Exercices complémentaires d'analyse vectorielle, mouvement et trajectoires

Calcul vectoriel

Exercice I (*)

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé d'origine O et de vecteurs de base $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$, soient deux vecteurs définis comme

$$\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2}.$$

1. Représenter $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Calculer les normes de ces trois vecteurs.
2. Calculer les composantes (u_1, u_2) du vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ porté par le vecteur $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.
3. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OA} . \overrightarrow{OB}$ et en déduire l'angle θ que font entre eux les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
4. Déterminer les angles et que fait le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ avec les vecteurs de la base $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$.
5. Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ ainsi que la norme $\| \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} \|$.
6. Montrer que l'aire du triangle OAB peut s'exprimer en fonction de $\| \overrightarrow{OA} \|$, $\| \overrightarrow{OB} \|$ et θ. Vérifier que l'aire de ce triangle peut aussi être obtenue par la relation

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2} \| \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} \|.$$

Exercice II (*)

Par rapport au repère d'origine O orthonormé direct $\left(\vec{i}, \vec{j}, \overrightarrow{k}\right)$, soit $\overrightarrow{U} = (0,\ 3,\ 1)$ et $\overrightarrow{V} = (0,\ 1, -2)$.

1. Calculer $\overrightarrow{U} . \overrightarrow{V}$ ainsi que l'angle $\phi = \left(\widehat{\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}}\right)$.

2. On appelle cosinus directeur le cosinus de l'angle entre 2 vecteurs. Ainsi dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \overrightarrow{k}\right)$ on peut définir les cosinus directeurs d'un vecteur $\overrightarrow{X}$ grâce à:

$$\begin{cases} \alpha = \cos a = \dfrac{\overrightarrow{X}\,.\,\vec{i}}{\|\overrightarrow{X}\|} \\ \beta = \cos b = \dfrac{\overrightarrow{X}\,.\,\vec{j}}{\|\overrightarrow{X}\|} \\ \gamma = \cos c = \dfrac{\overrightarrow{X}\,.\,\overrightarrow{k}}{\|\overrightarrow{X}\|} \end{cases}.$$

Calculer les cosinus directeurs de vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$.

3. Calculer les composantes de $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}$; puis $\|\overrightarrow{W}\|$ par deux méthodes différentes.

Exercice III (***)

Soient $\mathscr{B}_0\ (\vec{i}, \vec{j}, \overrightarrow{k})$, $\mathscr{B}_1\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k})$, $\mathscr{B}_2\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \vec{z})$, $\mathscr{B}_3\ (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \vec{z})$, 4 bases orthonormées définies par les conditions suivantes:

- $\mathscr{B}_1$ s'obtient de $\mathscr{B}_0$ par une rotation d'angle ψ autour de $\overrightarrow{k}$.
- $\mathscr{B}_2$ s'obtient de $\mathscr{B}_1$ par une rotation d'angle θ autour de $\overrightarrow{u}$.
- $\mathscr{B}_3$ s'obtient de $\mathscr{B}_2$ par une rotation d'angle ϕ autour de $\vec{z}$.

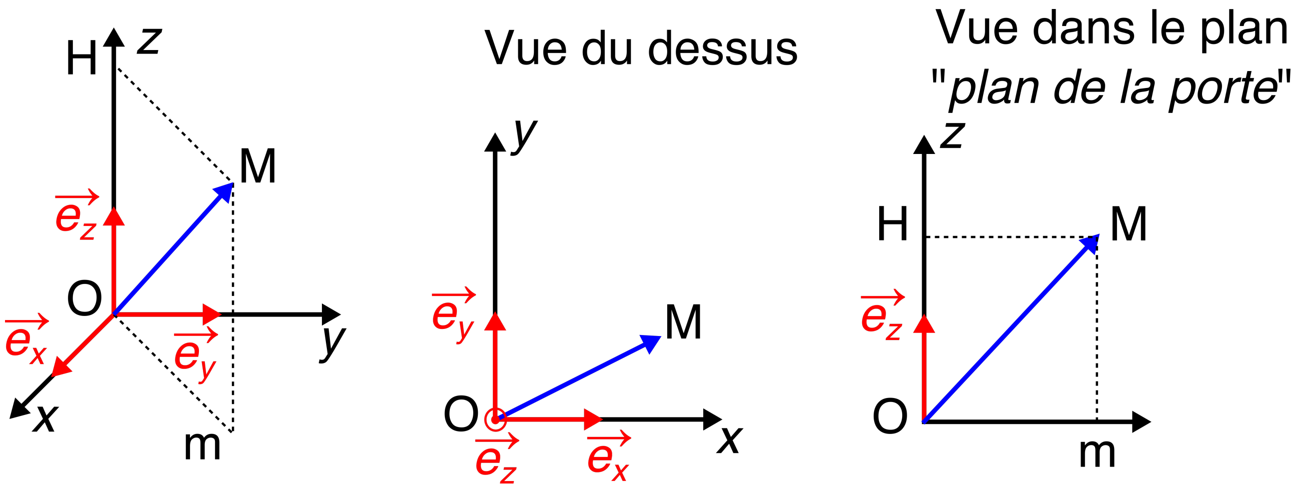
Les angles ψ, θ, ϕ sont appelés les angles d'Euler et se retrouvent très utiles dans un certain nombre de problème en physique (définition du vecteur rotation en mécanique, en sciences des matériaux pour décrire les orientations cristallines)

1. Faire une représentation graphique des différentes bases.
2. Exprimer les vecteurs unitaires de $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$, $\mathscr{B}_3$ dans la base $\mathscr{B}_0$.
3. Calculer les produits vectorielles suivant: $\vec{i} \wedge \overrightarrow{u}$, $\vec{i} \wedge \overrightarrow{v}$, $\vec{j} \wedge \vec{z}$, $\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{x}$, $\left(\vec{z} \wedge \overrightarrow{y}\right) \wedge \vec{i}$.
4. Soit $\overrightarrow{\omega} = \alpha \overrightarrow{k} + \beta \overrightarrow{u} + \delta \vec{z}$. Exprimer $\overrightarrow{\omega}$ dans toutes les bases.

Base locale, dérivée de vecteur

Exercice I (*)

1. Faire apparaître les trois vecteurs de la base cylindrique et les coordonnées cylindriques correspondante sur les trois schemas suivants.
2. Exprimer les vecteurs de la base cylindrique en fonction de ceux de la base cartésienne.
3. Calculer les dérivées temporelles de ces vecteurs à l'aide des expressions précédentes.

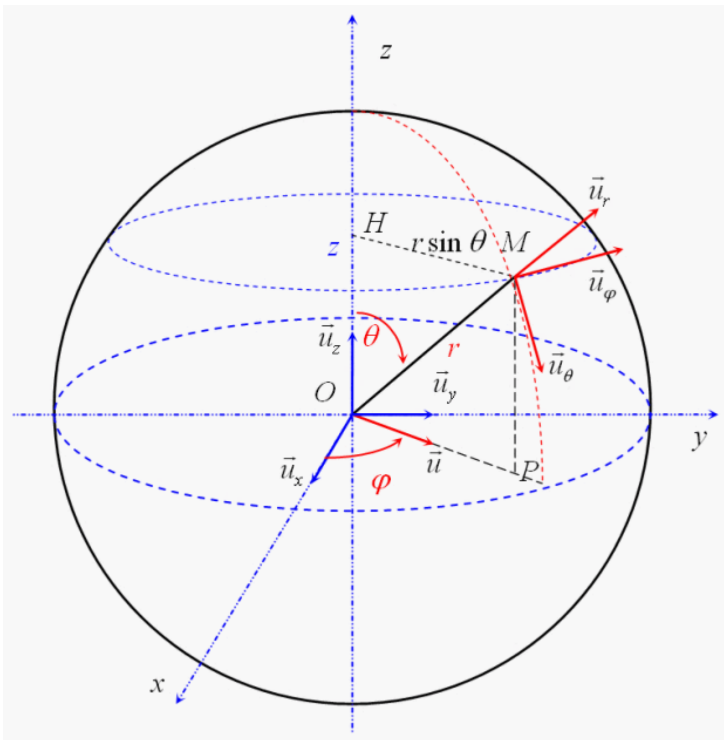


4. Exprimer, dans cette base locale, le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}}$ et le vecteur déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$.

Exercice II (**)

Soit $\mathscr{R}(O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$ un repère cartésien et considérons la base sphérique $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$, définie comme

- $\overrightarrow{u_r} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$ repère les variations de r;
- $\overrightarrow{u_\theta}$ tangent en M au méridien dans le sens croissant de θ;
- $\overrightarrow{u_\varphi}$ tangent en M à la parallèle dans le sens croissant de φ.



1. Exprimer les vecteurs de la base sphérique dans la base cartésienne.
2. Calculer

$$\frac{\partial \overrightarrow{u_r}}{\partial \theta}, \frac{\partial \overrightarrow{u_r}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \overrightarrow{u_\theta}}{\partial \theta}, \frac{\partial \overrightarrow{u_\theta}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \overrightarrow{u_\varphi}}{\partial \theta}, \frac{\partial \overrightarrow{u_\varphi}}{\partial \varphi}$$

3. En déduire $d\overrightarrow{u_r}, d\overrightarrow{u_\theta}, d\overrightarrow{u_\varphi}$ dans la base sphérique.
4. Montrer que les différentielles des vecteurs de la base sphérique peuvent se mettre sous la forme

$$d\overrightarrow{u_r} = dt\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{u_r},\ d\overrightarrow{u_\theta} = dt\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{u_\theta},\ d\overrightarrow{u_\varphi} = dt\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{u_\varphi}$$

en précisant l'expression du vecteur rotation $\overrightarrow{\omega}$ des vecteurs de la base sphérique par rapport à $\mathscr{R}$. Déduire les dérivées par rapport au temps des vecteurs de la base sphérique par rapport à $\mathscr{R}$.

5. Considérons le vecteur $\overrightarrow{V} = V_r\overrightarrow{u_r} + V_\theta\overrightarrow{u_\theta} + V_\varphi\overrightarrow{u_\varphi}$. En utilisant les résultats précédents, calculer la dérivée par rapport au temps de $\overrightarrow{V}$ par rapport à $\mathscr{R}$.

Trajectoire et mouvements

Exercice I (**)

Soit $r_0,\ \alpha,\ \omega$ trois constantes positives. La trajectoire d'un mobile ponctuel a pour équation en coordonnées polaires $r = r_0 \exp(-\alpha\theta)$; le mobile s'y trouve à l'instant t au point de coordonnée $\theta = \omega t$.

1. Dessiner la trajectoire entre l'instant 0 et l'instant infini.

2. Exprimer les coordonnées polaires v_r, v_θ de la vitesse du mobile en fonction de $r,\ \alpha,\ \omega$.

3. Dessiner qualitativement la vitesse en un point pour lequel $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ en même temps que la trajectoire.

4. En interprétant le rapport $\dfrac{v_\theta}{v_r}$, trouver une relation entre α et l'angle $\varphi = \left(\widehat{\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{v}}\right)$ que fait la vitesse avec la direction radiale.

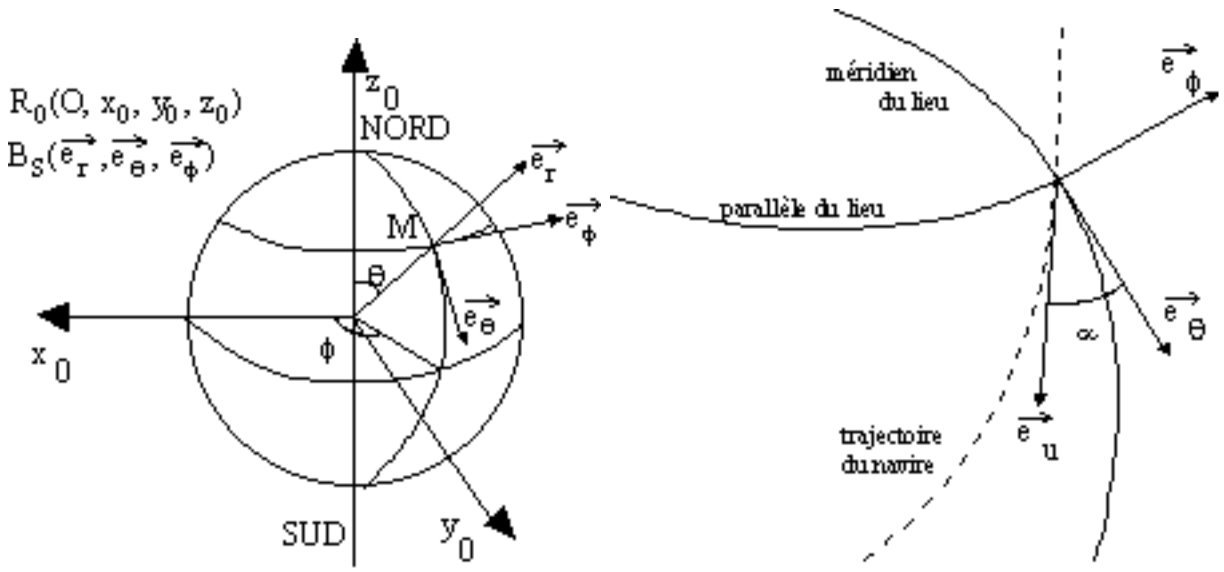
5. Exprimer les coordonnées polaires a_r, a_θ de l'accélération en fonction $r,\ \alpha,\ \omega$.

6. Dessiner qualitativement l'accélération en un point pour lequel $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ en même temps que la trajectoire pour $\alpha < 1$.

7. Trouver une relation entre α et l'angle $\psi = \left(\widehat{\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{a}}\right)$ que fait l'accélération avec la direction radiale.

Exercice II (***)

Un navire se déplace à la surface du globe terrestre supposé parfaitement sphérique, de rayon R = 6370 km et de centre O. Sa position (M) est précisée à chaque instant t par ses coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) dans le repère $\mathscr{R}_0\ (O, x_0, y_0, z_0)$ auxquelles on associe la base sphérique $\mathscr{B}_S\ (\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\phi}), ||\overrightarrow{OM}|| = r = R$; $\theta = \widehat{\left(\overrightarrow{e_z}, \overrightarrow{OM}\right)}$; ϕ est l'angle dièdre orienté des plans (x_0Oz_0) et celui défini par les vecteurs $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_z})$ (figure ci-contre). On recherche la trajectoire, pour laquelle la vitesse du navire est constante en norme $||\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}_0}|| = v_0 =$ 30km/h et telle que l'angle entre la tangente à la trajectoire et le méridien terrestre du lieu reste constant. Soit $\overrightarrow{e_u}$ le vecteur unitaire tangent à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement tel que $\alpha = \widehat{\left(\overrightarrow{e_u}, \overrightarrow{e_\theta}\right)}$ = Constante. On considère un cap compris entre le sud et l'ouest c'est à dire $\alpha > 0$.



1. Ecrire les relations liant $\dot{\phi} = \dfrac{d\phi}{dt}$, $\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$, v_0, R, α, θ.

2. Établir l'équation, paramétrée par l'angle α, de la trajectoire (appelée loxodromie) du navire sous la forme $\phi(\theta)$ et la loi horaire $\theta(t)$ du mouvement du navire sur sa trajectoire. On suppose que à $t = 0$, $\theta = \theta_0$ et $\phi = \phi_0$. On donne $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)}dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$.

3. Application: déterminer le cap α que doit prendre le navire pour effectuer une navigation loxodromique de Los Angeles (34° de latitude NORD, 118° de longitude OUEST) à l'île de Nuku Hiva dans l'archipel des Marquises (10° de latitude SUD, 139° de longitude OUEST), ainsi que la durée en heure de son voyage. La latitude est l'angle entre OM et le plan de l'équateur, comptée positivement dans l'hémisphère

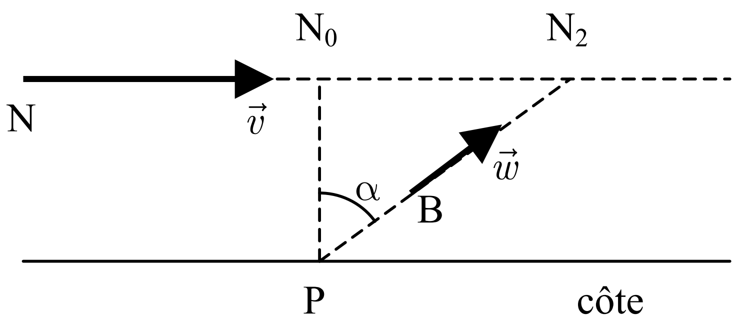
nord et négativement dans l'hémisphère sud et la longitude est l'angle entre le plan méridien du lieu et le plan méridien de l'observatoire de Greenwich.

Exercice III (**)

1. Deux voitures se suivent à une distance D à la même vitesse constante $v_0 = 108$ km/h . A un certain moment, la première voiture commence à freiner avec une décélération $a_1 = 6$ m.s^{-2}; la seconde voiture ne commence à freiner qu'avec un retard $\tau = 1$s et une décélération $a_2 = 5$ m.s^{-2}. Quelle condition doit satisfaire D pour que la seconde voiture s'arrête sans heurter la première ?

2. Deux automobiles, considérées comme ponctuelles, se suivent à la même vitesse constante $v = 72$ km/h séparée d'une distance $d = 25$ m. Brusquement la seconde accélère avec $a = 1$ m.s^{-2}, dépasse la première et se rabat devant elle lorsqu'elle en est à une distance d. Quelle distance a parcouru la seconde automobile pendant cette manœuvre ?

3. Un navire N longe une côte rectiligne à la vitesse $\overrightarrow{v}$. A l'instant $t = 0$ choisi comme origine des temps, il passe en N_0 en face d'un port P. Une vedette B de vitesse $\overrightarrow{w}$, $||\overrightarrow{w}|| < ||\overrightarrow{v}||$ part du port P pour rejoindre le navire. Son capitaine désire quitter le port le plus tard possible. On note α l'angle entre la trajectoire de la vedette et la normale à la côte, t_1 l'instant de départ de la vedette, t_2 l'instant de la rencontre, qui se produit en N_2. Quel angle α faut-il choisir pour quitter le port le plus tard possible ?



4. On laisse tomber une bille initialement au repos d'une hauteur $z = h_0$ au dessus du sol ($z = 0$). La bille heurte le sol avec une vitesse $\overrightarrow{v_i}$; le choc change sa vitesse en $\overrightarrow{v_f} = -e\overrightarrow{v_i}$, où e, appelé coefficient de restitution est une constante caractéristique de la bille et du sol et indépendante de la vitesse.

   A. Exprimer en fonction de h_0, e, g la hauteur h_1 de remontée de la bille après son premier rebond, ainsi que le temps τ_0 mis par la bille pour effectuer la chute et la remontée jusqu'en $z = h_1$.

   B. On note h_n la hauteur maximale atteinte par la bille après n rebonds et τ_n le temps écoulé entre les deux hauteurs h_n et h_{n+1}. Exprimer h_n et τ_n en fonction de h_0, e, τ_0.

C. En déduire le temps t_n nécessaire pour que la bille ait effectuée n rebonds et soit à la hauteur h_n. Quelle est la limite de t_n quand $n \to \infty$?

D. Application numérique: on laisse tomber d'une hauteur $h_0 = 1$m une bille en acier dont le coefficient de restitution vaut $e = 0{,}9$ et un ballon de basket pour lequel le coefficient de restitution est $e = 0{,}6$. Calculer les temps au bout desquels la bille d'acier et le ballon sont immobiles respectivement.

Exercice IV (*)

Les coordonnées d'une particule sont données par les fonctions du temps: $x(t) = 2t,\ y(t) = 4t(t-1)$.

1. Déterminer l'équation de la trajectoire.

2. Calculer la vitesse de la particule à l'instant t.

3. Montrer que le mouvement a une accélération constante dont on déterminera les composantes tangentielle et normale.

Exercice V (*)

Les coordonnées d'une particule mobile dans le référentiel $\mathscr{R}$ muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont données en fonction du temps par : $x(t) = t^2 - 4t + 1,\ y(t) = -2t^4,\ z(t) = 3t^2$. Dans un deuxième référentiel $\mathscr{R}'$ muni du repère $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$, avec $\vec{i} = \vec{i}',\ \vec{j} = \vec{j}',\ \vec{k} = \vec{k}'$, les coordonnées du mobile sont : $x'(t) = t^2 + t + 2,\ y'(t) = -2t^4 + 5,\ z'(t) = 3t^2 - 7$.

1. Exprimer la vitesse $\vec{v}_{M/\mathscr{R}}$ du point M dans $\mathscr{R}$ en fonction de sa vitesse $\vec{v}'_{M/\mathscr{R}'}$ dans $\mathscr{R}'$.

2. Procéder de même pour les accélérations.

3. Définir le mouvement d'entraînement de $\mathscr{R}'$ par rapport à $\mathscr{R}$.

Exercice VI (**)

Un marron tombe à la vitesse verticale $\vec{v}$ sur le pare-brise incliné à 45° d'une voiture roulant à la vitesse $\vec{u}$. Comment s'effectue la réflexion du marron sur le pare-brise (à quelle vitesse), vue par un piéton immobile ? On peut admettre raisonnablement que dans le référentiel lié à la voiture, la vitesse réfléchie est égale et orientée symétriquement à la vitesse incidente par rapport à la normale au pare-brise.