conservation
de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0$$

Accélération

$$\vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$$

(exprimée en fonction des coordonnées eulériennes)

Loi fondamentale
de la dynamique

$$\rho \vec{\gamma} = \overline{\operatorname{div}(\boldsymbol{\Sigma})} + \rho \vec{f}_{ext}$$

Loi fondamentale
de la statique

$$\overline{\operatorname{div}(\boldsymbol{\Sigma})} + \rho \vec{f}_{ext} = \vec{0}$$

Point matériel

$$m = \text{Cste}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}_G}{dt}$$

$$m \vec{\gamma} = \sum \vec{F}_{ext}$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

2.2 Equations de la mécanique des milieux continus

Cas des solides déformables

- On note $\vec{u}(t, X) = \mathbf{x} - \mathbf{X}$ le déplacement à l'instant t du point matériel M de coordonnées lagrangiennes X_j et eulériennes x_j .
- Les solides (contrairement aux fluides) étant rigides et en général fixés sur une partie de leur frontière, **les déplacements au sein du solide sont le plus souvent très petits devant l'échelle de longueur caractéristique L du solide**. On dit qu'on se place dans le cadre de l'hypothèse des petits déplacements : $\|\vec{u}\| \sim l \ll L$. On ajoute généralement à cette hypothèse celle **des petites déformations** : $\left| \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right| \ll 1$.
- Sous ces hypothèses, **on peut confondre les coordonnées lagrangiennes X_j et eulériennes x_j** et exprimer tous les champs indifféremment comme des fonctions de t, X ou de t, x
- Les expressions de la vitesse et de l'accélération (exprimées en fonction des variables eulériennes) se simplifient fortement :

$$\vec{V}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + [\vec{V}(t, \mathbf{x}) \cdot \vec{\nabla}] \vec{u}(t, \mathbf{x}) \approx \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(t, \mathbf{x})$$

$$\vec{\gamma}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + [\vec{V}(t, \mathbf{x}) \cdot \vec{\nabla}] \vec{V}(t, \mathbf{x}) \approx \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) \approx \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}(t, \mathbf{x})$$

2.2 Equations de la mécanique des milieux continus

Cas des solides déformables

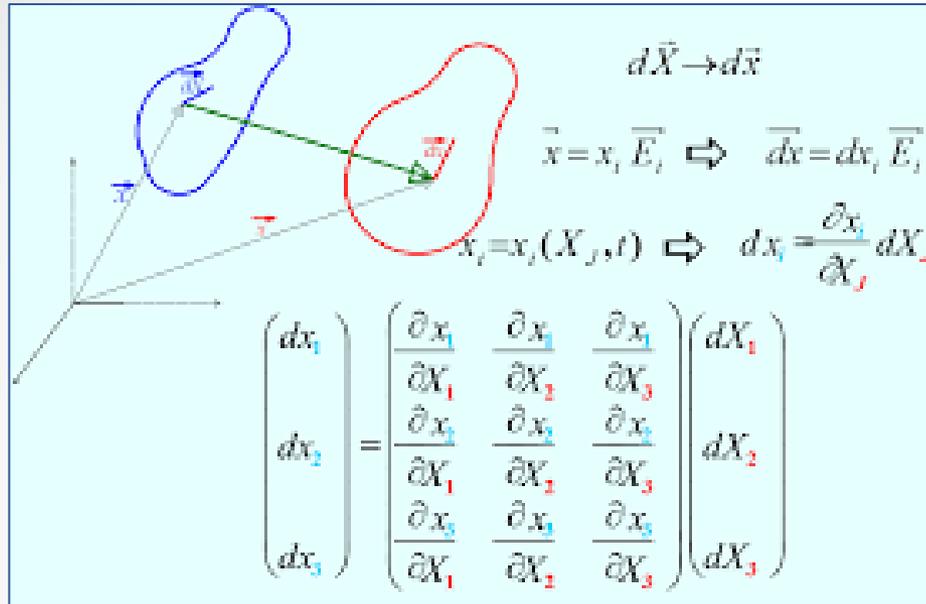
Dans ce cadre, l'équation fondamentale de la dynamique des solides déformables s'écrit donc :

$$(6) \quad \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \overline{\text{div}}(\vec{\Sigma}) + \rho \vec{f}_{ext}$$

- Dans la plupart des cas, on peut négliger dans cette équation l'influence des variations de masse volumique (hypothèse des petites déformations)
- Cependant (6) ne constitue pas un système fermé puisqu'il comporte 3 équations et 9 inconnues : les u_i et les Σ_{ij} (le tenseur Σ est symétrique)
- Pour fermer (6), il faut se donner la **loi de comportement du solide**, c'est-à-dire la relation entre le tenseur des contraintes Σ et le champ de déplacement \vec{u} . Pour cela, il est nécessaire d'introduire un nouveau tenseur appelé **tenseur des déformations**

2.2 Equations de la mécanique des milieux continus

Cas des solides déformables



- Déformation \rightarrow variation de distance entre deux points matériels
- La fibre élémentaire \overrightarrow{dX} dans la configuration de référence devient la fibre \overrightarrow{dx} dans la configuration actuelle
- Déformation $\rightarrow \|\overrightarrow{dX}\| \neq \|\overrightarrow{dx}\|$

$$\|\overrightarrow{dx}\|^2 = \|\overrightarrow{dX} + \nabla \vec{u} \cdot \overrightarrow{dX}\|^2 = {}^t(\overrightarrow{dX} + \nabla \vec{u} \cdot \overrightarrow{dX}) \cdot (\overrightarrow{dX} + \nabla \vec{u} \cdot \overrightarrow{dX})$$

$$\Rightarrow \|\overrightarrow{dx}\|^2 - \|\overrightarrow{dX}\|^2 \approx {}^t \overrightarrow{dX} \cdot ({}^t \nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}) \cdot \overrightarrow{dX}$$

2.2 Equations de la mécanique des milieux continus

Cas des solides déformables élastiques

- Les déformations dans le solide sont donc caractérisées par le tenseur :

$$\boldsymbol{\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} ({}^t \nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}) \quad \text{c-à-d} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j)$$

- La variation de longueur d'une fibre est reliée à $\boldsymbol{\varepsilon}$ par:

$$\|\vec{dx}\| = \left(1 + 2 \frac{{}^t \vec{dX}}{\|\vec{dX}\|} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \frac{\vec{dX}}{\|\vec{dX}\|} \right)^{1/2} \|\vec{dX}\| \approx \|\vec{dX}\| + \underbrace{{}^t \vec{dX} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{dX}}_{\text{Variation de longueur}}$$

- La loi de comportement d'un solide élastique est appelée **loi de Hooke**. Elle s'écrit :

$$\boldsymbol{\Sigma} = 2 \mu \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} \quad \text{c-à-d} \quad \Sigma_{ij} = 2 \mu \varepsilon_{ij} + \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \delta_{ij}$$

- λ, μ sont des constantes (en Pa) caractéristiques du matériau considéré, appelées **coefficients de Lamé**. μ est parfois noté G et s'appelle également module de cisaillement du matériau.

2.2 Equations de la mécanique des milieux continus

Cas des solides déformables élastiques

- Finalement le système d'edp modélisant les **mouvements de faible amplitude d'un solide élastique** s'écrit donc :

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \overrightarrow{\operatorname{div}({}^t \nabla \vec{u} + \nabla \vec{u})} + \lambda \vec{\nabla}(\operatorname{div}(\vec{u})) + \rho \vec{f}_{ext}$$

- Ce système est appelé **système des équations de l'élastodynamique**.
- Si le solide est au repos il donne les **équations dites de l'élasticité**, très utilisées dans le domaine du génie civil, des constructions métalliques, de l'aéronautique ...

$$\overrightarrow{\operatorname{div}({}^t \nabla \vec{u} + \nabla \vec{u})} + \lambda \vec{\nabla}(\operatorname{div}(\vec{u})) + \rho \vec{f}_{ext} = \vec{0}$$

2.2 Equations de la mécanique des milieux continus

Equations de Navier-Stokes pour les fluides incompressibles

- On a montré que l'edp traduisant la conservation de la masse dans un milieu continu en mouvement s'écrit:

$$(7) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0$$

- Pour un fluide incompressible, ρ est constant et (1) implique donc:

$$(8) \quad \operatorname{div}(\vec{V}) = 0$$

- D'autre part, on a vu que pour milieu continu en mouvement, la loi fondamentale de la dynamique s'écrit:

$$(9) \quad \rho \vec{\gamma} = \overline{\operatorname{div}(\Sigma)} + \rho \vec{f}_{ext}$$

avec Σ le tenseur des contraintes et \vec{f}_{ext} la densité massique de forces extérieures.

2.2 Equations de la mécanique des milieux continus

Equations de Navier-Stokes pour les fluides incompressibles

- **Pour un fluide**, les déplacements et les déformations ne peuvent pas être supposés “petits”, **on ne peut donc pas confondre coordonnées lagrangiennes et eulérienne**.
- On doit utiliser **l'expression exacte de l'accélération** (dérivée de la vitesse par rapport à t à X constant et non à x constant) :

$$\vec{\gamma}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}(t, \mathbf{x})$$

- Il faut également se donner la **loi de comportement du fluide**, qui est bien sûr différente de celle d'un solide élastique. On a pour un fluide:

$$(10) \quad \Sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij}$$

Pression statique

Tenseur des contraintes de viscosité (fonction du champ de vitesse et non du champ de déplacement)

2.2 Equations de la mécanique des milieux continus

Equations de Navier-Stokes pour les fluides incompressibles

- Pour la plupart des fluides courants (eau, air, huile ...) la loi de comportement donnant le tenseur des contraintes de viscosité en fonction des dérivées du champ de vitesse est linéaire et s'écrit :

$$(11) \quad \tau = 2 \mu \dot{\epsilon} + \mu' \operatorname{tr}(\dot{\epsilon}) \mathbf{I} \quad \text{avec} \quad \dot{\epsilon}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (\partial_j V_i + \partial_i V_j)$$

- μ et μ' sont des constantes (en toute rigueur des fonctions de la température) appelés coefficients de viscosité du fluide. μ est appelé viscosité dynamique et μ' second coefficient de viscosité (il ne joue un rôle que pour les fluides compressibles puisque $\operatorname{tr}(\dot{\epsilon}) = \operatorname{div}(\vec{V}) = 0$ pour les fluides incompressibles).
- En combinant (8), (9), (10) et (11), on obtient finalement le système suivant appelé système des équations de Navier-Stokes, d'inconnues p et \vec{V} :

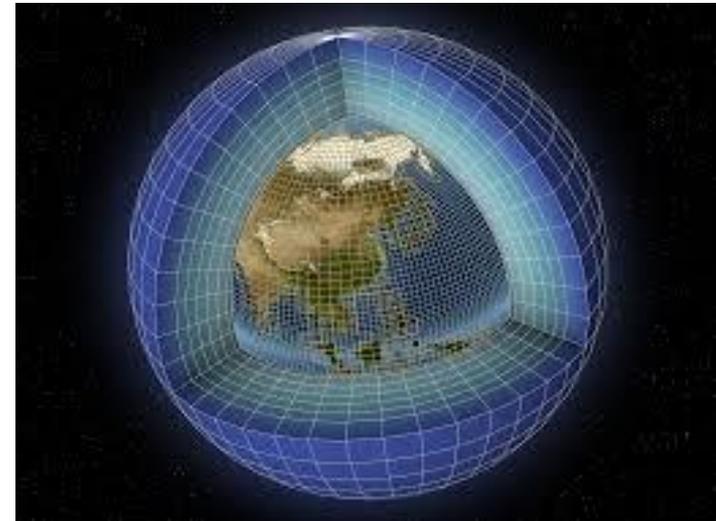
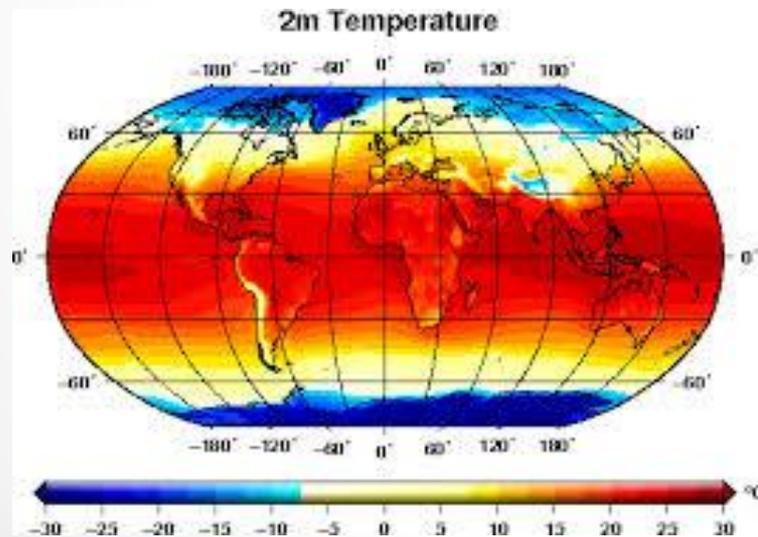
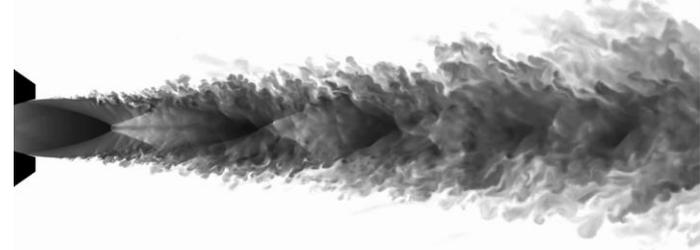
$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{V}) &= 0 \\ \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \nabla p - \mu \Delta \vec{V} &= \rho \vec{f}_{ext} \end{aligned}$$

2.2 Equations de la mécanique des milieux continus

Exemples d'application de mécanique des fluides numérique



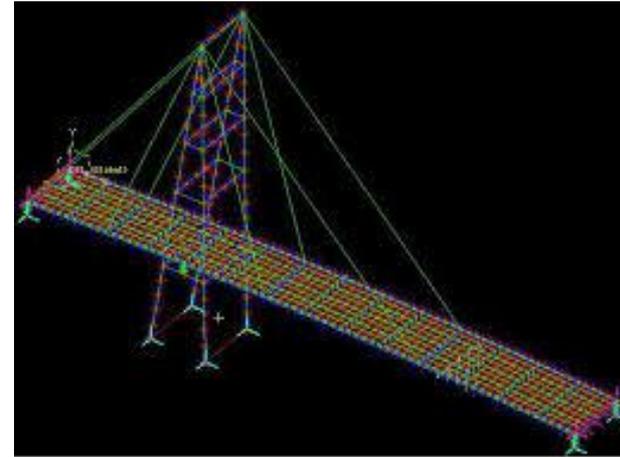
Simulation instationnaire d'un jet supersonique turbulent (code CEDRE de l'ONERA)



Maillage de l'atmosphère pour un modèle numérique de climat

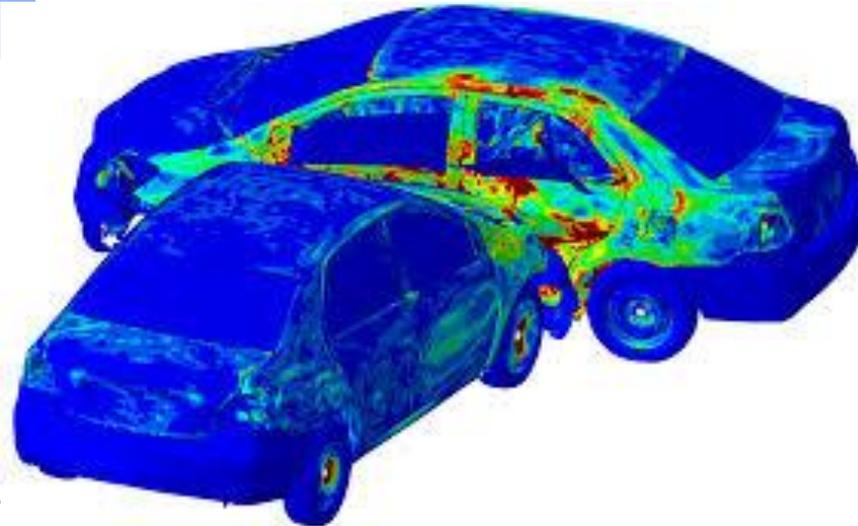
2.2 Equations de la mécanique des milieux continus

Exemples d'application de mécanique des solides numérique



Modèle EF d'un pont suspendu
(petites déformations)

Modèle EF d'un choc entre
deux véhicules (solide en
grandes déformations)



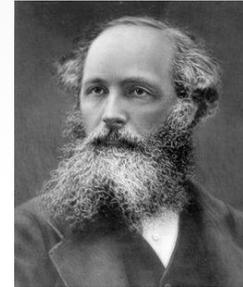
2.3 Equations des phénomènes électromagnétiques

Forme générale des équations de Maxwell - Lorentz

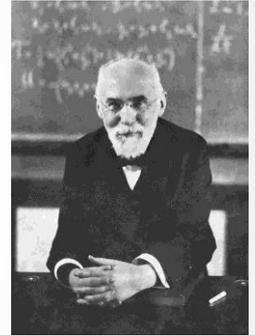
- Les équations fondamentales du champ électromagnétique ont été établies au 19ème siècle par J.C. Maxwell et H.A. Lorentz. Elles s'écrivent avec des notations modernes :

$$(E) \begin{cases} \operatorname{div}(\vec{D}) = \rho \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{H}) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$



James Clerk Maxwell
(1831 – 1879)



Hendrik Antoon Lorentz
(1853 - 1928)

où par définition :

- ✓ \vec{D} [C m⁻²] désigne l'induction électrique.
 - ✓ \vec{E} [V m⁻¹] désigne le champ électrique.
 - ✓ \vec{B} [T] désigne l'induction magnétique.
 - ✓ \vec{H} [A m⁻¹] désigne le champ magnétique.
 - ✓ ρ [C m⁻³] désigne la densité volumique de charges électriques libres
 - ✓ \vec{j} [C m⁻² s⁻¹] désigne le vecteur densité volumique de courant électrique dû au déplacement des charges libres.
- Lorsque les courants et les charges sont donnés, pour fermer le système (E)-(B) il faut se donner une **relation de fermeture entre les inductions et les champs.**

2.3 Equations des phénomènes électromagnétiques

Relation de fermeture pour l'induction électrique

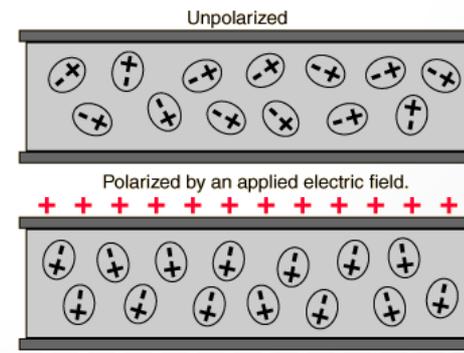
- **Dans le vide** la relation de fermeture pour l'induction électrique s'écrit simplement :
(1) $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$, où ε_0 est une constante appelée permittivité électrique du vide. C'est cette même constante qui apparaît dans la loi de Coulomb donnant la force exercée entre deux charges statiques :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \vec{e}_r$$

- **Dans la matière**, il faut tenir compte du déplacement relatif des charges liées (électrons et protons dans les atomes) induit par l'effet du champ électrique \vec{E} . **Ce déplacement entraîne la création de dipôles microscopiques qui collectivement produisent un champ électrique induit se superposant au champ électrique inducteur.** Cet effet peut être pris en compte en introduisant **le vecteur polarisation \vec{P}** (densité volumique de moments dipolaires) et en remplaçant (1) par : (2) $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$. Le modèle le plus simple consiste à supposer que \vec{P} et \vec{E} **sont simplement proportionnels**. On a donc au final une relation de la forme :

$$(3) \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

- ε est appelée **permittivité diélectrique** du milieu



2.3 Equations des phénomènes électromagnétiques

Relation de fermeture pour l'induction magnétique

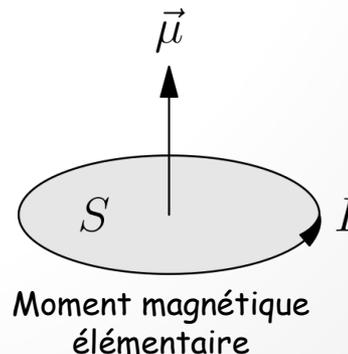
- **Dans le vide** la relation de fermeture pour l'induction magnétique s'écrit : (1) $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, où μ_0 est une constante appelée perméabilité magnétique du vide. C'est cette même constante qui apparaît dans la loi de donnant la force par unité de longueur exercée entre deux fils parallèles infinis parcourus par des courants d'intensité i et i' :

$$\vec{f} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i i'}{r}$$

- **Dans la matière**, il faut tenir compte de l'aimantation induite par l'effet du champ magnétique sur les électrons liés (moments magnétiques induits). Cet effet collectif est pris en compte à travers un nouveau champ \vec{M} appelé aimantation (égal à la densité volumique de moments magnétiques) et en remplaçant (4) par : (5) $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}$.
- Là encore Le modèle le plus simple consiste à supposer que \vec{M} et \vec{H} **sont simplement proportionnels**. On a donc au final une relation de la forme :

$$(6) \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

- μ est appelée **perméabilité magnétique** du milieu.



2.3 Equations des phénomènes électromagnétiques

Autre forme des équations de Maxwell

- Finalement, en l'absence de charges libres et de courants associés, les équations de Maxwell-Lorentz dans un milieu homogène de permittivité diélectrique et de perméabilité magnétique constantes peuvent donc s'écrire:

$$(ML) \quad \begin{cases} \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \overrightarrow{rot}(\vec{H}) = \vec{0} \\ \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \vec{0} \end{cases}$$

- Si on suppose qu'à l'instant initial, les champs \vec{D} et \vec{B} sont à divergence nulle, le système (ML) entraîne qu'ils le restent à tout instant ultérieur. En effet, en prenant la divergence des deux équations de (ML), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{div}(\vec{D}) = 0 \quad \& \quad \frac{\partial}{\partial t} \text{div}(\vec{B}) = 0$$

- (ML) est donc suffisant pour calculer numériquement l'évolution du champ électromagnétique, par une méthode d'éléments finis par exemple.

2.3 Equations des phénomènes électromagnétiques

Ondes électromagnétiques

En appliquant l'opérateur rotationnel à la seconde équation de (ML) on obtient :

$$\mu \frac{\partial \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{H})}{\partial t} + \overrightarrow{\text{rot}}[\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})] = \vec{0}$$

Or : $\overrightarrow{\text{rot}}[\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})] = \vec{\nabla}(\text{div}(\vec{E})) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$, d'où :

$$\varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \Delta \vec{E} = \vec{0}$$

On reconnaît l'équation (vectorielle) des ondes, avec pour célérité : $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$

De même, on montre que le champ magnétique vérifie aussi l'équation :

$$\varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \Delta \vec{H} = \vec{0}$$

2.3 Equations des phénomènes électromagnétiques

Phénomènes électrostatiques et magnéostatiques

Considérons maintenant le cas où les champs électriques et magnétiques ne dépendent pas du temps. Dans ce cas les systèmes (E) et (B) se découplent et les deux champs sont alors indépendants l'un de l'autre.

$$(E) \begin{cases} \operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E}) = \vec{0} \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{B}) = \mu \vec{j} \end{cases}$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \\ \vec{E} = -\overrightarrow{\nabla}\varphi \end{cases}$$

φ est appelé **potentiel électrique** (défini à une constante près).

L'équation vérifiée par φ est appelée équation de Poisson.

$$(B) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta\vec{A} = -\mu \vec{j} \\ \vec{B} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{A}) \end{cases}$$

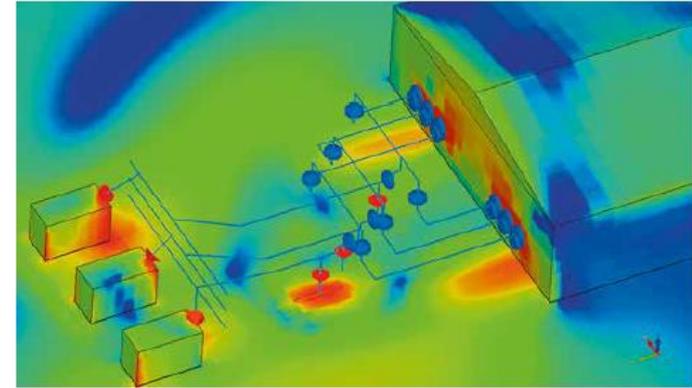
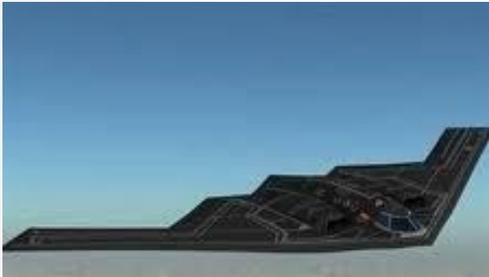
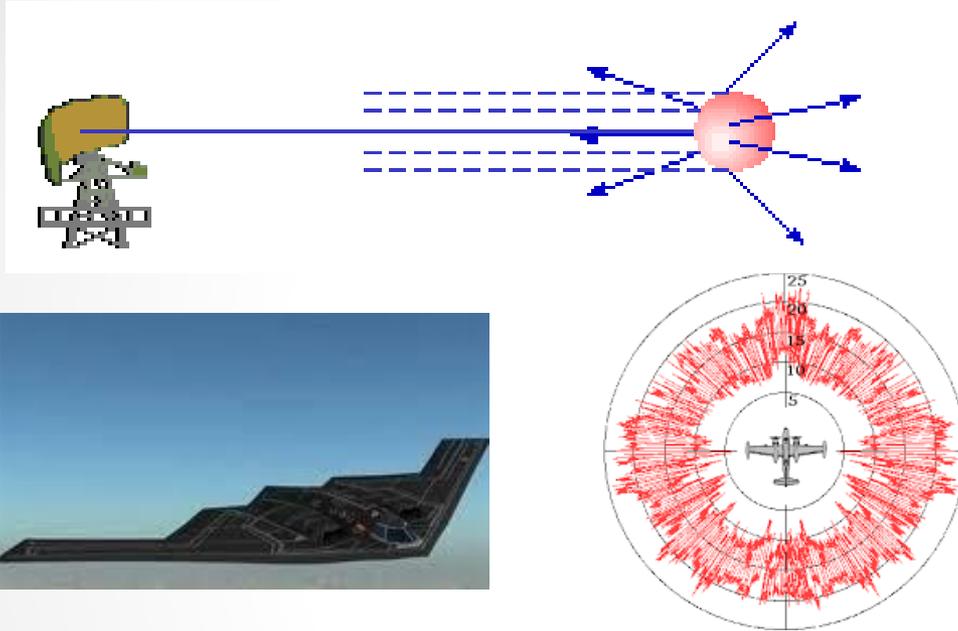
\vec{A} est appelé **potentiel magnétique** (ici défini sous la condition de jauge : $\operatorname{div}(\vec{A})=0$).

L'équation vérifiée par \vec{A} est une équation de Poisson vectorielle.

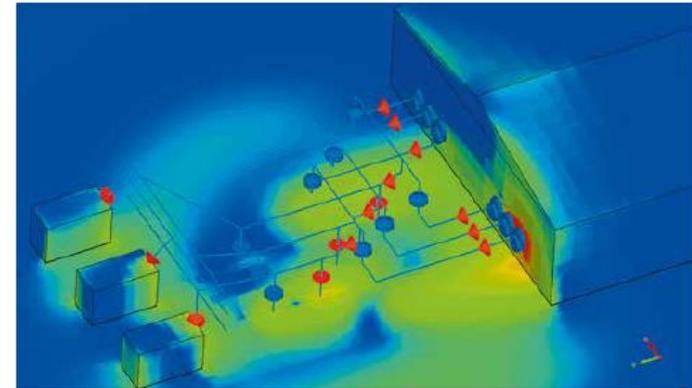
2.3 Equations des phénomènes électromagnétiques

Exemples d'applications

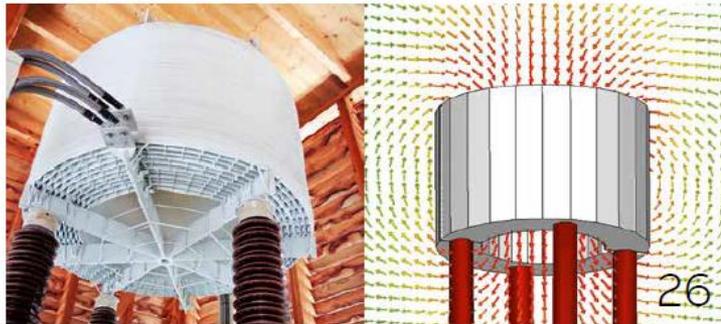
Calcul de la surface équivalente radar d'un avion



08a



08b



26

Compatibilité
électromagnétique