

Analyse spectrale et équation équivalente

UF « Modélisation et calcul scientifique »
Formation ModIA « Modélisation et Intelligence Artificielle »

Nicolas Bertier (nicolas.bertier@onera.fr)

INSA, 4A

Version du document : 2.0 (dernières modification le 10/01/2023)

Sauf exceptions dûment mentionnées, le contenu de ce cours est sous licence **Creative Commons Attribution - Partage dans les Mêmes Conditions** 4.0 International .

Pour accéder à une copie de cette licence, merci de vous rendre à l'adresse suivante : <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

Plan du cours

- Exemples de simulations numérique récentes en CFD
- Introduction aux méthodes de différences finies
- Le point sur l'intégration temporelle
- **Analyse spectrale et équation équivalente**
- Monotonie et limiteurs
- Introduction aux méthodes de volumes finis
- Vers la résolution des équations de Navier-Stokes

Rappel de l'équation modèle de convection-diffusion

Equation modèle de convection-diffusion

On rappelle l'expression de l'équation de convection-diffusion :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Description du problème modèle

- On cherche à résoudre cette équation d'évolution sur un domaine de taille L , avec conditions aux limites de périodicité $u(0, t) = u(L, t)$ et une condition initiale $u(x, 0)$.
- On peut alors définir un nombre de Reynolds basé sur la longueur caractéristique L :

$$\mathcal{R}_L = \frac{aL}{\kappa}$$

Etude de l'équation modèle de convection-diffusion

Développement en série de Fourier

La solution $u(x, t)$ étant périodique en espace, elle peut s'écrire sous la forme d'un développement en série de Fourier infini par rapport à x :

$$u(x, t) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} A_{\alpha}(t) e^{jk_{\alpha}x}$$

- Comme la solution dépend du temps, les coefficients $A_{\alpha}(t)$ de la série de Fourier en dépendent également.
- Pour déterminer l'expression des $A_{\alpha}(t)$, on réinjecte le développement en série de Fourier dans l'équation modèle

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} e^{jk_{\alpha}x} \left(\frac{dA_{\alpha}}{dt} + jaA_{\alpha}k_{\alpha} + \kappa A_{\alpha}k_{\alpha}^2 \right) = 0$$

Etude de l'équation modèle de convection-diffusion

Détermination de l'expression des coefficients $A_\alpha(t)$

Les $e^{jk_\alpha x}$ forment une famille libre, on a alors :

$$\frac{dA_\alpha}{dt} + A_\alpha (\kappa k_\alpha^2 + j a k_\alpha) = 0$$

On pose alors :

$$\lambda_\alpha = - (\kappa k_\alpha^2 + j a k_\alpha)$$

Soit :

$$\frac{dA_\alpha(t)}{A_\alpha(t)} = \lambda_\alpha dt$$

Cette équation différentielle homogène du premier ordre a pour solution :

$$A_\alpha(t) = B_\alpha e^{\lambda_\alpha t}$$

Etude de l'équation modèle de convection-diffusion

On réinjecte l'expression de $A_\alpha(t)$ dans la décomposition en série de Fourier de $u(x, t)$:

$$u(x, t) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} B_\alpha e^{\lambda_\alpha t} e^{jk_\alpha x} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} B_\alpha e^{jk_\alpha x + \lambda_\alpha t}$$

Détermination de l'expression de la constante d'intégration B_α

B_α est déterminée en utilisant la condition initiale $u(x, 0)$:

$$u(x, 0) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} B_\alpha e^{jk_\alpha x}$$

Il s'agit maintenant d'une série de Fourier « classique », pour laquelle le coefficient de Fourier B_α est défini par l'intégrale :

$$B_\alpha = \frac{1}{L} \int_0^L u(x, 0) e^{-jk_\alpha x} dx$$

Etude de l'équation modèle de convection-diffusion

Synthèse de l'écriture de l'équation modèle de convection-diffusion sous forme d'une série de Fourier infinie

$$u(x, t) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} B_{\alpha} e^{jk_{\alpha}x + \lambda_{\alpha}t} \quad \text{avec} \quad B_{\alpha} = \frac{1}{L} \int_0^L u(x, 0) e^{-jk_{\alpha}x} dx$$

Notion de vitesse complexe

Définition de la vitesse complexe

La solution $u(x, t)$ peut également s'écrire :

$$u(x, t) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} B_{\alpha} e^{jk_{\alpha}(x - v_{\alpha}t)}$$

avec la **vitesse complexe** v_{α} , définie par :

$$v_{\alpha} = j \frac{\lambda_{\alpha}}{k_{\alpha}}$$

Expression de la vitesse complexe en fonction de a et κ

En remplaçant λ_{α} par son expression, il vient :

$$v_{\alpha} = a - j\kappa k_{\alpha}$$

Equation de dispersion

Equation de dispersion

$$\frac{v_\alpha}{a} = 1 - j \frac{\kappa k_\alpha}{a} = 1 - j \frac{k_\alpha L}{\mathcal{R}_L}$$

- La partie **réelle** de l'équation de dispersion est associée à l'**advection** et la partie **imaginaire** à la **diffusion**
- Pour un Reynolds de maille fixé, les petites longueurs d'onde sont plus diffusées que les grandes.

Ecriture matricielle du schéma

Développement au premier ordre de $F(U)$

Développement au premier ordre de $F(U)$ autour d'un état U_e :

$$F(U) = F(U_e) + \frac{\partial F}{\partial U} (U - U_e)$$

F étant linéaire par rapport à U (équation modèle et schéma linéaires), ce développement est ici exact.

Matrice jacobienne J

Soit J la matrice jacobienne du second membre F par rapport au vecteur d'état U :

$$J = \frac{\partial F}{\partial U}$$

Ecriture matricielle du schéma

Développement de $F(U)$ en fonction de U_e et J

F étant linéaire par rapport à U , la matrice jacobienne ne dépend pas de l'état considéré et on peut écrire :

$$F(U) = F(U_e) + J(U - U_e)$$

Etat d'équilibre U_e

On postule que U_e est un **état d'équilibre** soit, par définition :

$$\dot{U}_e = F(U_e) = 0$$

Le développement de $F(U)$ peut alors se réduire à :

$$F(U) = J(U - U_e)$$

Écriture matricielle du schéma

Changement de variable

Afin de simplifier l'écriture du système, on pose $U^* = U - U_e$, soit :

$$\dot{U}^* = JU^*$$

On se ramène ainsi à un système d'EDO sans second membre.

Changement de notation

Pour alléger l'écriture et se conformer aux notations standards, on utilisera dans la suite du cours la notation U à la place de U^* :

$$\dot{U} = JU$$

U représente donc une **variation par rapport à un état d'équilibre** et non directement un état (sauf dans le cas où $U_e = 0$).

Matrice de permutation circulaire P_m

Construction de P_m :

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_m \\ u_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P_m} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{m-1} \\ u_m \end{pmatrix}$$

Propriété :

L'application de cette matrice aux points du cercle discrétisé permet de les faire "tourner" d'une unité dans le sens trigonométrique, en prenant également en compte la condition de périodicité imposant $u_{m+1} = u_1$.

Diagonalisation de P_m

Valeurs propres

Par construction de P_m , ses m valeurs propres λ_m sont toutes des racines m -ièmes de l'unité :

$$\lambda_{m_\alpha} = \left[\exp \left(j \frac{2\pi}{m} \right) \right]^\alpha$$

Système P_m diagonalisé

En utilisant la matrice de changement de base S_m et son inverse S_m^{-1} , P_m peut s'écrire dans sa base propre sous la forme :

$$P_m = S_m \Lambda_m S_m^{-1}$$

où :

- Λ_m est une matrice diagonale contenant les valeurs propres de P_m
- S_m s'obtient à partir des vecteurs propres de P_m .

- └ Décomposition en série de Fourier de l'équation semi-discrète
- └ Etude des propriétés de la matrice de permutation circulaire P_m

Vecteurs propres à droite et à gauche de P_m

Vecteurs propres de P_m à droite V_α

Par définition des vecteurs propres à droite V_α de P_m , on peut écrire :

$$P_m V_\alpha = \lambda_{m_\alpha} V_\alpha$$

Vecteurs propres de P_m à gauche W_α

Par définition des vecteurs propres à gauche de P_m , on peut écrire :

$$W_\alpha^t P_m = \lambda_{m_\alpha} W_\alpha$$

Matrice de changement de base S_m

Matrice de changement de base S_m

La matrice de changement de base S_m peut s'écrire, par définition, à partir des vecteurs propres à droite V_α de P_m :

$$S_m = (V_1 \ V_2 \ \dots \ V_m)$$

Inverse de la matrice de changement de base S_m^{-1}

L'inverse de la matrice de changement de base peut s'écrire, par définition, à partir des vecteurs propres à gauche W_α de P_m :

$$S_m^{-1} = \begin{pmatrix} W_1^t \\ W_2^t \\ \vdots \\ W_m^t \end{pmatrix}$$

Ecriture de la matrice de permutation circulaire P_m diagonalisée

Matrice de permutation circulaire P_m diagonalisée

Ecriture faisant apparaître explicitement ses valeurs et vecteurs propres :

$$P_m = (V_1 \ V_2 \ \dots \ V_m) \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{pmatrix}}_{\Lambda_m} \begin{pmatrix} W_1^t \\ W_2^t \\ \vdots \\ W_m^t \end{pmatrix}$$

Diagonalisation de J

Valeurs propres de J

Point fondamental : le système $J(P_m)$ se **diagonalise dans la même base** que P_m :

$$J(P_m) = S_m \cdot \bar{\Lambda}(\lambda_m) \cdot S_m^{-1}$$

- La matrice de changement de base S_m et son inverse S_m^{-1} restent donc inchangées
- L'expression de $\bar{\Lambda}$ se construira à partir des **valeurs propres de P_m** et du **schéma de discrétisation spatial** considéré.

Etude du schéma décentré d'ordre 2 UPO2VF

Rappel du schéma semi-discret

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{a}{4\Delta x} (u_{i+1} + 3u_i - 5u_{i-1} + u_{i-2}) \quad \forall a > 0$$

Ecriture du système semi-discret fonction de P_m

$$\dot{U} = -\underbrace{\frac{a}{4\Delta x} (P_m + 3I_d - 5P_m^{-1} + P_m^{-2})}_{J(P_m)} U$$

Ecriture de la matrice jacobienne associée

$$J(P_m) = S_m \left[\underbrace{\left(-\frac{a}{4\Delta x} \right) (\Lambda_m + 3I_d - 5\Lambda_m^{-1} + \Lambda_m^{-2})}_{\bar{\Lambda}(\lambda_m)} \right] S_m^{-1}$$

Rappel nombre d'ondes/angle de phase

Nombre d'onde k_α

- Il représente le **nombre de longueurs d'ondes** \mathcal{L}_α dans 2π .
- Dimensionnellement c'est donc **l'inverse d'une longueur** (m^{-1}).
- Chaque nombre d'onde est un multiple du plus petit nombre d'onde :

$$k_\alpha = \alpha k_{min} = \alpha \frac{2\pi}{L}$$

Nombre d'onde réduit ou angle de phase φ_α

- Il est défini à partir de k_α comme :

$$\varphi_\alpha = \Delta x k_\alpha$$

- Il est **sans dimension** et peut se réécrire :

$$\varphi_\alpha = \alpha \frac{2\pi \Delta x}{L} = \alpha \frac{2\pi}{m}$$

Etude du schéma décentré d'ordre 2 UPO2VF

Valeurs propres de J

La matrice des valeurs propres $\bar{\lambda}(\lambda_m)$ étant diagonale, on peut écrire directement :

$$\bar{\lambda}_\alpha = -\frac{a}{4\Delta x} \left\{ \left[e^{\left(\frac{2j\pi}{m}\right)} \right]^\alpha + 3 - 5 \left[e^{-\left(\frac{2j\pi}{m}\right)} \right]^\alpha + \left[e^{-2\left(\frac{2j\pi}{m}\right)} \right]^\alpha \right\}$$

A l'aide de quelques transformations trigonométriques (cf. TD), on arrive à :

$$\bar{\lambda}_\alpha = -\frac{a}{2\Delta x} \left[(1 - \cos(\varphi_\alpha))^2 + j \sin(\varphi_\alpha) (3 - \cos(\varphi_\alpha)) \right]$$

Etude du schéma décentré d'ordre 1 FOU

Rappel du schéma semi-discret FOU

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{a}{\Delta x} (u_i - u_{i-1}) \quad \forall a > 0$$

Matrice jacobienne J

$$J = -\frac{a}{\Delta x} (I_m - P_m^{-1})$$

Valeurs propres

$$\bar{\lambda}_\alpha = -\frac{a}{\Delta x} \left\{ 1 - \left[e^{-j\frac{2\pi}{m}} \right]^\alpha \right\}$$

Soit, en séparant les parties réelle et imaginaire :

$$\bar{\lambda}_\alpha = -\frac{a}{\Delta x} [(1 - \cos \varphi_\alpha) + j \sin \varphi_\alpha]$$

Stabilité

Stabilité au sens de Liapounov

Soit le système semi-discrète en espace :

$$\dot{U} = J(U - U_e)$$

On dit que la position d'équilibre U_e de ce système d'EDO est **stable au sens de Liapounov** ssi, $\forall t > 0$:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \rho > 0 \text{ tel que } |U_0 - U_e| < \rho \Rightarrow |U(t) - U_e| < \epsilon \forall t > 0$$

Stabilité asymptotique

La position d'équilibre d'un système d'EDO est dite asymptotiquement stable si elle est stable au sens de Liapounov et si on vérifie de plus que :

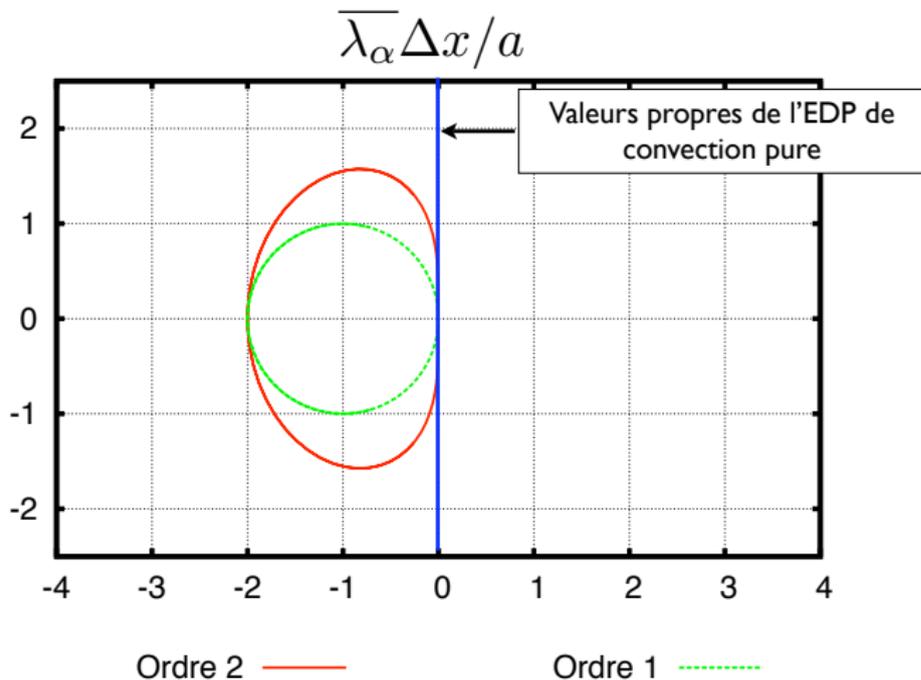
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} U(t) = U_e$$

Stabilité

Théorème

- Si toutes les valeurs propres $\bar{\lambda}$ de la matrice J ont leurs **parties réelles négatives ou nulles**, la position d'équilibre U_e du système linéaire est **stable** au sens de Liapounov.
- Si toutes les valeurs propres de la matrice J ont leurs parties réelles négatives strictement, la stabilité du système est alors asymptotique.

Lieux de $\overline{\lambda}_\alpha \Delta x / a$ pour les schémas FOU et UPO2VF



Solution exacte du système semi-discret en espace

Réécriture du système semi-discret

$$\begin{aligned} \dot{U}(t) &= JU(t) \\ \dot{U}(t) &= S_m \bar{\Lambda} S_m^{-1} U(t) \\ S_m^{-1} \dot{U}(t) &= \bar{\Lambda} S_m^{-1} U(t) \\ S_m^{-1} \dot{U}(t) (S_m^{-1} U(t))^{-1} &= \bar{\Lambda} \end{aligned}$$

Intégration en temps exacte du système semi-discret

Intégration du système par rapport à la variable $(S_m^{-1} \bar{U})$:

$$\begin{aligned} \ln [S_m^{-1} \bar{U}(t)] &= \bar{\Lambda} t + C \\ S_m^{-1} \bar{U}(t) &= e^{\bar{\Lambda} t} C' \end{aligned}$$

Rappel : on note bien \bar{U} la solution exacte du système semi-discret.

Solution exacte du système semi-discrét en espace

Détermination de la constante C'

On applique la condition initiale pour déterminer C' :

$$\bar{U}(t = 0) = U^0 \implies C' = S_m^{-1} U^0$$

Forme finale du système semi-discrét en espace

Soit, en remplaçant C' par son expression :

$$S_m^{-1} \bar{U}(t) = U^0 \exp(\bar{\Lambda} t) S_m^{-1}$$

et finalement :

$$\bar{U}(t) = S_m \exp(\bar{\Lambda} t) S_m^{-1} U^0$$

Cette solution, issue d'une **intégration temporelle exacte** permet de mettre en évidence les propriétés de la **discrétisation spatiale seule**.

Solution exacte du système semi-discrète en espace

Formulation au point courant

$$\bar{u}_i(t) = \frac{1}{m} \sum_{\beta=1}^m \sum_{\alpha=1}^m u_{\beta}^0 \exp [j\varphi_{\alpha} (i - \beta) + \bar{\lambda}_{\alpha} t]$$

Enfin, on peut la mettre sous la forme :

$$\bar{u}_i(t) = \sum_{\alpha=1}^m B_{\alpha} \exp (i\varphi_{\alpha} j + \bar{\lambda}_{\alpha} t) \quad \text{avec} \quad B_{\alpha} = \frac{1}{m} \sum_{\beta=1}^m u_{\beta}^0 \exp (-j\varphi_{\alpha} \beta)$$

Solution exacte du système semi-discrét en espace

Remarques sur le système semi-discrét

- Cette forme met en évidence les liens existants avec la décomposition exacte en série de Fourier de l'équation aux dérivées partielles et la solution de l'équation discrétisée en espace (semi-discrétisée).
- B_α n'est qu'une décomposition en série finie de Fourier de la condition initiale
- la dépendance de la solution par rapport au schéma de discrétisation spatiale utilisé se fait uniquement à travers les valeurs propres $\bar{\lambda}_\alpha$ de la matrice jacobienne J .

Exemple de reconstruction de la solution exacte du système semi-discrète en espace

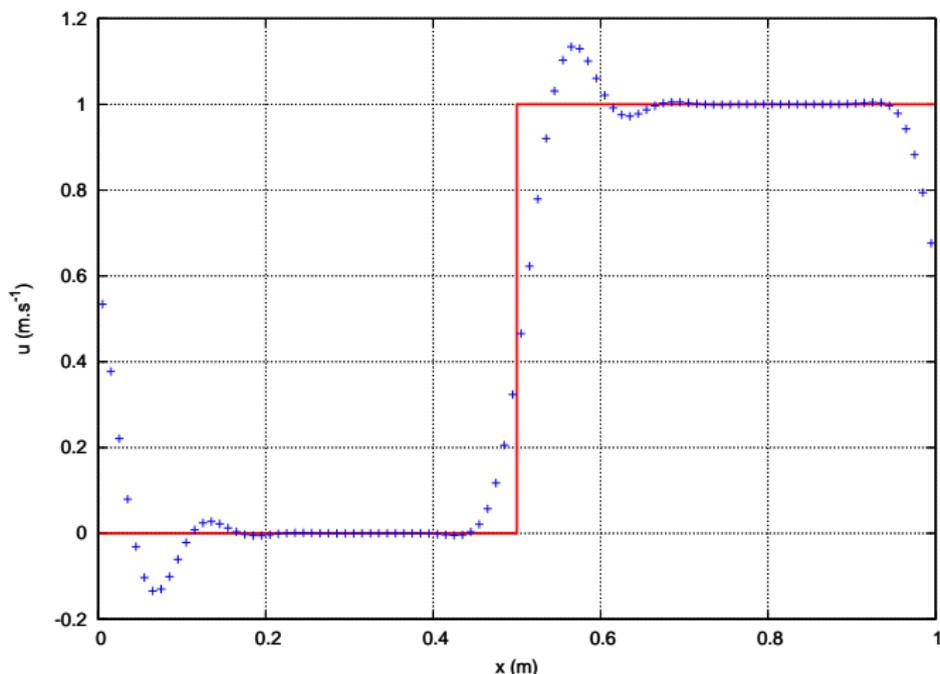
Description du cas-test

On considère une solution u convectée à la vitesse constante $a = 1$ dont la condition initiale est :

$$\begin{cases} u(x, 0) = 1, & \forall x > x_0 \\ u(x, 0) = 0, & \forall x \leq x_0 \end{cases}$$

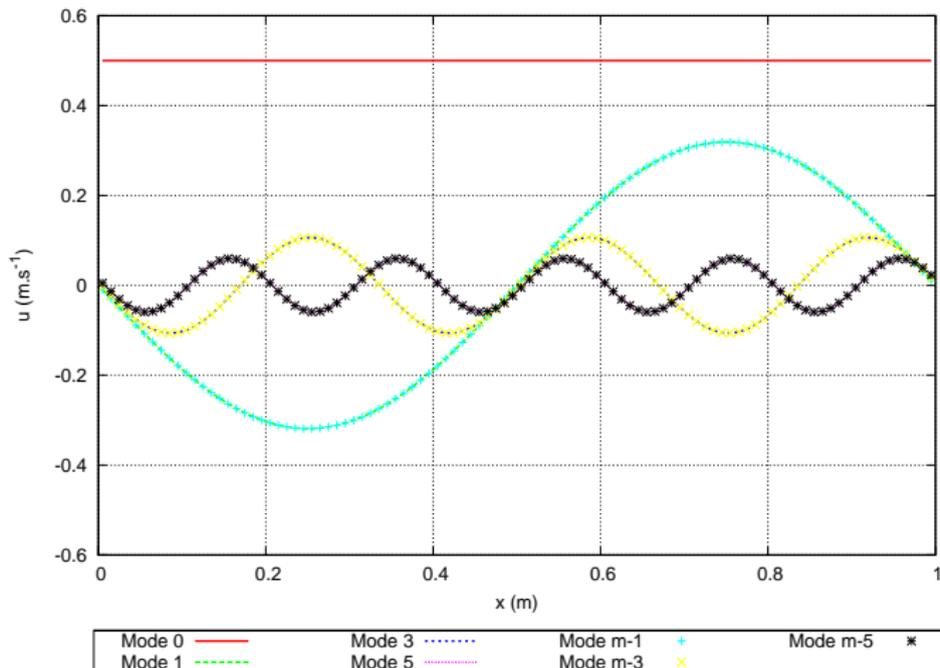
- Domaine de calcul de longueur $L = 1$, discrétisé en $m = 100$ points.
- On s'intéresse à la solution obtenue au terme d'un temps $T_f = 1$
- Méthodes numériques : schéma de discrétisation spatiale décentré d'ordre deux UPO2VF et intégration temporelle exacte.

Solution exacte du système semi-discrét en espace

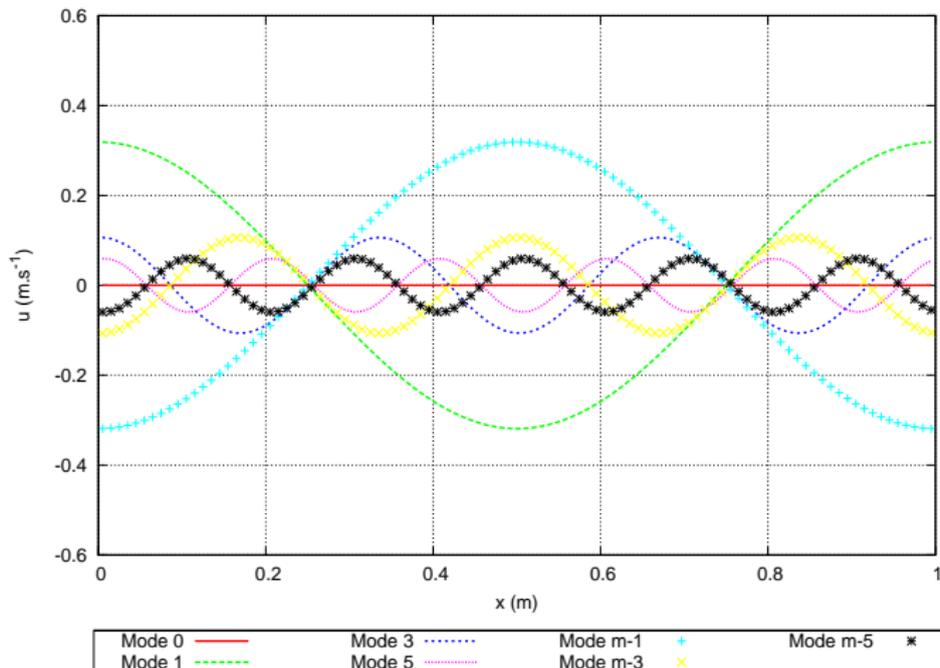


-: Mode 0 , + : Exact

Partie réelle des 7 premiers modes non-nuls



Partie imaginaire des 7 premiers modes non-nuls



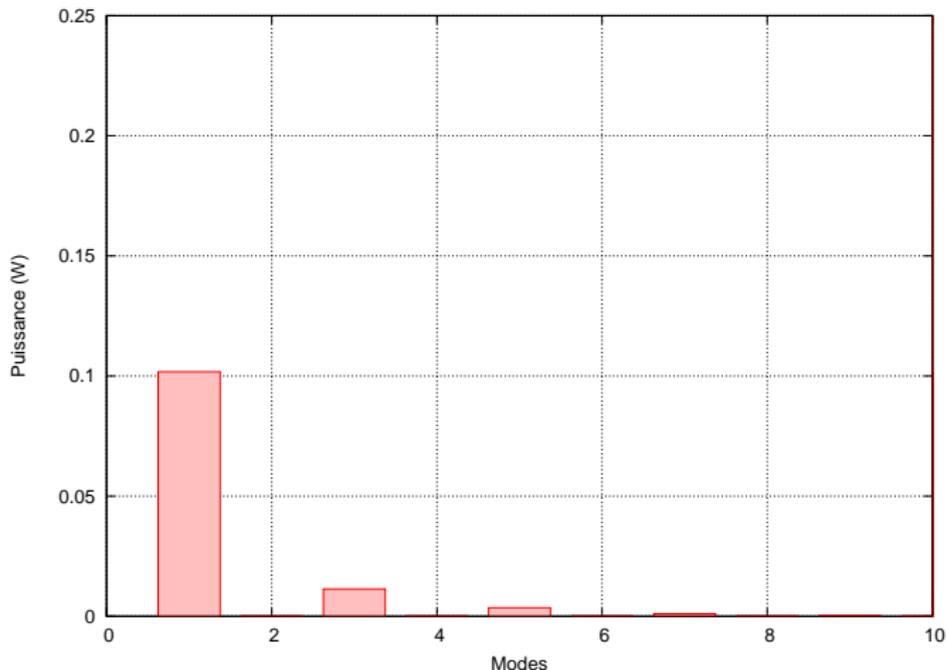
Décomposition modale de la solution

Quelques observations :

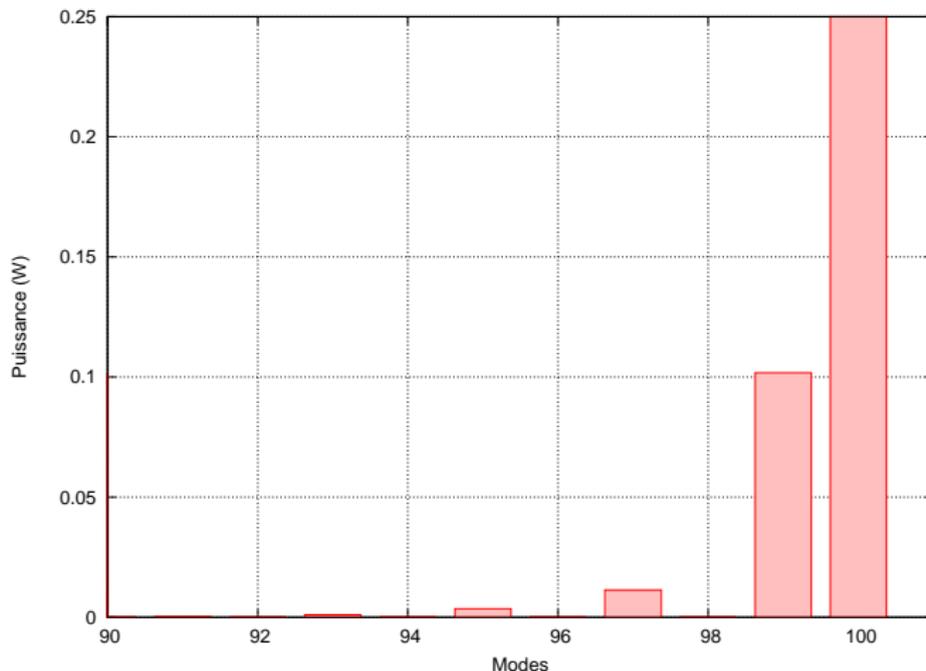
- Les modes pairs sont identiquement nuls
- Les modes 0 et m sont égaux, et représentent la moyenne des autres modes.
- Sur les intervalles $[1, m/2]$ et $[m/2, m - 1]$, les modes imaginaires sont de même amplitude et en opposition de phase deux à deux (1 avec $m - 1$, 3 avec $m - 3$...). Leur moyenne est donc nulle, ce qui assure à la solution d'être purement réelle.
- Sur ces mêmes intervalles, les modes réels sont également de même amplitude, mais en phase.

⇒ on pourra se limiter à l'étude du problème sur la moitié des modes :
 $\alpha \in [0, m/2]$.

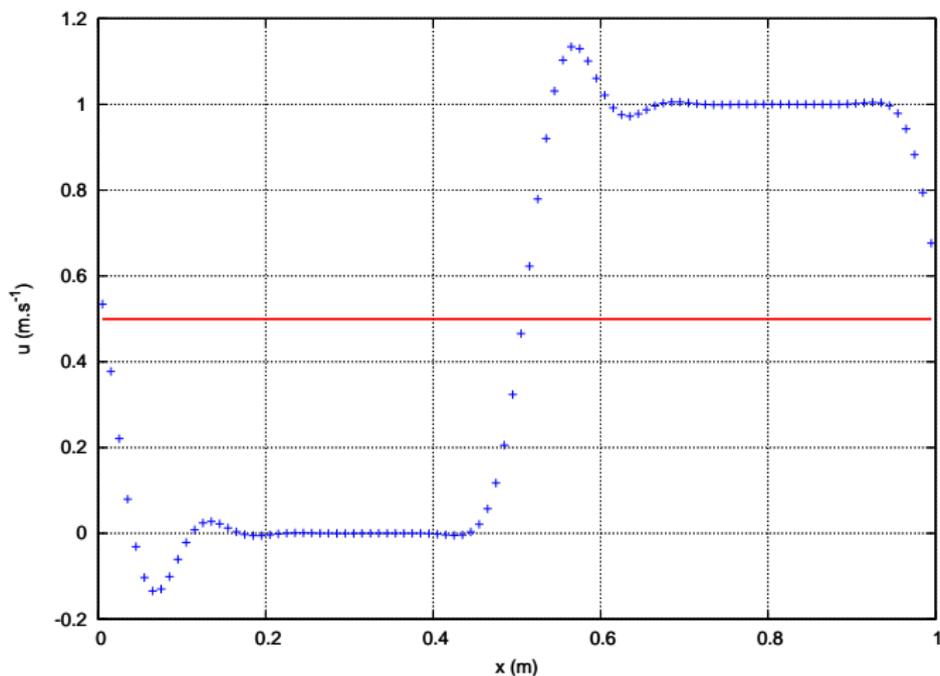
Puissance contenue dans les 10 premiers modes (0 exclu)



Puissance contenue dans les 10 derniers modes (m inclus)

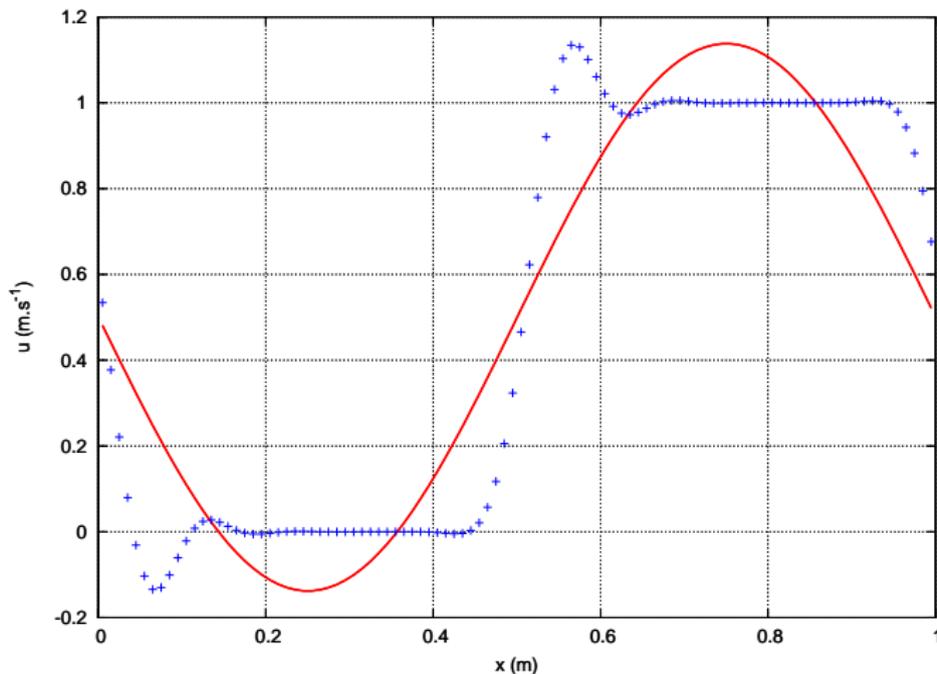


Solution exacte du système semi-diskret en espace



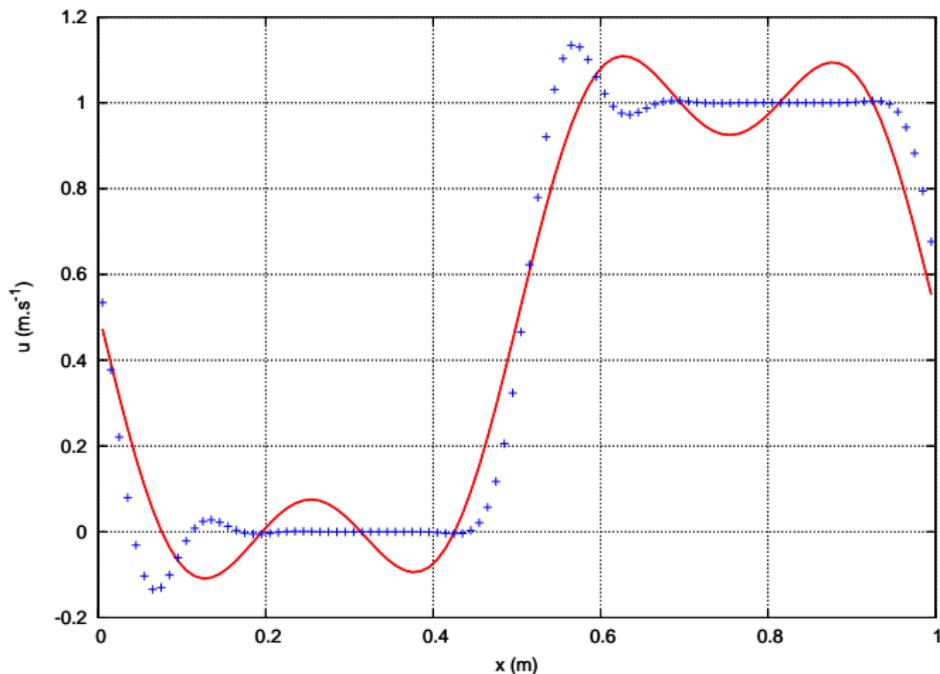
-: Mode 0 , + : Exact

Solution exacte du système semi-discret en espace



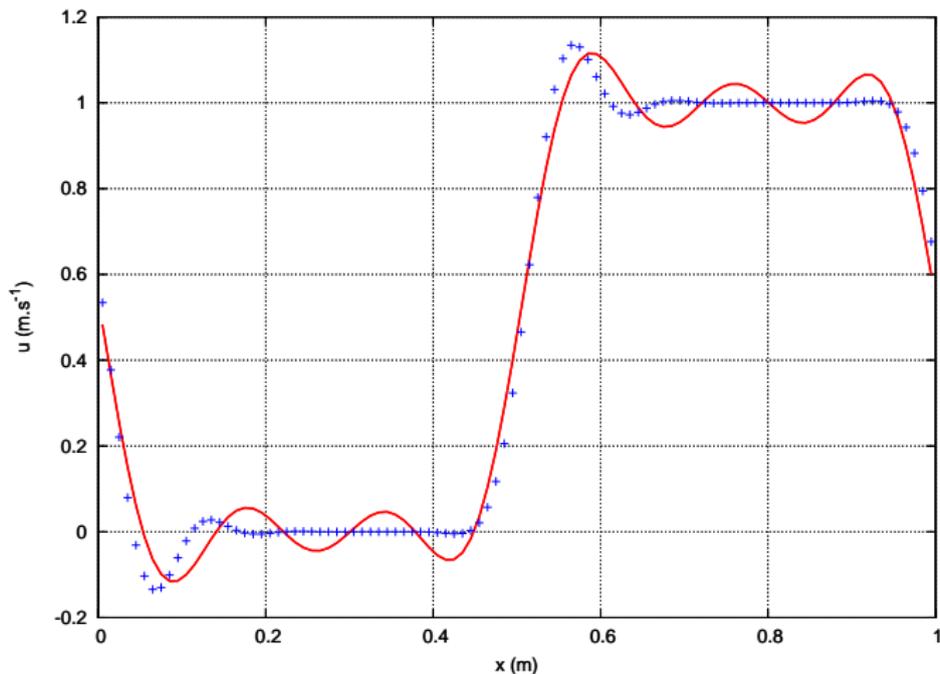
- : $\left[\text{Mode } 0 + 2 \sum_{\alpha=0}^1 \text{Mode } \alpha \right]$, + : Exact

Solution exacte du système semi-discret en espace



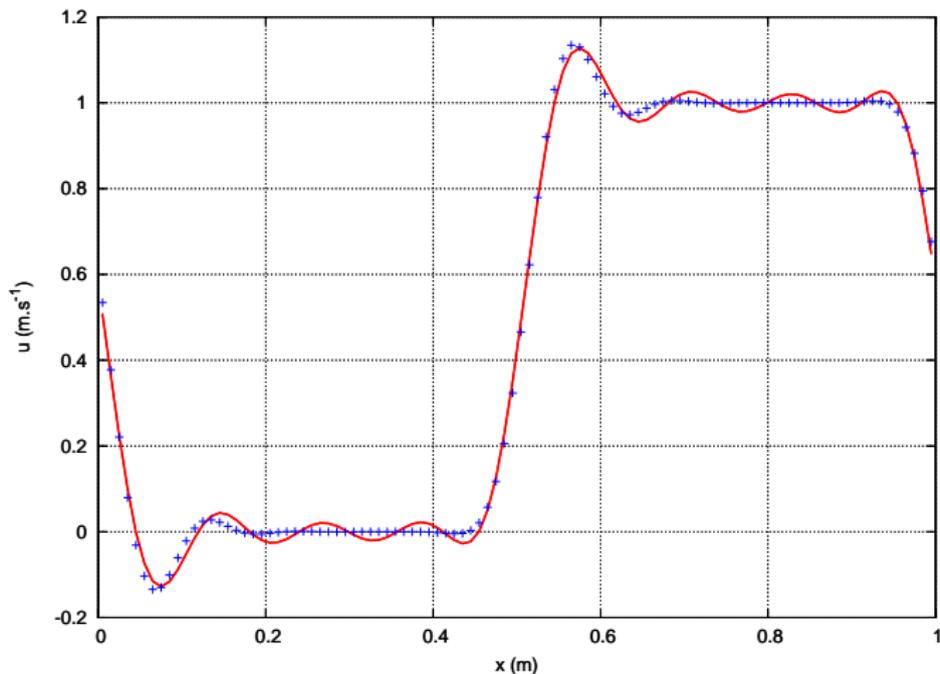
- : $\left[\text{Mode } 0 + 2 \sum_{\alpha=0}^3 \text{Mode } \alpha \right]$, + : Exact

Solution exacte du système semi-discrét en espace



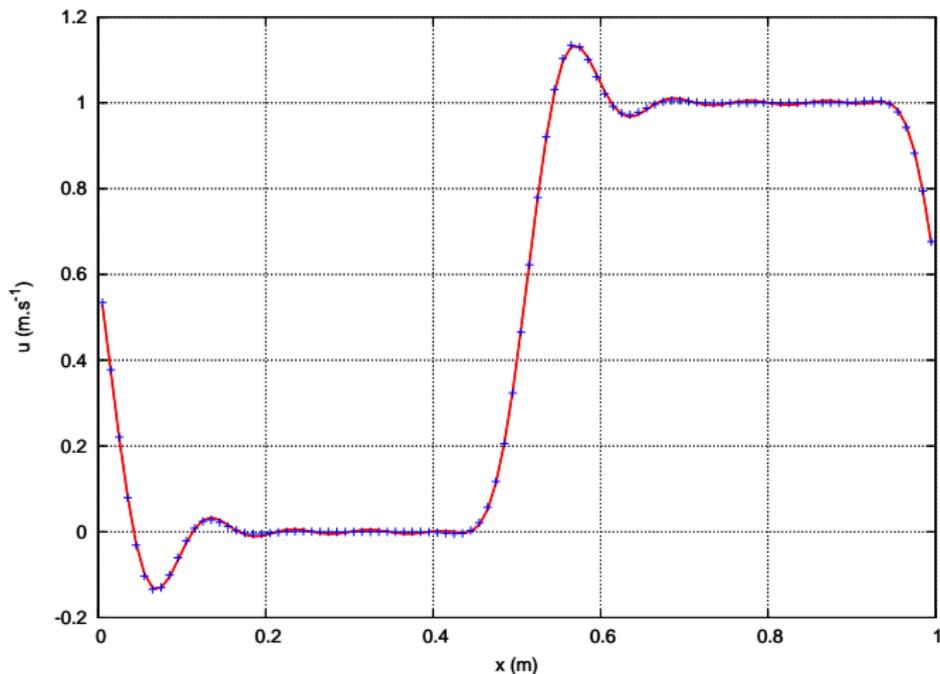
- : $\left[\text{Mode } 0 + 2 \sum_{\alpha=0}^5 \text{Mode } \alpha \right]$, + : Exact

Solution exacte du système semi-discrét en espace



- : $\left[\text{Mode } 0 + 2 \sum_{\alpha=0}^7 \text{Mode } \alpha \right]$, + : Exact

Solution exacte du système semi-discrét en espace



- : $\left[\text{Mode } 0 + 2 \sum_{\alpha=0}^9 \text{Mode } \alpha \right]$, + : Exact

Equation de dispersion

Vitesse complexe associée à l'équation semi-discrète

$$\bar{u}_i(t) = \sum_{\alpha=1}^m B_{\alpha} e^{jk_{\alpha}(i\Delta x - \bar{v}_{\alpha}t)}$$

où la vitesse complexe v_{α} s'écrit :

$$\bar{v}_{\alpha} = j \frac{\bar{\lambda}_{\alpha}}{k_{\alpha}} = -\frac{\Im(\bar{\lambda}_{\alpha})}{k_{\alpha}} + j \frac{\Re(\bar{\lambda}_{\alpha})}{k_{\alpha}}$$

Equation de dispersion

Equation de dispersion

En prenant le quotient de la vitesse complexe et de la vitesse physique de déplacement de la solution a on obtient :

$$\frac{\bar{v}_\alpha}{a} = -\frac{\Im(\bar{\lambda}_\alpha)}{ak_\alpha} + j\frac{\Re(\bar{\lambda}_\alpha)}{ak_\alpha}$$

Les parties réelle et imaginaire de l'équation de dispersion représentent respectivement la **dispersion** et la **dissipation** du schéma.

On en déduit une forme discrète représentative d'un schéma parfait (mais inaccessible ...) en faisant apparaître le Reynolds de maille et le nombre d'onde réduit :

$$\frac{\bar{v}_\alpha}{a} = 1 - j\frac{\varphi_\alpha}{\mathcal{R}_\Delta}$$

Equation de dispersion

Dispersion du schéma

La dispersion est définie par :

$$\bar{\xi}_\alpha = -\frac{\Im(\bar{\lambda}_\alpha)}{ak_\alpha}$$

Propriétés :

- Si $\bar{\xi}_\alpha > 1$ le mode α de la solution se déplace plus rapidement que la vitesse de convection physique a .
- Au contraire, si $\bar{\xi}_\alpha < 1$, le mode est ralenti.
- Dans les deux cas, tous les longueurs d'onde ne sont pas transportés à la même vitesse ce qui induit une déformation de la solution.

Equation de dispersion

Dissipation du schéma

La dissipation est définie par :

$$\overline{\nu}_\alpha = -\frac{\Re(\overline{\lambda}_\alpha)}{ak_\alpha}$$

Propriétés :

- Si $\overline{\nu}_\alpha > \nu_\alpha = \frac{\varphi_\alpha}{\mathcal{R}\Delta}$, le mode est dissipé numériquement, ce qui dégrade la qualité de la solution.
- Si $\overline{\nu}_\alpha < \nu_\alpha = \frac{\varphi_\alpha}{\mathcal{R}\Delta}$, le mode est amplifié, ce qui peut mener à une instabilité.
- Dans le cas de l'équation d'advection pure (i.e sans diffusion), $\overline{\nu}_\alpha > 0$ traduit la présence de dissipation numérique.

Coefficients d'erreur et ordre de la méthode

D.L. de l'équation de dispersion pour $\varphi_\alpha \rightarrow 0$

Pour les grandes longueurs d'onde :

$$\frac{\overline{v}_\alpha}{a} = 1 + \overline{E}_0 - j\overline{E}_1\varphi_\alpha + \overline{E}_2\varphi_\alpha^2 - j\overline{E}_3\varphi_\alpha^3 + \dots$$

Cette équation permet le calcul de coefficients d'erreur par identification, tout en reliant leur action numérique à des phénomènes physiques.

- les termes du développement **d'indice pair** proviennent de la vitesse de transport, et représentent donc la **dispersion** du schéma.
- les termes **d'indice impair** représentent la **dissipation**.
- \overline{E}_0 doit être nul pour que le schéma soit consistant
- les termes d'erreur doivent ensuite être les plus petits possible pour une précision optimale.

Equation équivalente

Un changement de point de vue...

- au lieu de considérer que le schéma numérique permet de résoudre de façon approchée une EDP modèle...
- on considère plutôt qu'il résout de façon **exacte l'équation équivalente** dont le second membre est constitué par les termes d'erreur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = a \Delta x \overline{E_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \Delta x^2 \overline{E_2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + a \Delta x^3 \overline{E_3} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \mathcal{O}(\Delta x^4)$$

Une méthode est alors dite d'ordre n si les $n - 1$ premiers termes d'erreur sont nuls.

Etude de la précision du schéma FOU

Equation de dispersion :

$$\frac{\overline{v}_\alpha}{a} = -\frac{1}{\varphi_\alpha} [-\sin(\varphi_\alpha) + j(1 - \cos(\varphi_\alpha))]$$

Identification des coefficients d'erreur

Développement de l'équation de dispersion (cf. TD) :

$$\frac{\overline{v}_\alpha}{a} = 1 - j\frac{1}{2}\varphi_\alpha - \frac{1}{6}\varphi_\alpha^2 + j\frac{1}{24}\varphi_\alpha^3 + \mathcal{O}(\varphi_\alpha^4)$$

Coefficients d'erreur :

$$\overline{E}_1 = +\frac{1}{2}; \overline{E}_2 = -\frac{1}{6}; \overline{E}_3 = -\frac{1}{24}$$

Le schéma obtenu est bien consistant et d'ordre un (\overline{E}_1 non nul).

Etude de la précision du schéma décentré d'ordre deux

Equation de dispersion :

$$\frac{\overline{v}_\alpha}{a} = -\frac{1}{2\varphi_\alpha} \left[-\sin(\varphi_\alpha) (3 - \cos(\varphi_\alpha)) + j(1 - \cos(\varphi_\alpha))^2 \right]$$

Identification des coefficients d'erreur

Développement de l'équation de dispersion :

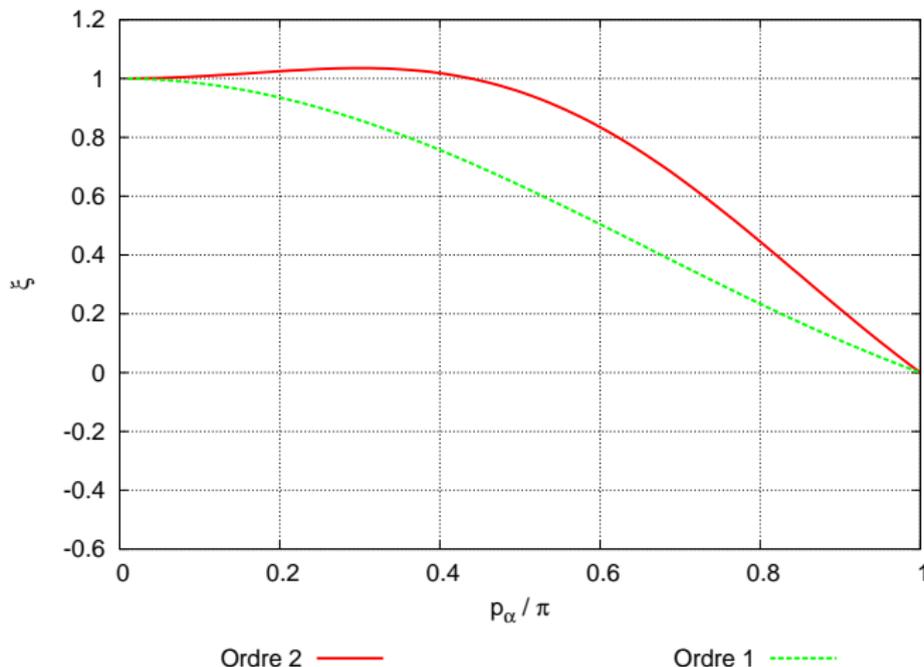
$$\frac{\overline{v}_\alpha}{a} = 1 + \frac{1}{12}\varphi_\alpha^2 - j\frac{1}{8}\varphi_\alpha^3 + \mathcal{O}(\varphi_\alpha^4)$$

Coefficients d'erreur :

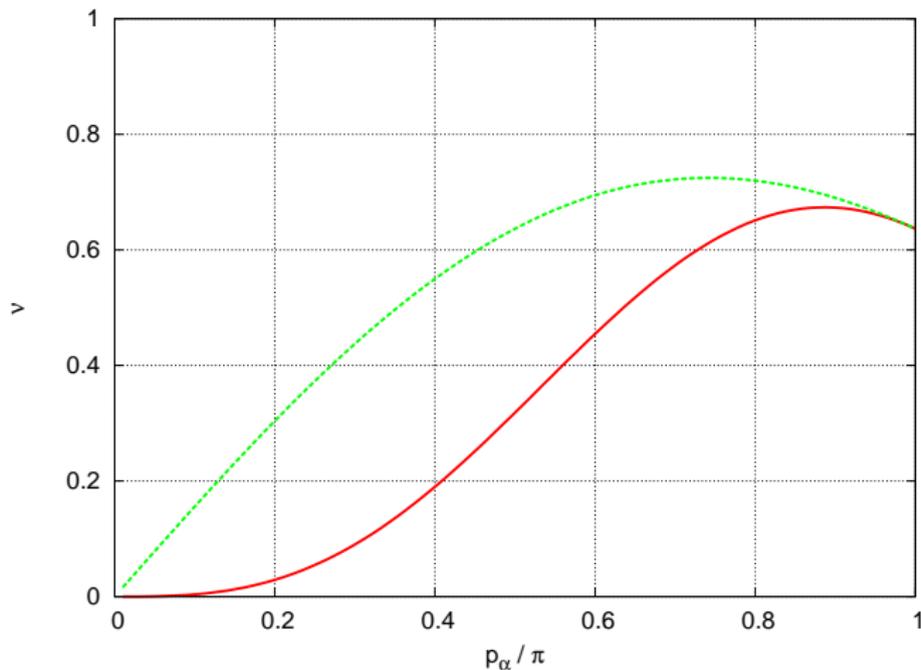
$$\overline{E}_1 = 0; \overline{E}_2 = \frac{1}{12}; \overline{E}_3 = -\frac{1}{8}$$

Le schéma obtenu est bien consistant et d'ordre deux (\overline{E}_1 nul, \overline{E}_2 non nul).

Dispersion des schémas décentrés d'ordre un et deux en fonction du nombre d'ondes



Dissipation des schémas décentrés d'ordre un et deux en fonction du nombre d'ondes



- └ Décomposition en série de Fourier de l'équation semi-discrète
- └ Coefficients d'erreur, ordre de la méthode et équation équivalente

Observations sur l'évolution de la dissipation et de la dispersion en fonction du nombre d'onde

- les courbes de dissipation et de dispersion du schéma d'ordre deux sont plus "plates" à l'origine que celles du schéma d'ordre un.
- Cela traduit une **plus grande précision** de ce schéma sur les petits nombres d'onde (*i.e* les **grandes longueurs d'onde**), liée au fait que ses premiers termes d'erreur sont moins importants que ceux du schéma d'ordre un.
- Les grands nombres d'onde (*i.e* les petites longueurs d'onde) sont mal pris en compte par les deux schémas, tant du point de vue du retard de phase que de la dissipation

Rôle du schéma d'intégration temporelle

Système semi-discret en espace

On rappelle que le système semi-discret en espace peut s'écrire :

$$\dot{U} = F(U)$$

Système discret en espace et en temps

Le processus d'intégration temporelle permet de transformer le système d'EDO rappelé ci-dessus en une suite numérique :

$$U^{n+1} = \mathcal{P}(J\Delta t) U^n \text{ avec } J = \frac{\partial F}{\partial U}$$

où \mathcal{P} est une matrice fonction de la matrice Jacobienne J .

Stabilité du schéma d'intégration temporelle seul

Définition

Le processus itératif d'intégration temporelle est dit stable si la suite géométrique qu'il définit est convergente.

En pratique...

La stabilité de ce processus itératif est obtenue ssi le module de \mathcal{P} est inférieur à l'unité, quelle que soit la valeur propre considérée :

$$|\lambda_{\mathcal{P}}| < 1$$

Le domaine de stabilité du schéma d'intégration temporelle dans le plan complexe est déterminé de façon complètement indépendante de la discrétisation spatiale.

Stabilité du système discret en espace et en temps

Pré-requis

Schéma dont les étapes de discrétisation temporelle et intégration spatiale peuvent être **formellement découplées**

Méthodologie

La stabilité du schéma discret en espace et en temps s'étudie en confrontant le **lieu des valeurs propres** $\bar{\lambda}$ du système d'EDO discret en espace avec la **limite de stabilité du schéma d'intégration temporelle**.

- Si le lieu des valeurs propres $\bar{\lambda}$ est **entièrement contenu** en deçà de la limite de stabilité du schéma d'intégration temporelle, le schéma discret en espace et en temps sera **stable**.
- Si une seule valeur propre $\bar{\lambda}_\alpha$ se trouve **au delà** de la limite de stabilité du schéma d'intégration temporelle, le schéma discret en espace et en temps sera **instable**.

Type de stabilité du schéma d'intégration temporelle seul

Terminologie

- **Inconditionnellement instable** si son domaine de stabilité se réduit au demi-plan de droite de \mathbb{C} .
- **Conditionnellement stable** si son domaine de stabilité recouvre partiellement le demi-plan gauche de \mathbb{C} . On parle de stabilité conditionnelle car les valeurs propres $\bar{\lambda}$ ne resteront dans le domaine de stabilité du schéma d'intégration temporelle qu'à la condition de vérifier un critère numérique (par exemple sur \mathcal{C}).
- **A-stable** si son domaine de stabilité absolue contient le demi-plan de gauche de \mathbb{C} en entier.

Note : il existe d'autres types de stabilité plus ou moins contraignants (B-Stabilité, AN-Stabilité...)

Schéma d'Euler explicite

Rappel du schéma d'Euler explicite

Le schéma d'Euler explicite peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\delta U = JU^n \text{ avec } U^{n+1} = U^n + \Delta t \delta U$$

Expression en fonction de \mathcal{P}

Identification de la matrice \mathcal{P} :

$$U^{n+1} = \underbrace{(I + \Delta t J)}_{\mathcal{P}} U^n$$

Valeurs propres $\lambda_{\mathcal{P}}$ de \mathcal{P} :

$$\lambda_{\mathcal{P}} = 1 + z \text{ avec } z = \bar{\lambda} \Delta t$$

Calcul de la limite de stabilité du schéma d'Euler explicite

En posant :

$$z = \bar{\lambda}\Delta t = \Delta t [\Re(\bar{\lambda}) + j\Im(\bar{\lambda})] = x + jy$$

On peut écrire successivement :

$$|1 + z| < 1$$

$$|1 + x + jy|^2 < 1$$

$$(1 + x)^2 + y^2 < 1$$

$$1 + 2x + x^2 + y^2 < 1$$

Soit la condition de stabilité dans le plan complexe, $\forall x \in \{-2, 0\}$:

$$y < +\sqrt{-(2x + x^2)}$$

$$y > -\sqrt{-(2x + x^2)}$$

La **limite de stabilité du schéma d'Euler explicite** est donc un **cercle** dans le plan complexe, centré en $(-1, 0)$.

Confrontation des valeurs propres du schéma d'Euler explicite avec celles de la discrétisation spatiale (UPO2VF)

Méthodologie

- Les limites de stabilité du schéma d'intégration temporelle
- Les valeurs de $\Delta t \overline{\lambda}_\alpha$.

Application au schéma UPO2VF

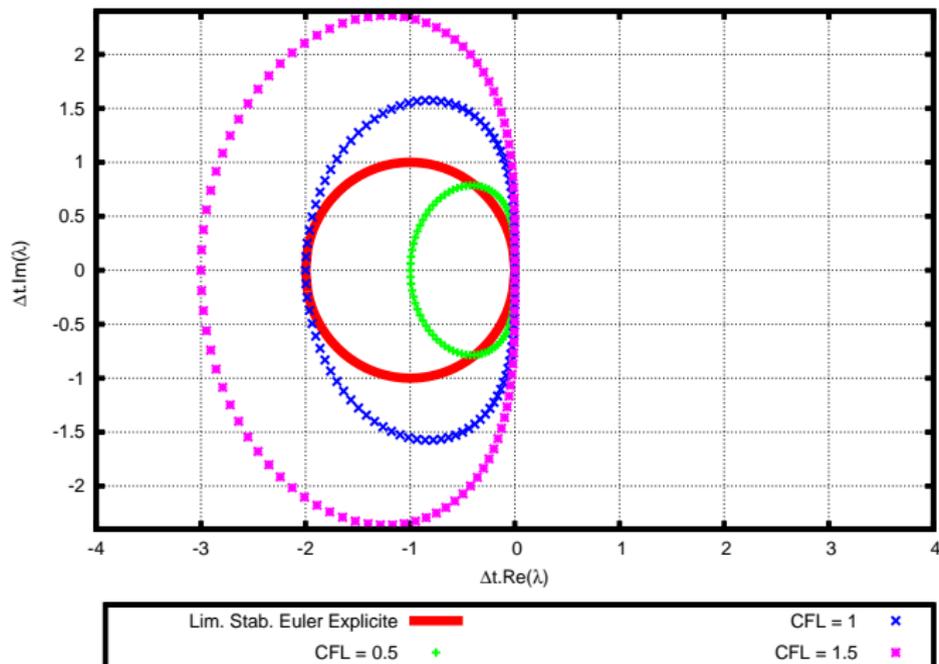
On rappelle que les valeurs propres du schéma UPO2VF s'écrivent :

$$\overline{\lambda}_\alpha = -\frac{a}{2\Delta x} \left[(1 - \cos \varphi_\alpha)^2 + j \sin \varphi_\alpha (3 - \cos \varphi_\alpha) \right]$$

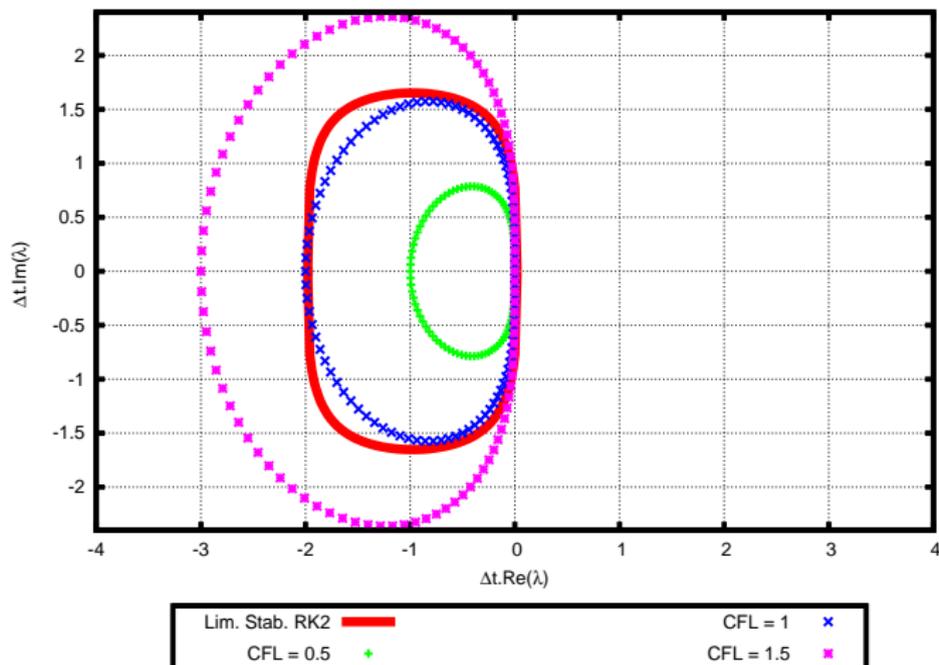
Soit, en multipliant par Δt :

$$\Delta t \overline{\lambda}_\alpha = -\frac{CFL}{2} \left[(1 - \cos \varphi_\alpha)^2 + j \sin \varphi_\alpha (3 - \cos \varphi_\alpha) \right]$$

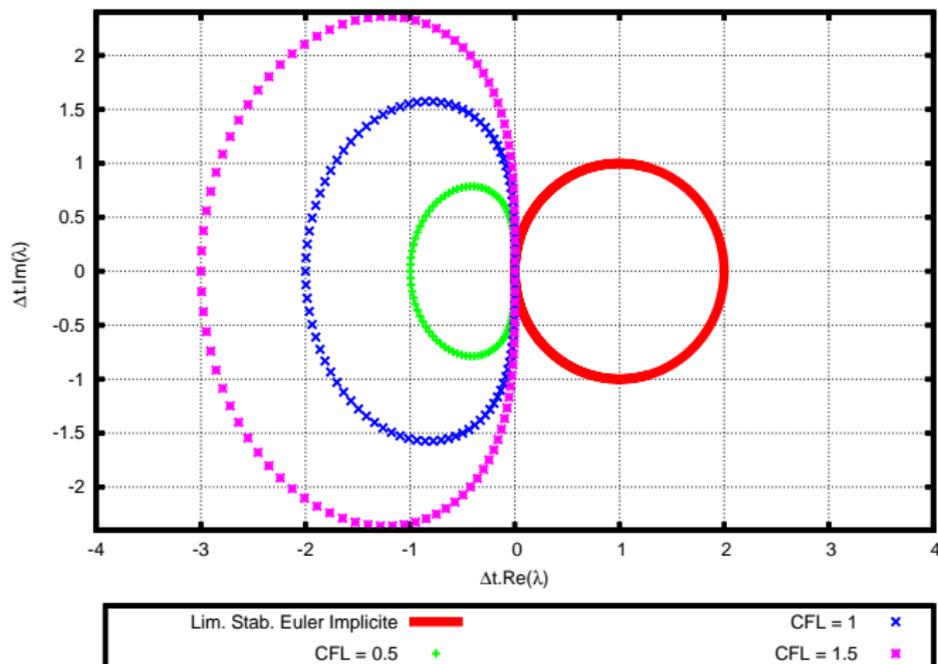
Confrontation des valeurs propres du schéma d'Euler explicite avec celles de la discrétisation spatiale (UPO2VF)



Confrontation des valeurs propres du schéma RK2 avec celles de la discrétisation spatiale (UP O2)



Confrontation des valeurs propres du schéma d'Euler implicite avec celles de la discrétisation spatiale (UPO2VF)



Observations sur la stabilité des schémas étudiés

- Le degré de contact de la limite de stabilité du schéma RK2 avec l'axe des imaginaires est plus élevé qu'avec le schéma d'Euler explicite, ce qui permet d'être plus stable (jusqu'à $CFL = 1$) et plus précis (le degré du contact étant directement relié à l'ordre du schéma).
- La limite du domaine de stabilité du schéma d'Euler implicite est le symétrique par rapport à l'axe des imaginaires du schéma d'Euler explicite. Cependant, le domaine de stabilité proprement dit n'est pas situé à l'intérieur du cercle, comme dans le cas des schémas explicites, mais à **l'extérieur**.
- Concernant la schéma d'Euler implicite, le domaine d'instabilité étant réduit à un disque situé dans le demi-plan des imaginaires ayant une partie réelle positive, on parle de schéma **A-stable**.

Analyse du schéma discret en espace et en temps

Principe

Objectif : étudier le **comportement global du schéma discret**, issu de l'application d'un schéma d'intégration temporelle à une discrétisation spatiale.

Méthode

Pour ce faire, on va s'intéresser au système

$$\dot{U} = \tilde{J}U,$$

dans lequel la matrice jacobienne \tilde{J} regroupe les effets de la discrétisation spatiale et de l'intégration temporelle.

Analyse du schéma discret en espace et en temps

Evaluation de \tilde{J}

Intégration exacte du système précédent entre les instants n et $n + 1$:

$$U^{n+1} = \exp(\tilde{J}\Delta t) U^n$$

Or, l'application d'un schéma d'intégration temporel à un schéma semi-discret en espace mène à la suite numérique :

$$U^{n+1} = \mathcal{P}(J\Delta t) U^n$$

Par identification entre ces deux expressions, on peut écrire :

$$\mathcal{P} = \exp(\tilde{J}\Delta t)$$

et finalement :

$$\tilde{J} = \frac{1}{\Delta t} \ln[\mathcal{P}(J, \Delta t)]$$

Calcul des valeurs propres $\tilde{\lambda}$ de \tilde{J}

Calcul des valeurs propres $\tilde{\lambda}$ de \tilde{J}

L'expression de \tilde{J} nous permet d'écrire $\tilde{\lambda}$ en fonction de $\lambda_{\mathcal{P}}$:

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{\Delta t} \ln(\lambda_{\mathcal{P}}) = \frac{1}{\Delta t} (\ln |\lambda_{\mathcal{P}}| + j\phi_{\lambda_{\mathcal{P}}})$$

On rappelle en effet que $\lambda_{\mathcal{P}} \in \mathbb{C}$ et peut donc s'écrire :

$$\lambda_{\mathcal{P}} = |\lambda_{\mathcal{P}}| e^{j\phi_{\lambda_{\mathcal{P}}}}, \phi_{\lambda_{\mathcal{P}}} = \arctan \left(\frac{\Im(\lambda_{\mathcal{P}})}{\Re(\lambda_{\mathcal{P}})} \right)$$

L'expression des valeurs propres $\tilde{\lambda}$ dépend par conséquent :

- du **schéma d'intégration temporelle** étudié, qui détermine l'expression de la matrice de passage \mathcal{P} et de ses valeurs propres $\lambda_{\mathcal{P}}$.
- du schéma de discrétisation spatiale, par l'intermédiaire des valeurs propres $\bar{\lambda}$.

Solution du système équivalent en espace et en temps

Solution du système équivalent

Comme \tilde{J} se diagonalise dans la même base que J , alors :

$$\tilde{U}^n = S_m \exp(\tilde{\Lambda} n \Delta t) S_m^{-1} U_0$$

Expression au point courant

$$\tilde{u}_i^n = \sum_{\alpha=1}^m B_{\alpha} e^{jk_{\alpha} i \Delta x + \tilde{\lambda}_{\alpha} n \Delta t} \quad \text{avec} \quad B_{\alpha} = \frac{1}{m} \sum_{\beta=1}^m u_{\beta}^0 e^{-jk_{\alpha} \beta \Delta x}$$

On remarque que les coefficients de Fourier B_{α} de la solution initiale **restent inchangés** par rapport à la solution de l'équation semi-discrète.

Etude du système discret

Stabilité

Le schéma discret en espace et en temps est **stable au sens de Liapounov** ssi $\Re(\tilde{\lambda}) \leq 0$.

Vitesse complexe et équation de dispersion

$$\text{Vitesse complexe : } \tilde{v}_\alpha = j \frac{\tilde{\lambda}_\alpha}{k_\alpha} = -\frac{\Im(\tilde{\lambda}_\alpha)}{k_\alpha} + j \frac{\Re(\tilde{\lambda}_\alpha)}{k_\alpha}$$

$$\text{Equation de dispersion : } \frac{\tilde{v}_\alpha}{a} = -\frac{\Im(\tilde{\lambda}_\alpha)}{ak_\alpha} + j \frac{\Re(\tilde{\lambda}_\alpha)}{ak_\alpha}$$

Dissipation et dispersion

$$\text{Dissipation : } \tilde{\nu}_\alpha = -\frac{\Re(\tilde{\lambda}_\alpha)}{ak_\alpha}, \text{ dispersion : } \tilde{\xi}_\alpha = -\frac{\Im(\tilde{\lambda}_\alpha)}{ak_\alpha}$$

Equation équivalente du système discret

Développement limité de l'équation de dispersion

$$\frac{\widetilde{v}_\alpha}{a} = 1 + \widetilde{E}_0 - j\widetilde{E}_1\varphi_\alpha + \widetilde{E}_2\varphi_\alpha^2 + j\widetilde{E}_3\varphi_\alpha^3 - \widetilde{E}_4\varphi_\alpha^4 + \dots$$

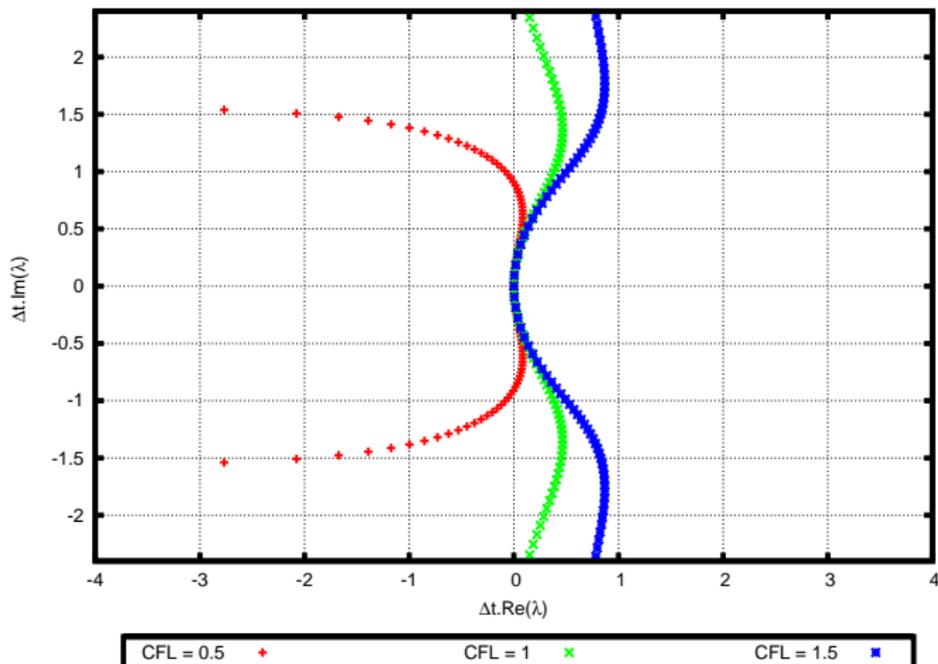
Equation équivalente

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = a\Delta x \widetilde{E}_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\Delta x^2 \widetilde{E}_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + a\Delta x^3 \widetilde{E}_3 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \mathcal{O}(\Delta x^4)$$

Synthèse de la signification des différentes valeurs propres

- λ : valeurs propres apparaissant dans la solution exacte de l'EDP, il y en a une infinité.
- $\bar{\lambda}$: valeurs propres de la matrice jacobienne J du système semi-discret en espace, il y en a m . Elles se calculent à partir des valeurs propres de la matrice de permutation circulaire P_m , notées λ_m , qui sont les racines m -ièmes de l'unité.
- $\tilde{\lambda}$: valeurs propres de la matrice jacobienne \tilde{J} du système équivalent, il y en a m . Elles s'obtiennent en injectant les valeurs propres du système discret en espace $\bar{\lambda}$ dans celles de la matrice de passage \mathcal{P} , notées $\lambda_{\mathcal{P}}$. L'expression de $\lambda_{\mathcal{P}}$ en fonction de $\bar{\lambda}$ dépend uniquement du schéma d'intégration temporelle utilisé.

Lieu des valeurs propres du système équivalent, schéma UPO2VF-EE



Précision de la combinaison du schéma de discrétisation spatiale et d'intégration temporelle

- On écrit l'équation de dispersion du schéma discret en espace et en temps
- Par identification avec l'équation équivalente, on obtient les termes d'erreur suivants :

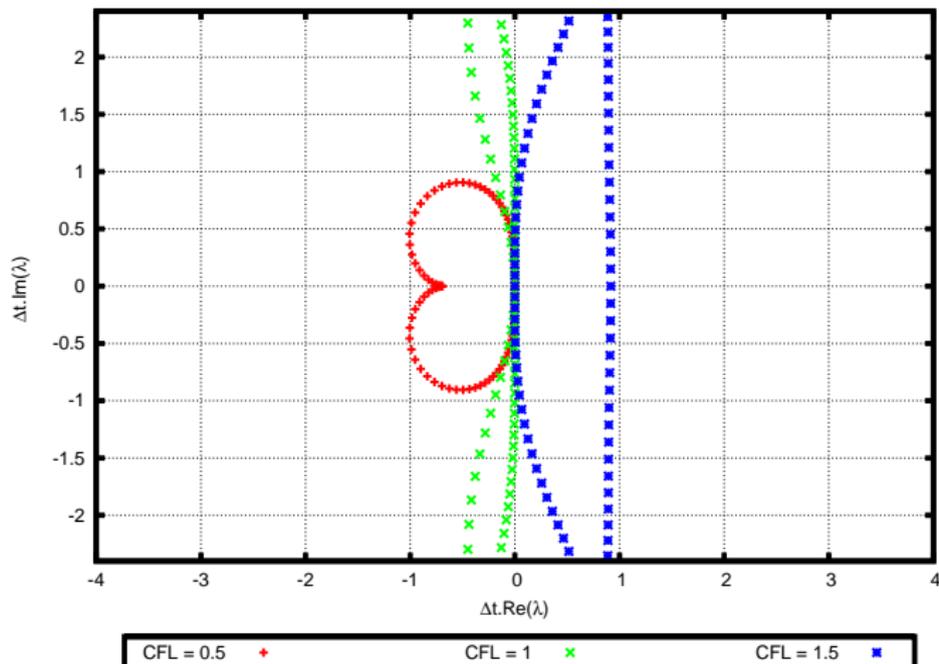
$$\widetilde{E}_1 = \frac{1}{2} CFL$$

$$\widetilde{E}_2 = \frac{1}{12} (1 - 4 CFL^2)$$

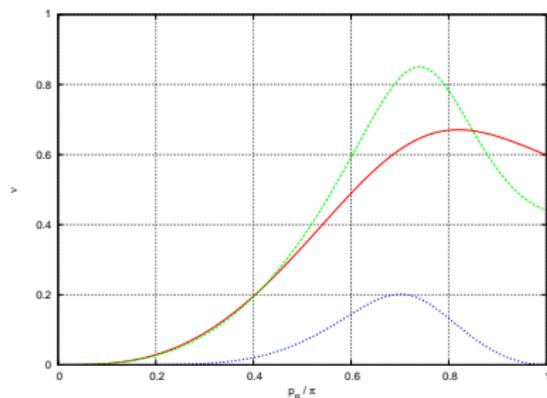
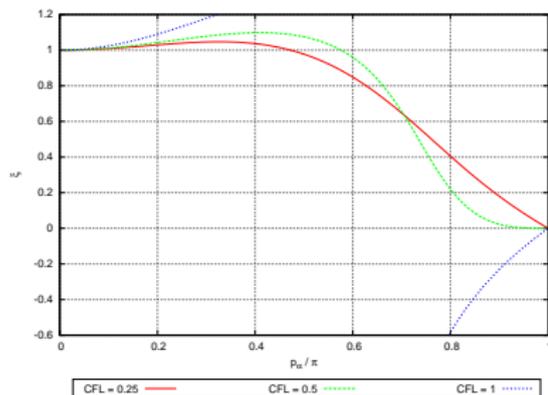
$$\widetilde{E}_3 = -\frac{1}{8} \left(1 + \frac{2}{3} CFL - 2 CFL^3 \right)$$

Remarque : le terme d'erreur d'ordre 1 est linéaire par rapport au CFL ce qui induit une dissipation très forte sur les grandes longueurs d'onde.

Lieu des valeurs propres du système équivalent pour le schéma UPO2VF-RK2



Dissipation et dispersion en fonction du nombre d'onde réduit



Ordre de la méthode numérique complète

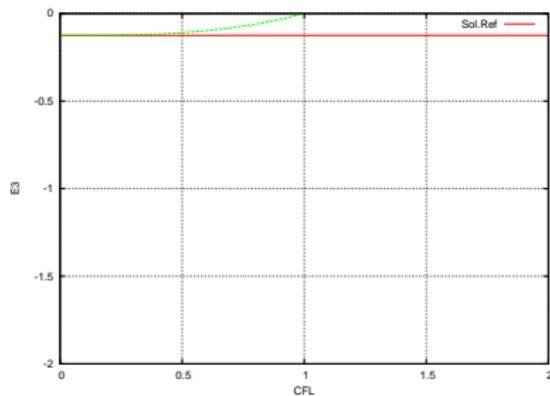
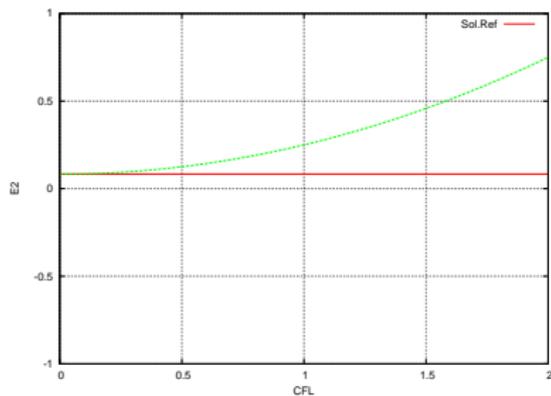
- On écrit l'équation de dispersion du schéma discret en espace et en temps :

$$\frac{\widetilde{v}_\alpha}{a} = 1 + \underbrace{\frac{1}{12} (1 + 2 CFL^2)}_{\widetilde{E}_2} \varphi_\alpha^2 + j \underbrace{\frac{1}{8} (-1 + CFL^3)}_{\widetilde{E}_3} \varphi_\alpha^3 + \mathcal{O}(\varphi_\alpha^4)$$

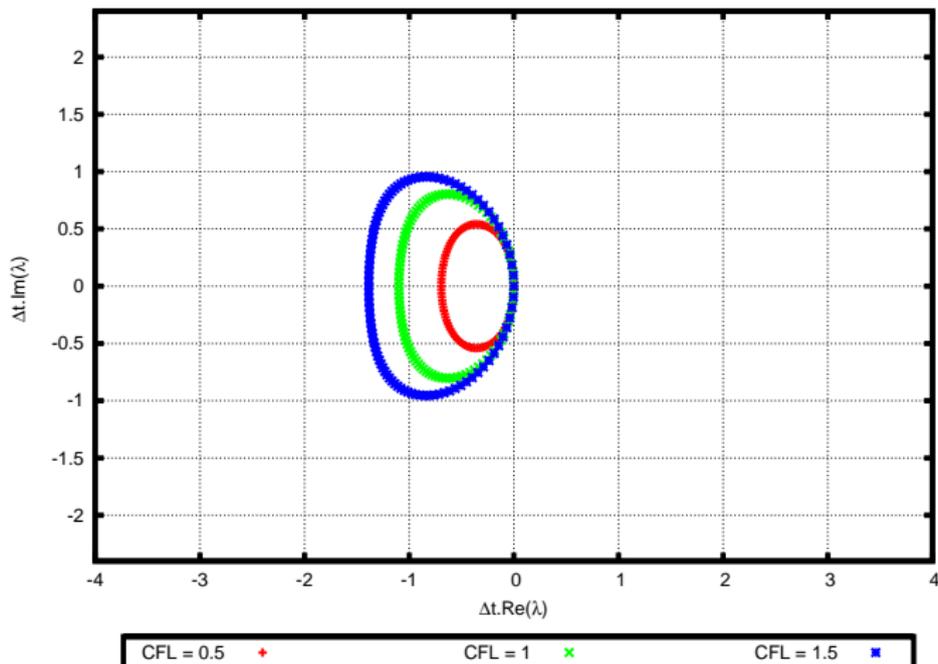
- Par identification avec l'équation équivalente, on obtient les termes d'erreur suivants :

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_1 &= 0 \\ \widetilde{E}_2 &= \frac{1}{12} (1 + 2 CFL^2) \\ \widetilde{E}_3 &= \frac{1}{8} (-1 + CFL^3) \end{aligned}$$

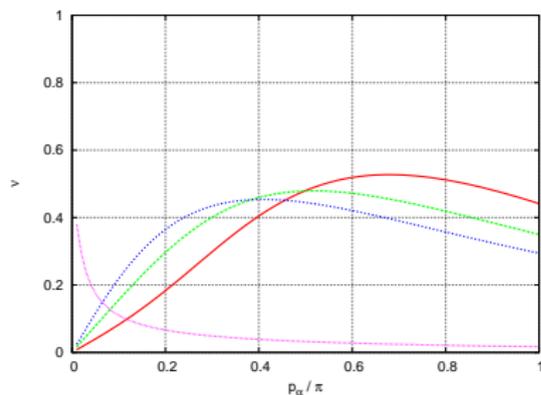
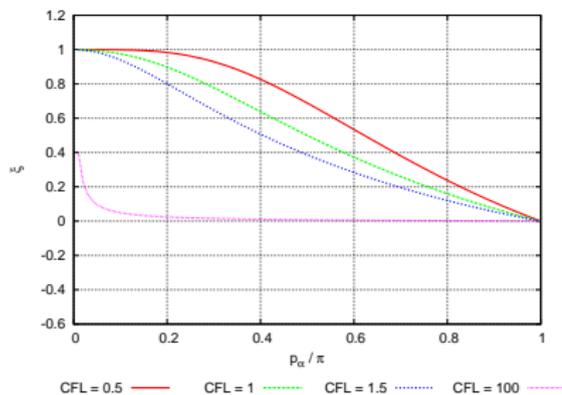
Coefficients d'erreur dispersif d'ordre deux et dissipatif d'ordre trois



Lieu des valeurs propres du système équivalent pour le schéma UPO2VF-IE



Dissipation et dispersion en fonction du nombre d'onde réduit



Précision de la combinaison du schéma de discrétisation spatiale et d'intégration temporelle

- On écrit tout d'abord l'équation de dispersion du schéma discret en espace et en temps.
- Par identification avec l'équation équivalente, on obtient les termes d'erreur suivants :

$$\widetilde{E}_1 = \frac{1}{2} CFL$$

$$\widetilde{E}_2 = \frac{1}{12} (1 - 4 CFL^2)$$

$$\widetilde{E}_3 = -\frac{1}{8} \left(1 + \frac{2}{3} CFL - 2 CFL^3 \right)$$

Coefficients d'erreur dispersif d'ordre deux et dissipatif d'ordre trois

