

TD 2 "Différences finies"

FORMATION MODIA, 4A

Toutes les notations utilisées sont celles du cours

Exercice 1 : analyse spectrale de la stabilité et de la précision du schéma centré SOC

On rappelle que le schéma semi-discret centré d'ordre deux en espace peut s'écrire :

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{a}{2\Delta x} (u_{i+1} - u_{i-1}) \quad \forall a > 0$$

Ce schéma au point courant peut également s'écrire sur l'ensemble des points du maillage, menant au système :

$$\dot{U} = JU$$

1. Donner les expressions de la matrice jacobienne J du système
2. Donner les expressions des valeurs propres du système semi-discret en espace (valeurs propres de J)
3. Donner les expressions de la vitesse complexe puis écrire l'équation de dispersion
4. Donner l'ordre de la méthode et les valeurs des deux premiers termes d'erreur non nuls. De quels types d'erreur s'agit-il ?
5. Ce schéma sera-t-il stable avec une intégration temporelle d'Euler explicite ? Et avec une intégration temporelle d'Euler implicite ? Pourquoi ?
6. Comment se comparent les propriétés de ce schéma à celles des schémas FOU et UPO2VF vus en cours ? Interpréter.

Exercice 2 : intégration du système semi-discret SOC avec un schéma d'Euler implicite

Ecrire le système à résoudre si l'on souhaite intégrer le système semi-discret SOC avec une méthode d'Euler implicite.

Exercice 3 : calcul des limites de stabilité de schémas d'intégration temporelle seuls

En reprenant la démarche présentée en cours pour déterminer le domaine de stabilité du schéma d'Euler explicite, donnez les limites de stabilité :

1. du schéma de Runge-Kutta explicite d'ordre deux en temps ;
2. du schéma d'Euler implicite.

Exercice 4 (bonus) : étude du système discret SOC-IE

En vous aidant si besoin de la bibliothèque de calcul formel sympy, tracer le lieu des valeurs propres $\tilde{\lambda}$ du schéma semi-discret SOC intégré à l'aide du schéma d'Euler implicite, puis tracer la solution obtenue en partant d'une condition initiale de votre choix au terme d'un temps $T = 1$ (plusieurs CFL peuvent être testés, entre 0.1 et 20).