INSA TOULOUSE - Département GMM
Master MODIA - UF Modélisation et Calcul Scientifique

Corrigé du TD1
Solution exaxte des systèmes hyperboliques linéaires du premier ordre à coefficients constants

Question 1. Soit le système d'edp :

$$\partial_t U + A\partial_x U = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

où U est une fonction des variables t, x à valeur dans $\mathbb{R}^q$ avec q entier strictement positif et A une matrice réelle constante de dimension $q \times q$ diagonalisable et à valeurs propres réelles.

Il existe de nombreux exemples en Physique de systèmes de la forme (1). Ils modélisent en général la propagation dans une direction donnée (correspondant à l'axe Ox) d'ondes planes de faible amplitude. Ces systèmes possèdent une généralisation triidimensionnelle de la forme :

$$\partial_t U + \sum_{i=1}^{3} A_i \partial_{x_i} U = 0,$$

où les A_i sont des matrices réelles constantes de dimension $q \times q$. Si on tient compte de plus des phénomènes dissipatifs ou de forçages externes, ils peuvent prendre la forme plus générale suivante :

$$\partial_t U + \sum_{i=1}^{3} A_i \partial_{x_i} U + BU = f$$

Ici nous nous limiterons à l'étude de quelques exemples simples, monodimensionnels, de systèmes de la forme (1) :
- le système modélisant la propogation d'ondes acoustiques dans les fluides,
- le système modélisant la propogation d'ondes à la surface d'un fluide,
- le système des équations de Maxwell modélisant la propagation d'ondes électromagnétiques.

A) Ondes acoustique dans un fluide. Le système d'edp modélisant le mouvement d'un fluide parfait compressible barotrope (c'est-à-dire dont la pression est une fonction de la masse volumique uniquement) s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \partial_t\rho + div(\rho\mathbf{v}) & = & 0 \\ \partial_t\rho\mathbf{v} + div(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}) + \nabla p & = & \mathbf{0} \end{array}\right. \tag{2}$$

ou encore sous la forme équivalente :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \partial_t\rho + div(\rho\mathbf{v}) & = & 0 \\ \partial_t\mathbf{v} + (\mathbf{v}.\nabla)\mathbf{v} + \dfrac{1}{\rho}\,\nabla p & = & \mathbf{0} \end{array}\right. \tag{3}$$

L'hypothèse barotrope correspond au fait que dans un écoulement de fluide parfait, sans ondes de choc, les transformations subies par les particules fluides sont adiabatiques et réversibles (pas d'échanges de chaleur ni de frottement entre particules fluides) et donc isentropiques. Par conséquent on peut écrire que :

$$p = p(\rho, s) = p(\rho, s_0)$$

où s_0 est la valeur de l'entropie massique du fluide à l'instant $t = 0$, supposée identique en tout point du fluide.

Une onde acoustique correspond à une petite perturbation du fluide autour d'un état constant de masse volumique ρ_0, de pression $p_0 = p(\rho_0, s_0)$ et de vitesse nulle $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$. On obtient donc le système de l'acoustique par linéarisation du système (3) autour de l'état $U_0 = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \mathbf{v}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ en posant $\rho = \rho_0 + \rho'$, $p = p_0 + p'$ et $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}' = \mathbf{v}'$ et en éliminant formellement des équations tous les termes d'ordre > 1 en ρ' et $\mathbf{v}'$. On obtient le système suivant (le vérifier) :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \partial_t\rho' + \rho_0\,div(\mathbf{v}') & = & 0 \\ \partial_t\mathbf{v}' + \dfrac{1}{\rho_0}\,\nabla p' & = & \mathbf{0} \end{array}\right. \tag{4}$$

Posons par définition : $c_0 = \sqrt{\dfrac{\partial p}{\partial \rho}(\rho_0, s_0)}$. Comme, quel que soit le fluide, p est une fonction strictement croissante de ρ à s fixé, la constante c_0 est un réel strictement positif.

Puisqu'on ne conserve que les termes d'ordre 1, on a par définition de c_0 : $p' = c_0^2\rho'$. En privilégiant comme inconnue la variable p' plutôt que ρ', le système modélisant la propgation d'une onde acoustique dans un fluide au repos s'écrit finalement :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \partial_t p' + \rho_0 c_0^2\,div(\mathbf{v}') & = & 0 \\ \partial_t\mathbf{v}' + \dfrac{1}{\rho_0}\,\nabla p' & = & \mathbf{0} \end{array}\right. \tag{5}$$

En dérivant par rapport à t la première équation et en se servant de la seconde équation, on peut éliminer $\mathbf{v}'$ et obtenir l'edp suivante (du second ordre) pour p' :

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c_0^2\,\Delta p' = 0 \tag{6}$$

On reconnaît l'équation des ondes et la constante c_0 introduite précédemment correspond donc à la célérité des ondes acoustiques. Dans le cas monodimensionnel (en notant u' la composante de la vitesse selon Ox), le système (5) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t p' + \rho_0 c_0^2 \, \partial_x u' & = & 0 \\ \partial_t u' + \dfrac{1}{\rho_0} \, \partial_x p' & = & 0 \end{array} \right. \tag{7}$$

C'est un système de la forme (1) avec $U = \begin{pmatrix} p' \\ u' \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \rho_0 c_0^2 \\ \dfrac{1}{\rho_0} & 0 \end{pmatrix}$. On vérifie immédiatement que les valeurs propres de A ont pour expression : $\lambda_1 = -c_0$ et $\lambda_2 = c_0$. Elles sont donc réelles et distinctes ce qui prouve que A est diagonalisable. On constate sur ce premier exemple que les valeurs propres de A correspondent à la célérité des ondes modélisées par le système (l'une se propageant dans le sens des x négatifs, l'ordre dans le sens opposé). On verra que ce résultat est général.

B) Ondes de surface dans un fluide. Considérons une étendue d'eau infinie au dessus d'un plan horizontal. Notons $h(t, x, y)$ la hauteur à l'instant t de la colonne d'eau située au dessus du point de coordonnées (x, y) du plan d'équation $z = 0$. En raison de l'infleunce des forces de pesanteur, le fluide ne peut être à l'équilibre que si la hauteur h est la même en tout point. Si ce n'est pas le cas localement, le fluide se met en mouvement et les variations de hauteur se propagent de proche en proche. On parle alors d'ondes de surface. La modélisation de ce mouvement dans le cas général est assez complexe et fait appel aux équations de Navier-Stokes. Cependant, dans le cas où l'échelle de longueur caractéristique des mouvements du fluide (typiquement la longeur d'onde) est grande en tout point devant la profondeur h et que le fluide est très peu visqueux, on peut en première approximation considérer que la colonne d'eau en chaque point se déplace en bloc, au sens où la vitesse du fluide est la même en tout point de la colonne d'eau à l'exception des points situés très près du plan d'équation z=0 (fond). Dans ce cas, si on suppose le fluide incompressible et si on néglige totalement les phénomènes de frottement, y compris sur le fond, on peut montrer que les équations du mouvement s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t h + \partial_x(hu) + \partial_y(hv) & = & 0 \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \frac{gh^2}{2}) + \partial_y(huv) & = & 0 \\ \partial_t(hv) + \partial_x(huv) + \partial_y(hv^2 + \frac{gh^2}{2}) & = & 0 \end{array} \right. \tag{8}$$

où u et v désignent les composantes selon Ox et Oy de la vitesse du fluide (vitesse de la colonne d'eau) et g l'accélération de la pesanteur. Le système (8) est appelé système des équations de Saint-Venant (en fait il s'agit d'une version simplifiée de ce système). La première équation traduit la conservation de la masse et les deux suivantes correspondent au bilan de quantité de mouvement d'une colonne d'eau. Le système (8) est valable quelle que soit l'amplitude des ondes de surfaces, aux approximations près qui permettent de l'établir. Il est encore équivalent au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t h + \partial_x(hu) + \partial_y(hv) & = & 0 \\ \partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u + g\partial_x h & = & 0 \\ \partial_t v + u\partial_x v + v\partial_y v + g\partial_y h & = & 0 \end{array} \right. \tag{9}$$

Comme pour l'acoustique, on peut se limiter à l'étude de perturbations de petite amplitude autour d'une situation d'équilibre, caractérisée par une hauteur constante h_0 et une vitesse nulle. En linéarisant le système (9) on obtient alors le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t h' + h_0\, \partial_x u' + h_0 \partial_y v' & = & 0 \\ \partial_t u' + g\, \partial_x h' & = & 0 \\ \partial_t v' + g\, \partial_y h' & = & 0 \end{array}\right. \tag{10}$$

En dérivant par rapport à t la première équation et en se servant des deux autres équations, on peut éliminer les inconnues u' et v' et obtenir l'edp suivante pour h' :

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} - g h_0\, \Delta h' = 0 \tag{11}$$

On reconnaît une nouvelle fois l'équation des ondes, la célérité des ondes ayant cette fois pour expression $c_0 = \sqrt{g h_0}$.

Dans le cas monodimensionnel (solution indépendante de y et vitesse alignée avec Ox), le système (10) devient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t h' + h_0\, \partial_x u' & = & 0 \\ \partial_t u' + g\, \partial_x h' & = & 0 \end{array}\right. \tag{12}$$

C'est encore un système de la forme (1) avec $U = \begin{pmatrix} h' \\ u' \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & h_0 \\ g & 0 \end{pmatrix}$. On montre facilement que les valeurs propres de A ont pour expression : $\lambda_1 = -\sqrt{g h_0}$ et $\lambda_2 = \sqrt{g h_0}$, ce qui prouve que A est diagonalisable, à valeurs propres réelles, et que celles-ci correspondent sur cet exemple également à la célérité des ondes.

C) Ondes électromagnétiques. Les équations de Maxwell modélisent les évolutions couplées des champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{H}$. Dans le vide, en l'absence de charges et de courants électriques, elles s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \vec{\mathrm{rot}}(\vec{E}) & = & -\mu_0 \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \\ \vec{\mathrm{rot}}(\vec{H}) & = & \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array}\right. \tag{13}$$

où ϵ_0, resp. μ_0, désigne la permittivité électrique, resp. la perméabilité magnétique du vide. Il faut leur ajouter les deux contraintes suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} div(\vec{E}) & = & 0 \\ div(\vec{H}) & = & 0 \end{array}\right. \tag{14}$$

qui sont automatiquement vérifiées à tout instant si elles le sont à un instant donné (à l'instant initial en particulier). En effet, en prenant la divergence des équations du système (13) et en se servant de l'identité $div(\vec{\mathrm{rot}}) = 0$, on obtient les deux équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial}{\partial t}(div(\vec{H})) & = & 0 \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(div(\vec{E})) & = & 0 \end{array}\right. \tag{15}$$

On voit donc que, pour déterminer l'évolution du champ électromagnétique, on peut se contenter du système (13), qui peut encore s'écrire sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \dfrac{1}{\mu_0}\,\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E}) & = & 0 \\ \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \dfrac{1}{\epsilon_0}\,\vec{\mathrm{rot}}(\vec{H}) & = & 0 \end{array}\right. \tag{16}$$

En dérivant par rapport à t chacune des deux équations, on peut découpler les champs électriques et magnétiques et obtenir les équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - c_0^2\,\Delta\vec{H} & = & \vec{0} \\ \\ \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c_0^2\,\Delta\vec{E} & = & \vec{0} \end{array}\right. \tag{17}$$

où la constante $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$ n'est autre que la vitesse de la lumière dans le vide.

Dans le cas particulier d'une onde plane polarisée rectilignement avec $\vec{E}$ aligné selon Oy et $\vec{H}$ aligné selon Oz, le système (18) se simplifie et s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t H_z + \dfrac{1}{\mu_0}\,\partial_x E_y & = & 0 \\ \\ \partial_t E_y + \dfrac{1}{\epsilon_0}\,\partial_x H_z & = & 0 \end{array}\right. \tag{18}$$

Ce système est encore de la forme (1) avec $U = \begin{pmatrix} H_z \\ E_y \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/\mu_0 \\ 1/\epsilon_0 & 0 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A ont pour expression : $\lambda_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$ et $\lambda_2 = \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$, ce qui prouve une nouvelle fois que A est diagonalisable, à valeurs propres réelles, et que celles-ci correspondent à la célérité des ondes modélisées par le système.

Question 2. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^q$ (celle dans laquelle est écrit le système (1)) vers la base $\mathcal{B}$ des vecteurs propres de A. On pose : $V = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^q \end{pmatrix}$ et $U = PV$.

Par définition les v^k sont donc les coordonnées de U dans la base $\mathcal{B}$ et on a :

$$U(t,x) = \sum_{k=1}^{q} v^k(t,x) R_k \tag{19}$$

De plus, P étant la matrice de passage dans la base propre de A, on a : $A = PDP^{-1}$ où $D = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_q)$ désigne la matrice diagonale associée aux valeurs propres de A. En mutipliant le système (1)) par la matrice P^{-1}, on obtient :

$$\partial_t P^{-1}U + (P^{-1}AP)\,\partial_x P^{-1}U = 0, \tag{20}$$

soit encore le système :

$$\partial_t V + D\partial_x V = 0, \tag{21}$$

c'est-à-dire en détaillant les équations correspondantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t v^1 + \lambda_1 \partial_x v^1 & = & 0 \\ \vdots & & \\ \partial_t v^q + \lambda_q \partial_x v^q & = & 0 \end{array}\right. \tag{22}$$

Les λ_k étant tous réels, les coordonnées v^k de U dans la base propres de A sont donc solutions d'équations d'advection linéaires indépendantes. On en déduit qu'elles ont pour expression :

$$v^k(t,x) = v_0^k(x - \lambda_k t), \tag{23}$$

ce qui en tenant compte de (19) conclut la démonstration. La solution $U(t,x)$ s'écrit donc comme la superposition de q solutions indépendantes, d'expression $v_0^k(x-\lambda_k t)R_k$, correspondant chacune à une onde plane, appelée mode, se déplaçant à la vitesse λ_k. Le nombre de modes distincts présents dans la solution dépend de la décomposition de la condition initiale dans la base propre de A. Si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, U_0 est colinéaire avec le vecteur propre R_{k_0}, la solution ne sera composée que du mode correspondant.

Question 3. On vient de montrer que :

$$U(t,x) = \sum_{k=1}^{q} v_0^k(x - \lambda_k t)\ R_k \tag{24}$$

Or par définition de V_0 et des vecteurs lignes L_i, on a :

$$V_0 = \begin{pmatrix} v_0^1 \\ \vdots \\ v_0^q \end{pmatrix} = P^{-1}U_0 = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_q \end{pmatrix} U_0 = \begin{pmatrix} L_1 U_0 \\ \vdots \\ L_q U_0 \end{pmatrix}$$

d'où finalement l'expression de la solution :

$$U(t,x) = \sum_{k=1}^{q} (L_k U_0)(x - \lambda_k t)\ R_k = \sum_{k=1}^{q} (L_k U_0(x - \lambda_k t))\ R_k \tag{25}$$

D'autre part, on a : $A = PDP^{-1}$, ce qui implique :

$$P^{-1}A = DP^{-1} \tag{26}$$

En se servant une nouvelle fois de la définition des L_i, on a : $P^{-1} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_q \end{pmatrix}$, ce qui avec (26) prouve que pour tout $i = 1 \ldots q$: $L_i A = \lambda_i L_i$. Cqfd.

Question 4. On remarque tout d'abord que la condition intiale vérifie :

$$U_0(x) = U_g + (U_d - U_g)Y(x) = U_g + \sum_{k=1}^{q} \Delta U_0^k Y(x) R_k$$

Par linéarité du problème, la solution est donc la somme de la solution associée à la condition initiale $U_0 = Ug$ (qui n'est autre que $U(t,x) = U_g$ pour tout (t,x)) et de la solution associée à la condition initiale $U_0 = \sum_{k=1}^{q} \Delta U_0^k Y(x) R_k$. D'après le résultat de la question (2), la solution du problème de Riemann a donc pour expression :

$$U(t,x) = U_g + \sum_{k=1}^{q} \Delta U_0^k \, Y(x - \lambda_k t) \, R_k, \tag{27}$$

Pour mieux comprendre la structure de la solution, il suffit de noter que, par définition de la fonction de Heavyside et en tenant compte du fait que les λ_i sont rangées par ordre croissant, l'expression de U peut encore s'écrire :

$$U(t,x) = \begin{cases} U_g & si \quad x/t < \lambda_1 \\ U_g + U_0^1 R_1 & si \quad \lambda_1 < x/t < \lambda_2 \\ ..... & .... \quad ..... \\ U_g + \displaystyle\sum_{k=1}^{i} \Delta U_0^k R_k & si \quad \lambda_i < x/t < \lambda_{i+1} \\ ..... & .... \quad ..... \\ U_d = U_g + \displaystyle\sum_{k=1}^{q} \Delta U_0^k R_k & si \quad \lambda_q < x/t \end{cases} \tag{28}$$

ce que l'on peut illustrer par les deux graphes ci-dessous.

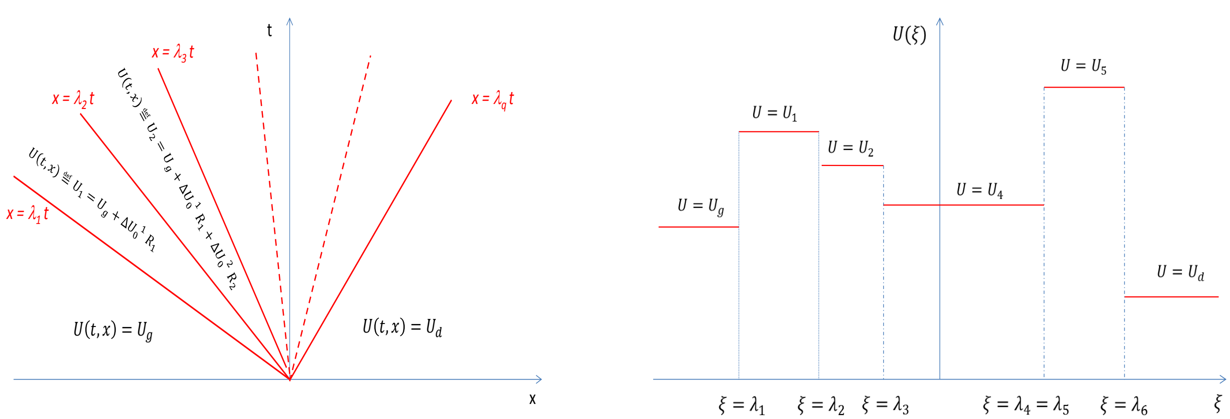

FIGURE 1 – A gauche : structure de la solution générale dans un diagramme (x,t) - A droite : structure de la solution dans un diagramme (ξ, U) dans le cas particulier $q = 6$ et $\lambda_4 = \lambda_5$

On constate qu'en fonction la variable $\xi = x/t$ la solution est constituée d'une succession d'états constants séparés par des discontinuités locolisées en $\xi = \lambda_i$, les deux états extrêmes étant respectivement $U = U_g$ et $U = U_d$. Le nombre de discontinuités est donc égal au nombre q' de valeurs propres distinctes de A. Ces discontinuités correspondent physiquement à q' ondes qui se propagent, depuis la discontinuité initiale localisée en $x = 0$ vers la gauche ou vers la droite selon le signe de la valeur propre associée.

Question 5. D'après la formule (27), on voit que lorsqu'au moins une des valeurs propres est nulle, la solution U possède une discontinuité en $x = 0$ (sauf dans le cas trivial $U_g = U_d$). Cependant, en ce qui concerne le flux, on a :

$$AU(t,x) = AU_g + \sum_{k=1}^{q} \Delta U_0^k \, Y(x - \lambda_k t) \, \lambda_k \, R_k,$$

d'où encore :

$$F(U(t,x)) = AU(t,x) = AU_g + \sum_{k=1\ldots q, \lambda_k \neq 0} \Delta U_0^k \, Y(x - \lambda_k t) \, \lambda_k \, R_k, \tag{29}$$

On constate que pour $t > 0$, les seules discontinuités de la fonction $F(U(t,x))$ sont situées en $x = \lambda_k t$ avec $\lambda_k \neq 0$, ce qui prouve sa continuité en $x = 0$ pour tout $t > 0$. Pour conclure, on déduit de (29) que :

$$F(U(t,0^{\pm})) = AU_g + \sum_{k=1\ldots q, \lambda_k \neq 0} \Delta U_0^k \, Y(-\lambda_k t) \, \lambda_k \, R_k,$$

d'où en se servant du fait que $Y(x) = 1$ pour $x > 0$ et $Y(x) = 0$ pour $x < 0$:

$$F(U(t,0^{\pm})) = AU_g + \sum_{k=1\ldots q, \lambda_k < 0} \Delta U_0^k \, \lambda_k \, R_k,$$

soit encore par définition des matrices $A^- = P \, min(D,0) \, P^{-1}$ et $A^+ = P \, max(D,0) \, P^{-1}$:

$$F(U(t,0^{\pm})) = (A^- + A^+)U_g + A^-(U_d - U_g)$$

soit finalement :

$$F(U(t,0^{\pm})) = A^+ U_g + A^- U_d$$

valable pour tout $t > 0$. On constate que le flux en $x = 0$ ne dépend pas de t (conséquence du fait que la solution du problème de Riemann ne dépend que de x/t).

Enfin, en introduisant la matrice $|A| = A^+ - A^-$, on peut encore exprimer le flux en $x = 0$ sous la forme :

$$F(U(t,0^{\pm})) = \frac{1}{2} AU_g + \frac{1}{2} AU_d - \frac{1}{2}|A|(U_d - U_g)$$

On verra que cette expression joue un rôle très important pour la méthode des volumes finis. Elle permet de généraliser la notion de schéma numérique décentré, facile à définir pour une loi de conservation scalaire, au cas des systèmes de lois de conservation (linéaires et non-linéaires).