Nom Prénom : Lettre du groupe de TD :

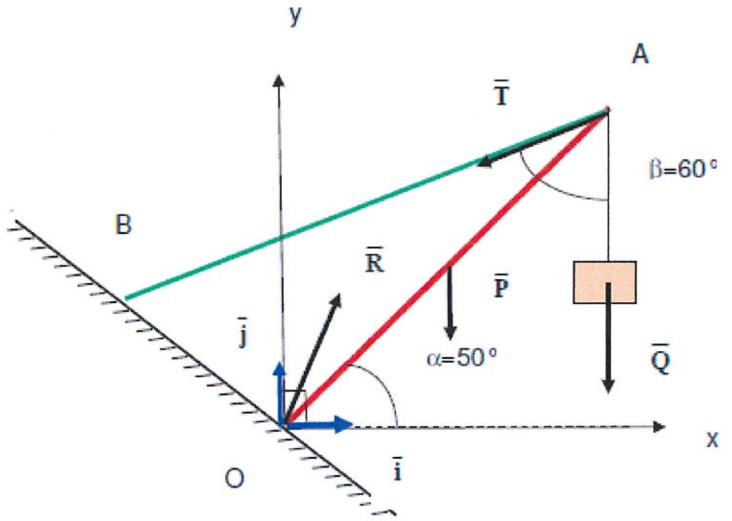
# EXAMEN Mécanique 3 IMACS - I3MAPH31
# INSA 2019 – 2020

Durée : 1h15
L'usage de tout document est formellement interdit.
Les calculatrices sont autorisées pour un usage personnel.
Vous porterez une attention particulière à la rédaction, l'application des théorèmes et unités.

⚠ Vos schémas doivent comporter les forces utilisées + repère.

## PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE (/5)

Un mât OA, de longueur L, de masse M, articulé en O grâce à une liaison pivot est maintenu en équilibre par un câble BA de poids négligeable. En A est suspendue une charge de poids Q.




1- Expliquer les quatre forces représentées ci-dessus. Qui agit sur quoi ?

système : le mât

4 forces : • $\vec{P}$ : le poids du mât : exercée par la terre sur le mât
• $\vec{Q}$ : le poids de la charge : force exercée par la terre sur la charge
• $\vec{T}$ : tension du cable : force exercée par le câble sur le mat
• $\vec{R}$ : Reaction de l'axe : force exercée par l'axe en O sur le mât

2- En appliquant le PFS, déterminer la tension du câble T ainsi que les caractéristiques de l'action R.

$\sum \vec{F_{ext}} = \vec{0}$

$\vec{T} + \vec{P} + \vec{R} + \vec{Q} = \vec{0}$

• $\vec{x}$ : $-T \sin\beta + R_x = 0$

• $\vec{y}$ : $-T\cos\beta - P - Q + R_y = 0$

$R_x = T \sin\beta$

$R_y = T\cos\beta + P + Q$

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$ force inclinée de $\theta$ par rapport à $Ox$ tq $\tan\theta = \frac{R_y}{R_x}$

• $\sum \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}ext, O} = \vec{0}$

$\vec{\mathcal{M}}_{O,\vec{P}} + \vec{\mathcal{M}}_{O,\vec{T}} + \vec{\mathcal{M}}_{O,\vec{R}} + \vec{\mathcal{M}}_{O,\vec{Q}} = \vec{0}$

$\vec{OG} \wedge \vec{P} + \vec{OA} \wedge \vec{T} + \vec{OA} \wedge \vec{Q} + \cancel{\vec{OO} \wedge \vec{R}} = \vec{0}$

avec $\vec{OG} \wedge \vec{P} = \begin{pmatrix} \frac{L}{2}\cos\alpha \\ \frac{L}{2}\sin\alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} = -mg\cos\alpha \frac{L}{2} \vec{k}$

$\vec{OA} \wedge \vec{T} = \begin{pmatrix} L\cos\alpha \\ L\sin\alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -T\sin\beta \\ -T\cos\beta \end{pmatrix} = -TL\cos\alpha\cos\beta + TL\sin\alpha\sin\beta \ \vec{k}$

$= -TL\cos(\alpha+\beta)\vec{k}$

$\vec{OA} \wedge \vec{Q} = \begin{pmatrix} L\cos\alpha \\ L\sin\alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -Q \end{pmatrix} = -LQ\cos\alpha \vec{k}$

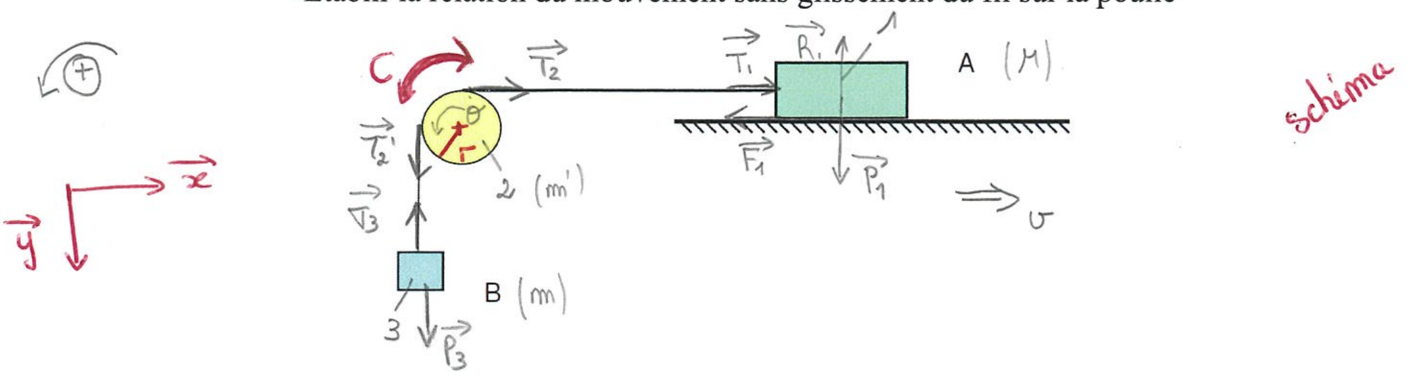
• $\vec{k}$ Donc $-mg\cos\alpha\frac{\cancel{L}}{2} - T\cancel{L}\cos(\alpha+\beta) - \cancel{L}Q\cos\alpha = 0$

CCL : $T = \dfrac{\left(\frac{mg}{2} + Q\right)\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}$

## PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE ( /5)

On considère l'ensemble représenté, constitué de deux corps A et B de massesrespectives M et m reliés par un fil inextensible et de masse négligeablepassant sur la gorge d'une poulie assimilable à un disque de masse m' et de rayon r. Les frottements s'exerçant sur la poulie équivalent à un couple dont lemoment par rapport à l'axe est constant et a pour valeur C.
On prendra l'hypothèse que le fil ne glisse pas sur la poulie.
Les frottements qui s'exercentsur A équivalent à une force opposée à la vitesse et de valeur constante f.
Le système, maintenu en équilibre, est abandonné.
On notera D le centre de rotation de la poulie.

1- Déterminer l'accélération du corps B.
Etapes : -Etablir le PFD sur chacun des solides A et B ainsi que sur la poulie
-Etablir la relation du mouvement sans glissement du fil sur la poulie



• $m^{vt}$ de B : $\vec{T_3} + \vec{P_3} = m\,\vec{a_B}$

$(\cdot\vec{y})$ : $-T_3 + P_3 = m\,a_B$ $\Rightarrow T_3 = P_3 - m\,a_B$

$\Rightarrow T_3 = mg - ma$

• $m^{vt}$ de la poulie de centre D :

$$\vec{\mathcal{M}}_{0,\vec{T_2}'} + \vec{\mathcal{M}}_{0,\vec{T_2}} + \vec{\mathcal{M}}_{0,\vec{R_2}} + \vec{\mathcal{M}}_{0,\vec{P_2}} + \vec{\mathcal{M}}_{couple} = J\ddot{\theta}\,\vec{k}$$

$(\cdot\vec{k})$ : $T_2' r - T_2 r - C = J\ddot{\theta} = \frac{1}{2} m' r^2 \ddot{\theta}$

frottem$^t$ dc s'oppose au $m^{vt}$

Moment d'inertie J

• $m^{vt}$ de A :

$$\vec{T_1} + \vec{P_1} + \vec{R_1} + \vec{F_1} = M\,\vec{a_A}$$

$(\cdot\vec{x})$ : $T_1 - F_1 = M\,a_A$

• A et B ont $\bar{m}$ vitesse.

Condition de non glissem$^t$ du fil sur la poulie : $v = r\dot{\theta}$, $a = r\ddot{\theta}$ $\frac{d}{dt}$

et $a_B = a_A = a$

D'où : $T_1 = F_1 + M a_A$

$T_2' r - T_2 r - C = \frac{1}{2} m' r^2 \frac{a}{r}$

• les fils sont inextensibles et de masses négligeables

$T_1 = T_2$ et $T_2' = T_3$.

Donc $(mg - ma)r - (F_1 + Ma)r - C = \frac{1}{2} m' r^{\cancel{2}} \frac{a}{\cancel{r}}$

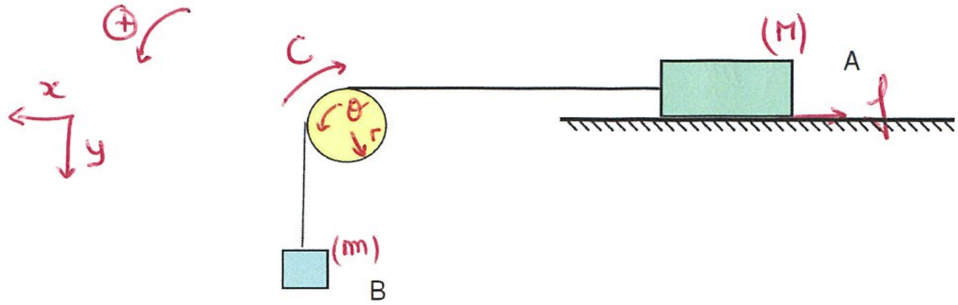
ccl : $$a = \frac{mg - F_1 - C/r}{m + M + m'/2} = \frac{2(mgr - F_1 r - C)}{r(2m + 2M + m')}$$

## EQUATION DE LAGRANGE

/5

On reprend l'étude des deux masses A et B (de masses respectives M et m) reliées par un fil inextensible et de masse négligeable passant sur la gorge d'une poulie (rayon r, inertie J).

Rappel : Le couple de frottement de la poulie vaut C, le frottement de la masse A sur le sol est représenté par une force d'intensité f opposée au mouvement.




1- Déterminer l'équation du mouvement de la masse B.

Etapes : -Déterminer les énergies cinétiques et potentielles de l'ensemble étudié. (N'oubliez pas d'énoncer les hypothèses permettant d'établir vos relations)
-Ecrire les travaux virtuels des efforts extérieurs.
-Ecrire l'équation de Lagrange pour déterminer l'équation du mouvement de la masse B.

Energies cinétiques

- $E_{c_B} = \frac{1}{2} m \dot{y}^2$ $\quad E_{c_A} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$ $\quad E_{c_P} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$
- fil extensible $\rightarrow \dot{x} = \dot{y}$
- Rsg fil / poulie $\rightarrow \dot{y} = r\dot{\theta}$ $\quad \Rightarrow \sum E_c = \frac{1}{2}\dot{y}^2\left(m + M + \frac{J}{r^2}\right)$

Energie potentielle

$E_{P_B} = mgy$

$\mathcal{L} = E_c - E_p$ $\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \ddot{y}\left(m + M + \frac{J}{r^2}\right) - mg$

Travaux virtuels

$\delta W = -C\delta\theta - f\delta x = -\left(\frac{C}{r} + f\right)\delta y$

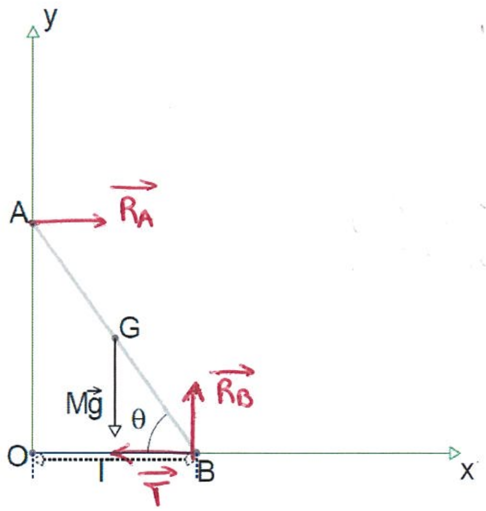
$\frac{\delta W}{\delta y} = -\left(\frac{C}{r} + f\right)$

$\rightarrow$ Equation de Lagrange $\Rightarrow \ddot{y}\left(m + M + \frac{J}{r^2}\right) - mg = -\left(\frac{C}{r} + f\right)$

$$\boxed{\Rightarrow \ddot{y}\left(m + M + \frac{J}{r^2}\right) - mg + \frac{C}{r} + f = 0}$$

## THEOREME DES TRAVAUX VIRTUELS (/5)

Un artisan utilise une échelle de hauteur $\|\overrightarrow{AB}\| = L$ et de masse $M$ pour peindre un mur. Les extrémités de l'échelle s'appuient sur le mur et le sol, voir figure ci-contre. Le pied de l'échelle est attaché au point $O$ du mur par l'intermédiaire d'une corde inextensible de longueur $l$ et de masse négligeable de façon que l'échelle fasse un angle $\theta$ et assure sa stabilité. Soit $G$ le centre de gravité de l'échelle. Les frottements en $A$ et en $B$ sont nuls.




1. Dénombrer les forces appliquées à l'échelle

- le poids : $M\vec{g}$
- la réaction au point A : $\overrightarrow{R_A}$
- la réaction au point B : $\overrightarrow{R_B}$
- la tension du fil : $\vec{T}$

2. Quel est le type de liaison en B ? Justifier la réponse.

Exprimer OA et OB en fonction de L et Θ

$\vec{R_B} = R_B . \vec{y}$

$OB = \ell$

Inutile

$\vec{OB} = \vec{OG} + \vec{GB} = x_G \vec{x} + y_G \vec{y} + \frac{L}{2}(\cos\theta \vec{x} - \sin\theta \vec{y})$

$= (x_G + \frac{L}{2}\cos\theta)\vec{x} + (y_G - L/2 \sin\theta)\vec{y}$.

$\Rightarrow OB^2 = \ell^2 = (x_G + \frac{L}{2}\cos\theta)^2 + (y_G - L/2 \sin\theta)^2$

$OA = L . \sin\theta$

$OB = L . \cos\theta$

3. On se propose de calculer la tension du fil $\vec{T}$. On cherche à éliminer les réactions du mur sur l'échelle, $\vec{R}_A$, et du sol sur l'échelle, $\vec{R}_B$.

**3-a)** Quel déplacement virtuel doit-on effectuer ? Justifier le choix.

A glisse sur le mur $\Rightarrow$ le travail de $R_A$ est nul (car $\perp$ au mvt).

B glisse sur le sol. $\Rightarrow$ idem pour $R_B$.

Déplacement virtuel de $\theta + \delta\theta$

**3-b)** Exprimer le travail élémentaire de l'échelle

$\hookrightarrow$ le poids & le fil travaillent.

$\delta W = M\vec{g} . \delta\vec{OG} + \vec{T} . \delta\vec{OB}$

$= -Mg \frac{L}{2}\cos\theta\, \delta\theta + LT\sin\theta . \delta\theta$

$= -(\frac{Mg}{2}\cos\theta - T\sin\theta) L \delta\theta$

$\vec{OG} = \frac{L}{2}(\cos\theta \vec{x} + \sin\theta \vec{y})$

$\vec{OB} = L . \cos\theta \vec{x} \Rightarrow \delta\vec{OB} = -L\sin\theta . \delta\theta \vec{x}$

$\delta\vec{OG} = \frac{L}{2}(-\sin\theta \vec{x} + \cos\theta \vec{y})\delta\theta$

**3-c)** En utilisant le principe des travaux virtuels, montrer que

$$\|\vec{T}\| = \frac{1}{2} Mg \mathrm{cotg}\theta.$$

$\frac{Mg}{2}\cos\theta - T\sin\theta = 0 \Rightarrow T = \frac{Mg}{2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$T = \frac{Mg}{2}\mathrm{cotg}\theta$ $\quad (\mathrm{cotg}\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta})$

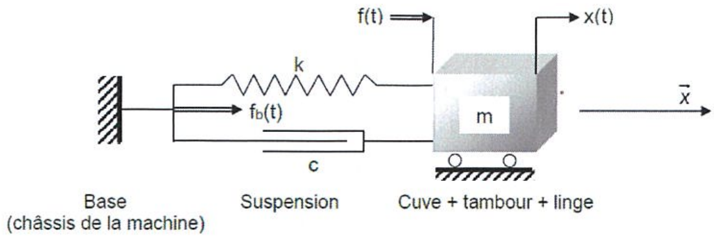
## MODELISATION NUMERIQUE

/5

Dans une machine à laver le linge, au cours de l'essorage, le linge s'accumule sur un côté du tambour. La force centrifuge qui s'exerce sur lui possède un module constant, et une direction tournante. En projection sur un axe x , elle donne une force sinusoïdale f(t) , dont la fréquence est celle de la rotation du tambour.

Pour éviter de transmettre des vibrations excessives à la machine, et à son environnement, on suspend la cuve contenant le tambour par une suspension souple, que l'on modélise ici, selon la direction x , par un oscillateur élémentaire en translation.

Raideur du ressort : 15000 N/m
Coefficient d'amortissement : 800 N.s/m
Masse de l'ensemble : 10 kg




En régime harmonique, on montre que x(t) est de la forme $x(t)=X.\cos(\omega.t+\varphi)$

1- Exprimer l'effort sur le bâti $f_b(t)$ fonction de x(t) puis calculer son amplitude fonction de X, ω, c et k.

Effort sur le bâti du au ressort et à l'amortisseur

Donc $f_b(t) = k\,x(t) + c\,\dot{x}(t)$

$x(t)$ de la forme $X.\cos(\omega t + \varphi)$

donc $f_b(t) = k.X\cos(\omega t+\varphi) - cX\omega\sin(\omega t+\varphi)$

$f_b(t)$ est de la forme $\sqrt{k^2X^2 + c^2X^2\omega^2}\,.\cos(\dots)$

Donc l'amplitude de $f_b(t)$ est $\sqrt{k^2X^2+c^2X^2\omega^2}$

2- Expliquer pourquoi on choisit les caractéristiques de l'oscillateur de manière à éviter que sa fréquence propre soit proche de celle de la rotation du tambour. Calculer cette fréquence propre.

Si la fréquence propre de l'oscillateur est proche de la fréquence de rotation du tambour, l'amplitude des efforts liée à la force centrifuge sera amplifiée au niveau du bâti, provoquant des vibrations et donc de la bruyance et une dégradat° de la machine

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{15000}{10}} = 38,73 \text{ rad/s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 6,16 \text{ Hz.}$$

3- Proposer à l'aide des éléments ci-dessous un modèle Dymola permettant de simuler l'essorage de la machine à laver (tous les composants ne doivent pas être utilisés !). Préciser la valeur des paramètres.