

**EXAMEN Mécanique 3 IMACS - I3MAPH31**  
**INSA 2020 – 2021** Durée : 1h10

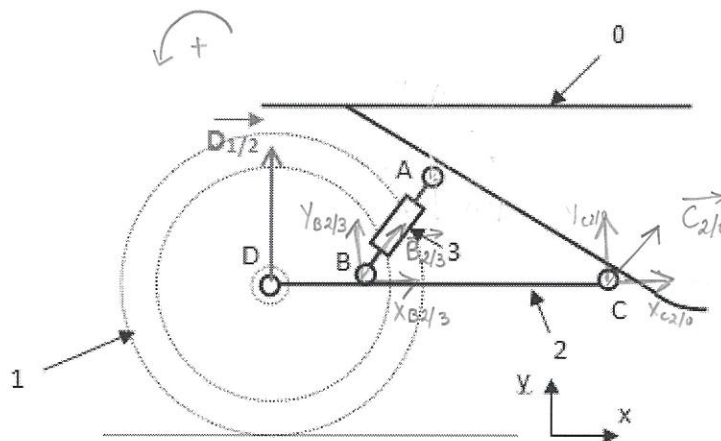
/20

L'usage de tout document est formellement interdit. Les calculatrices sont autorisées pour un usage personnel.

Vous porterez une attention particulière à la rédaction, l'application des théorèmes et unités.

PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE

Le système étudié est la suspension arrière de moto représentée ci-dessous :



0 - Cadre  
 1 - Roue  
 2 - Bras oscillant  
 3 - Amortisseur  
 BD = a = 200 mm  
 BC = b = 550 mm  
 D<sub>1/2</sub> = 2000 N

Poids des pièces négligeables.  
 Angle  $(\vec{BA}, \vec{BC}) = 58^\circ$

1,5 Question 1 : Effectuer l'inventaire des forces (point, direction, sens, intensité)

Force	Point	Direction	sens	Intensité
$\vec{D}_{1/2}$	D	verticale	↑	2000 N
$\vec{C}_{2/0}$	C	?	?	?
$\vec{B}_{2/3}$	B	(AB)	↗	?
$\vec{P}$	G	Négligeable		

1,5 par force

2,5 Question 2 : A l'aide d'une démarche rigoureuse et du PFS, calculer les efforts suivants :

- Force au point C
- Force dans l'amortisseur AB.

• Isolons le solide (2) soumis à 3 forces

• PFS :  $\sum \vec{F}_{ext/2} = \vec{0}$

$$\vec{D}_{1/2} + \vec{C}_{0/2} + \vec{B}_{3/2} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_{C0/2} + X_{B3/2} = 0 & / \vec{x} \quad (1) \\ Y_{D1/2} + Y_{C0/2} + Y_{B3/2} = 0 & / \vec{y} \quad (2) \end{cases}$$

0,5

$$\sum \vec{M}_{F_{ext}/2, c} = \vec{0}$$

$$\text{en } \vec{z}: -Y_{D/2} (b+a) - Y_{B3/2} b = 0 \Rightarrow Y_{B3/2} = -Y_{D/2} \times \frac{(b+a)}{b} = -2727 \text{ N}$$

on en déduit donc:

$$(2) Y_{C0/2} = -Y_{B3/2} - Y_{D/2} = -Y_{D/2} \left( \frac{b+a}{b} + 1 \right) = 727 \text{ N}$$

$$\bullet \text{ OR } \gamma = 58^\circ \text{ donc } \tan 58 = \frac{Y_{B3/2}}{X_{B3/2}} \Rightarrow X_{B3/2} = -Y_{D/2} \times \frac{(b+a)}{b \times \tan 58} = -1704 \text{ N}$$

$$(1) X_{C0/2} = -X_{B3/2} = Y_{D/2} \frac{(b+a)}{b \times \tan 58} = 1704 \text{ N}$$

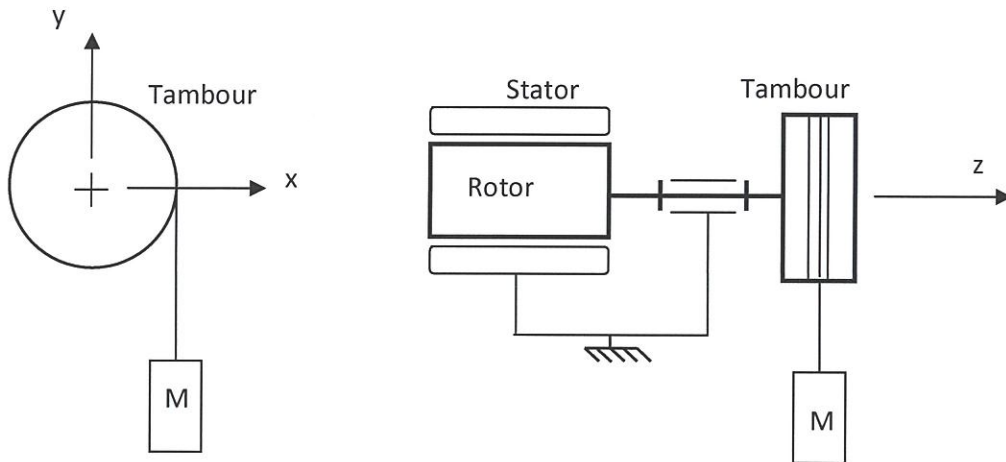
$$\bullet \text{ Dans l'amortisseur: } B = \sqrt{X_{B3/2}^2 + Y_{B3/2}^2} = 3216 \text{ N}$$

### PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE

Le système ci-dessous est composé d'un tambour de masse  $m$ , Diamètre  $D$ , épaisseur  $e$  et d'un rotor d'inertie  $J$  autour de l'axe  $z$ .

Un couple frottant  $C_f$  s'exerce dans le palier suivant l'axe  $z$ .

La corde, indéformable, de masse négligeable, s'enroule sans glissement autour du tambour.



**Question 3 :** Calculer le couple que doit exercer le moteur au démarrage pour obtenir une vitesse de rotation du tambour  $N_t$  en un temps  $t_a$ .

• Isolons le système { tambour + rotor }

• PFD en rotation autour de l'axe  $\vec{z}$

$$J_{\text{tambour+rotor}} \ddot{\theta} = \sum \vec{M}_{F_{ext}, z} = C_{\text{moteur}} - C_f - C_{\text{masse}}$$

$$\text{or } J_{\text{tambour+rotor}} = J + \frac{m D^2}{8} \leftarrow \text{tambour}$$

Rq: tous deux possèdent le même axe.

$$\text{De plus } C_{\text{masse}} = P \times \frac{D}{2} = Mg \frac{D}{2}$$

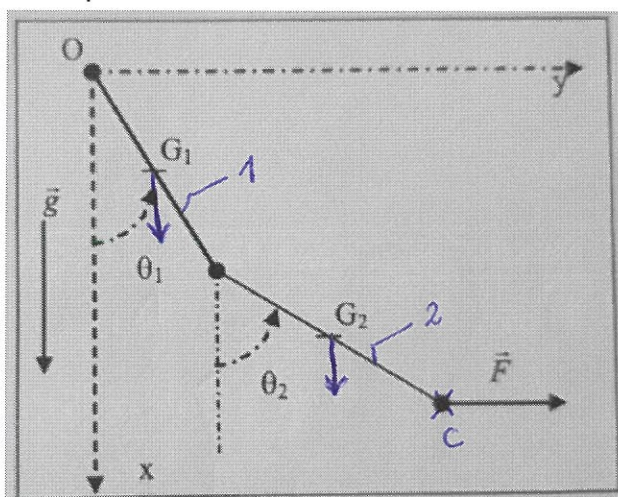
0,5  $\ddot{\theta} = \frac{\omega}{t_a}$  avec  $\omega = \frac{N_s \pi}{30}$

Ainsi  $(J + \frac{mD^2}{8}) \frac{N_s \pi}{30 t_a} = C_{moteur} - C_f - \frac{MgD}{2}$

$\Rightarrow C_{moteur} = (J + \frac{mD^2}{8}) \frac{N_s \pi}{30 t_a} + C_f + \frac{MgD}{2}$

### THEOREME DES TRAVAUX VIRTUELS

Un pendule double, constitué de deux tiges identiques, de masse  $m$ , de longueur  $l$ , est écarté de sa position d'équilibre verticale, grâce à une force horizontale  $F$  appliquée à l'extrémité de la tige inférieure. Les liaisons aux deux articulations sont parfaites.



5) **Question 4 :** Trouvez à l'aide du théorème des travaux virtuels, les valeurs des angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , que font, avec la verticale descendante, ces deux tiges à l'équilibre.

Aide au raisonnement :

- Définir le système à isoler
- Répertorier les forces extérieures et leur point d'application
- Déterminer les coordonnées des points d'application des forces
- Calculer les variations élémentaires de ces positions
- Appliquer le théorème des travaux virtuels
- Résoudre l'équation pour obtenir  $\theta_1$  et  $\theta_2$

• système isolé : 2 tiges

• Forces extérieures : poids de la barre 1 en  $G_1 \rightarrow$  suivant  $\vec{x}$   
 poids " 2 en  $G_2 \rightarrow$  suivant  $\vec{x}$

force horizontale  $F$  à l'extrémité de la barre 2 (pt C)  $\rightarrow$  suivant  $\vec{y}$

0,5  
1,5

$$G_1 \begin{pmatrix} \frac{l}{2} \cos \theta_1 \\ \frac{l}{2} \sin \theta_1 \end{pmatrix} \quad G_2 \begin{pmatrix} l \cos \theta_1 + \frac{l}{2} \cos \theta_2 \\ l \sin \theta_1 + \frac{l}{2} \sin \theta_2 \end{pmatrix} \quad C \begin{pmatrix} l (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \\ l (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) \end{pmatrix}$$

1,5

$$\delta x_{G_1} = -\frac{l}{2} \sin \theta_1 \delta \theta_1 \quad \delta x_{G_2} = -l \sin \theta_1 \delta \theta_1 - \frac{l}{2} \sin \theta_2 \delta \theta_2 \quad \delta y_C = l (\cos \theta_1 \delta \theta_1 + \cos \theta_2 \delta \theta_2)$$

• Théorème travaux virtuels :  $\delta W = 0$  (liaisons parfaites, système à l'équilibre)

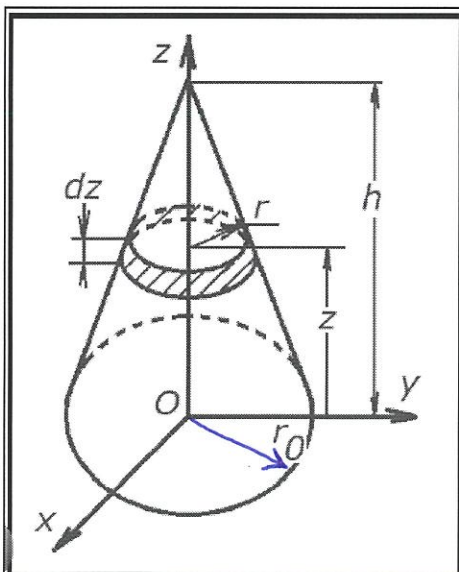
0,5

$$\begin{aligned} \delta W &= mg \delta x_{G_1} + mg \delta x_{G_2} + F \delta y_C = 0 \\ &= -\frac{mgl}{2} \sin \theta_1 \delta \theta_1 - mgl \sin \theta_1 \delta \theta_1 - mgl \frac{1}{2} \sin \theta_2 \delta \theta_2 + Fl \cos \theta_1 \delta \theta_1 + Fl \cos \theta_2 \delta \theta_2 \\ &= \underbrace{\left( -\frac{3}{2} mgl \sin \theta_1 + Fl \cos \theta_1 \right)}_{=0} \delta \theta_1 + \underbrace{\left( Fl \cos \theta_2 - \frac{mgl}{2} \sin \theta_2 \right)}_{=0} \delta \theta_2 = 0 \end{aligned}$$

CENTRE DE MASSE ET MOMENT D'INERTIE

$$\Rightarrow \tan \theta_1 = \frac{2F}{3mg} \quad \tan \theta_2 = \frac{2F}{mg}$$

(Question 5 : Déterminer le centre de masse d'un cône de révolution, homogène, de rayon de base  $r_0$  et de hauteur  $h$ . Question supprimée de l'examen)



• le centre de masse  $G$  axe de symétrie du cône

$$\Rightarrow x_G = y_G = 0.$$

•  $z_G = \frac{\int z dV}{\int dV}$  avec  $dV = \pi r^2 dz$ .  $\triangleq$  dépendance entre  $r$  et  $z$   
 et  $\frac{r_0}{r} = \frac{h}{h-z}$  (Thalès)

$$\begin{aligned} \int dV &= \int_0^h \pi r^2 dz = \int_0^h \pi (h-z)^2 \frac{r_0^2}{h^2} dz = \frac{\pi r_0^2}{h^2} \int_0^h (h^2 - 2hz + z^2) dz \\ &= \frac{\pi r_0^2}{h^2} \left[ h^2 z - hz^2 + \frac{z^3}{3} \right]_0^h = \frac{\pi r_0^2}{h^2} \times \frac{h^3}{3} = \frac{\pi r_0^2 h}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int z dV &= \int_0^h z (\pi r^2) dz = \frac{\pi r_0^2}{h^2} \int_0^h (hz - 2hz^2 + z^3) dz \\ &= \frac{\pi r_0^2}{h^2} \left[ \frac{h^2 z^2}{2} - \frac{2hz^3}{3} + \frac{z^4}{4} \right]_0^h = \frac{\pi r_0^2}{h^2} \left( \frac{h^4}{4} - \frac{2h^4}{3} + \frac{h^4}{4} \right) \\ &= \frac{\pi r_0^2 h^2}{12} \end{aligned}$$

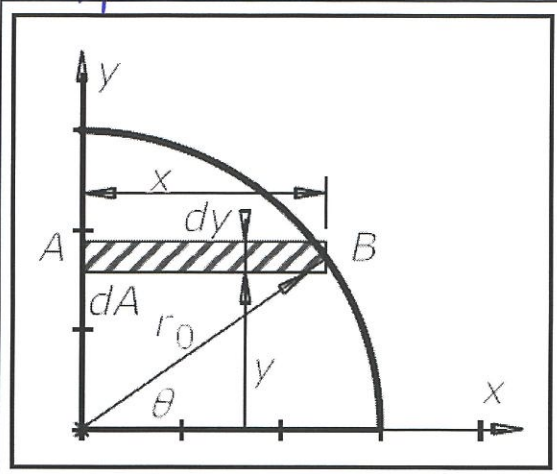
cl :  $z_G = \frac{\frac{\pi r_0^2 h^2}{12}}{\frac{\pi r_0^2 h}{3}} = \frac{h}{4}$

$$G \left( 0; 0; \frac{h}{4} \right)$$

2,5

Question 6 : Déterminer le moment d'inertie selon z d'une surface A homogène constituée d'un quart de disque de rayon r0.

↳ plus



•  $I_z = \int r^2 dm$       $\overset{0,5}{ds} = r dr d\theta$

•  $\rho_s = \frac{dm}{ds}$  (densité surfacique)

•  $I_z = \rho_s \int_0^{r_0} \int_0^{\pi/2} r^2 r dr d\theta$

$= \rho_s [\theta]_0^{\pi/2} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^{r_0} = \rho_s \frac{\pi}{2} \frac{r_0^4}{4}$

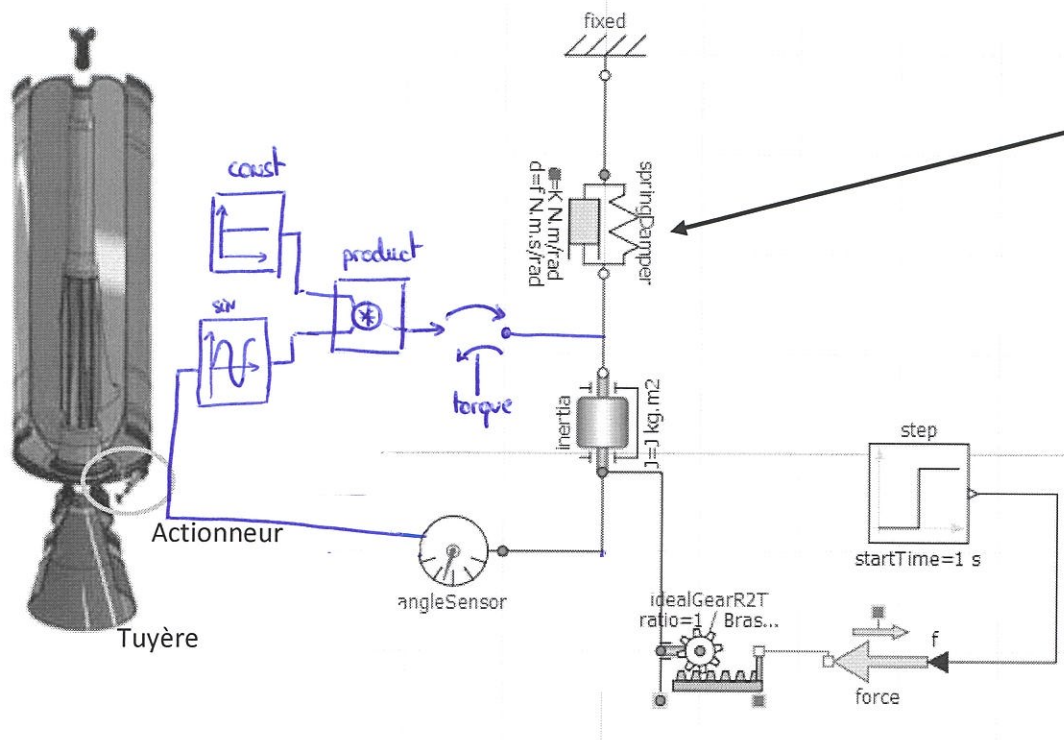
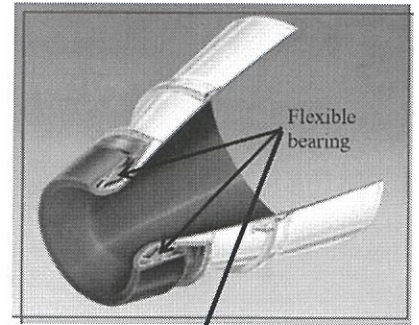
•  $\rho_s = \frac{M}{\left(\frac{\pi r_0^2}{4}\right)}$      0,5

Donc  $I_z = M \times \frac{4}{\pi r_0^2} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{r_0^4}{4} = \frac{M}{2} r_0^2$

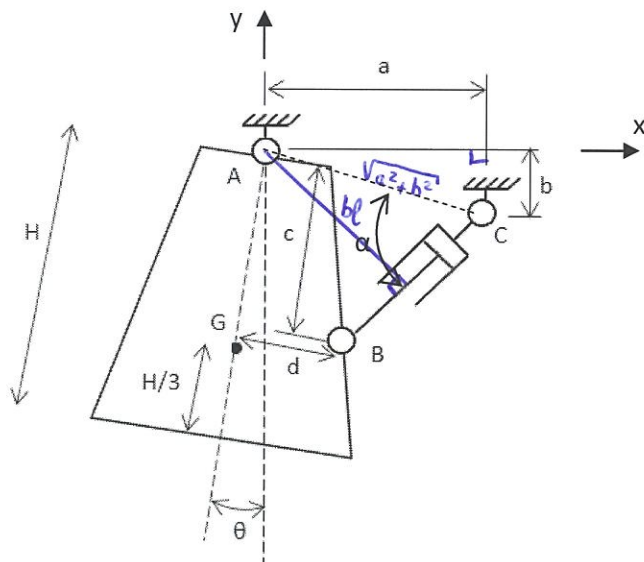
$\overset{0,5}{I_z = \frac{M}{2} r_0^2}$

## MODELISATION NUMERIQUE

Vous trouvez ci-dessous le modèle de la tuyère (composant « Inertia ») avec sa fixation sur le bâti modélisé par le composant « SpringDamper ». L'actionneur est modélisé par le composant « force ». Le composant « bras de levier » permet de modéliser la transformation de mouvement de translation du vérin en une rotation de la tuyère. (Le bras de levier est fonction de l'angle de rotation de la tuyère mais dans le cas de faibles déplacements angulaires qui nous intéressent, on considèrera cette valeur constante)



Dans ce modèle, le composant « SpringDamper » correspond à une raideur et un amortissement en rotation suivant l'axe A,z (schéma ci-dessous)



- a = 1500 mm
- b = 200 mm
- c = 1150 mm
- d = 950 mm
- H = 2.5 m
- Angle [AC],[CB] =  $\alpha$  (pour  $\theta=0^\circ$ ) =  $67.5^\circ$
- Masse tuyère m = 1600 kg
- K =  $2.809 \cdot 10^6$  N.m/rad

Question 7: En appliquant le théorème de votre choix, calculer l'angle de rotation  $\theta$  de la tuyère si l'actionneur exerce une force de 196 000 N. On négligera le poids de la tuyère par rapport à la raideur du ressort.

PFS sur la tuyère en A

↳ on remarque que le poids est négligeable.

$$C_{ressort} + C_{verin} = 0$$

$$K\theta - F_{verin} \times b \ell = 0$$

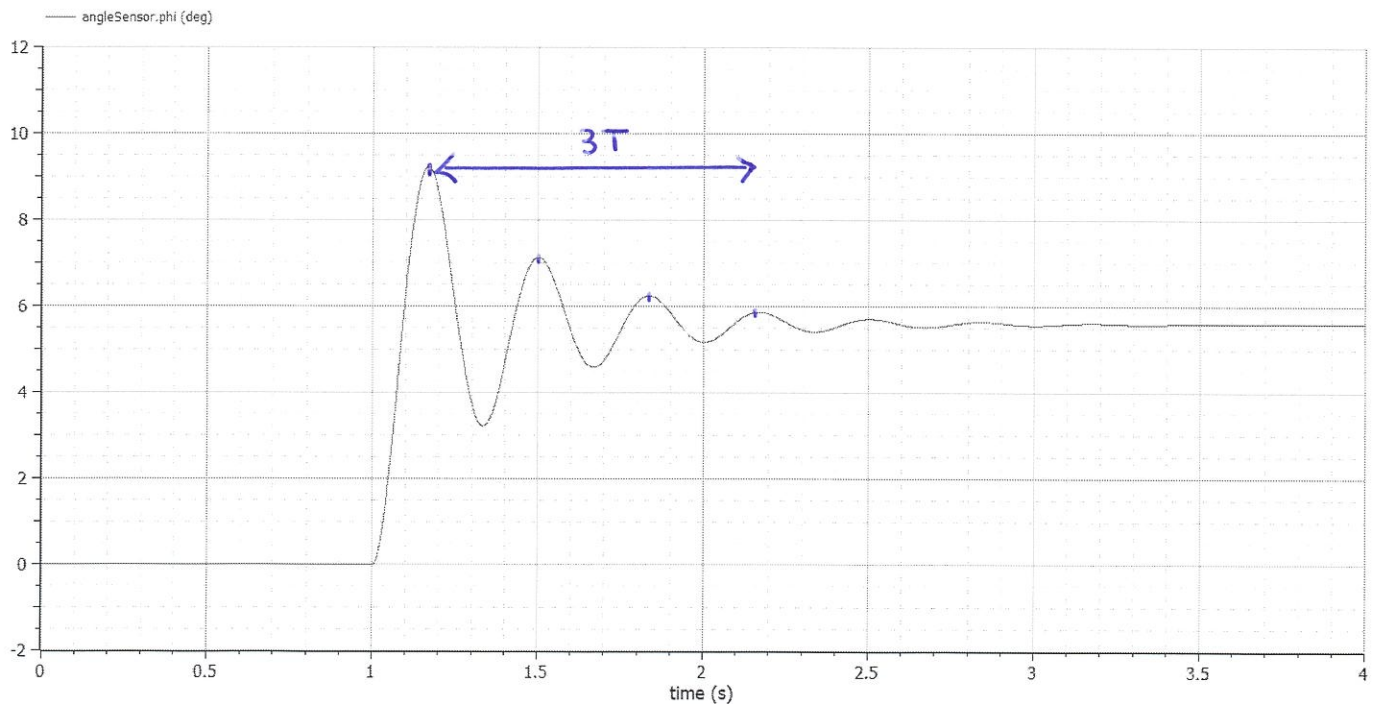
$$\text{avec } b \ell = \sin \alpha \times AC = \sin \alpha \times \sqrt{a^2 + b^2}$$

(cf schéma)

$$\Rightarrow \theta = \frac{F_{verin} \sin \alpha \sqrt{a^2 + b^2}}{K}$$

AN:  $\theta \approx 0,097 \text{ rad} \approx 5,6^\circ$

Le graphe suivant représente le déplacement angulaire de la tuyère.



1,5

**Question 8:** Par prise de points de mesure sur le graphe, calculer la fréquence des oscillations de la partie transitoire. Comparer ce résultat avec la fréquence propre théorique de ce système (Le calcul de la fréquence propre d'un système en rotation se calcule de la même façon que pour un système masse ressort en translation avec la correspondance masse → inertie et ressort de compression → ressort de torsion)

0,5

0,5

A l'aide du graphique, on mesure  $3T = 2,18 - 1,18 = 1s$

$T = \frac{1}{3} s \Rightarrow f = 3 \text{ Hz.}$

OR  $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{J}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2,809 \times 10^6}{7800}} = 3 \text{ Hz.}$

ok!

0,5

La réponse à l'échelon montre un important dépassement angulaire par rapport à la valeur en régime établie.

**Question 9:** Proposer une modification d'un paramètre permettant de limiter ce dépassement.

0,5

Il est possible de modifier: - plus grande raideur du ressort  
- plus d'amortissement

On souhaite ajouter sur ce modèle l'influence du poids de la tuyère lorsque celle-ci est inclinée par rapport à l'axe vertical.

**Question 10 (BONUS):** A l'aide des composants suivants, compléter le modèle initial afin de prendre en compte le poids de la tuyère.

