Partie 5 - Projet

Analyse des phénomènes dispersifs et application à la modélisation fluviale

On souhaite étudier dans ce projet le comportement d'un produit déversé dans une rivière de largeur constante b et animée d'une vitesse V. Ce produit est supposé peu miscible à l'eau et moins dense que l'eau (par exemple de l'huile), de sorte qu'il flotte à la surface de l'eau.

On note $C(x,y,t)$ et $\rho(x,y,t)$ la concentration et la masse volumique du produit, respectivement, à la position (x,y) et à l'instant t. Ces deux quantités les équations de la conservation de la conservation de la masse et de la concentration, à savoir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V) = 0,$$
$$\frac{\partial \rho C}{\partial t} + \operatorname{div}(\Phi) = 0.$$

La grandeur Φ correspond aux flux dispersifs qui sont de deux natures :

— Les flux diffusifs, donnés par $\Phi_d = -\lambda \nabla C$ avec λ le coefficient de diffusion que l'on supposera constant.

— Les flux advectifs, donnés par $\Phi_c = \rho C V$

Le flux total correspond à la somme de ces deux flux : $\Phi = \Phi_c + \Phi_d$.

1. Montrer que
$$\frac{\partial C}{\partial t} - \mu \Delta C + V \cdot \nabla C = 0, \tag{1}$$
avec μ un coefficient de diffusion que l'on déterminera.

L'objectif de ce projet est de résoudre ce problème en supposant le coefficient μ constant et dans le cas ou la rivière est animée d'une vitesse $V = (1,0)$. Afin de simplifier ce problème, nous ne considérons qu'une portion de la rivière de longueur a. Le domaine sur lequel nous allons travaillé est ainsi noté $\Omega =]0,a[\times]0,b[$. Initialement, nous supposons que le produit se trouve à l'intérieur de Ω et l'on distingue la frontière amont Γ_0 du reste de la frontière $\Gamma_1 = \partial\Omega \backslash \Gamma_0$, telles que l'on impose une condition de Dirichlet homogène sur Γ_0 et de Neumann homogène sur Γ_1. La condition sur Γ_1 permet au fluide de sortir dur domaine Ω ; voir la figure 1.

Le problème que l'on souhaite résoudre s'écrit ainsi :

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \mu \Delta C + V \cdot \nabla C = 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{2a}$$
$$C = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \tag{2b}$$
$$\frac{\partial C}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1, \tag{2c}$$
$$C(t=0) = C_0 \text{ dans } \Omega. \tag{2d}$$

Afin d'approcher la solution de ce problème, nous allons utiliser la méthode des différences finies. On considère un maillage cartésien de Ω constitué de $N_x + 2$ points dans la direction Ox et $N_y + 2$ points dans la direction Oy (dans la largeur de la rivière). Les coordonnées des points du maillages correspondent à

$$x_i = \frac{ia}{N_x+1} \quad 0 \le i \le N_x + 1, \qquad y_j = \frac{jb}{N_y+1} \quad 0 \le j \le N_y + 1,$$

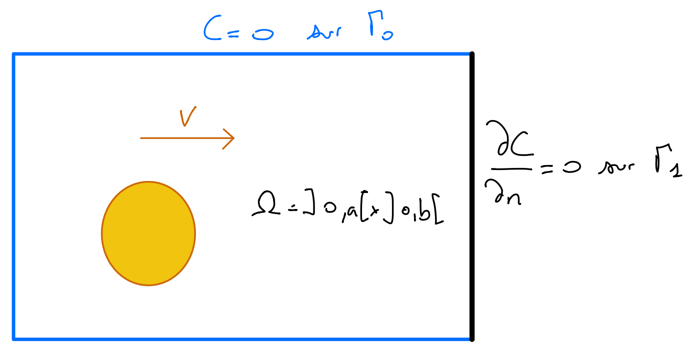

FIGURE 1 – Configuration du domaine Ω représentant la rivière en présence du produit (en orange) et avec les conditions limites.

avec

$$h_x = \frac{a}{N_x+1}, \quad h_y = \frac{b}{N_y+1}.$$

En tout point (x_i, y_j), la méthode des différences finies permet de déterminer une approximation $U_{i,j}$ de la quantité $C(x_i, y_j)$, la solution exacte évaluée en ces points.

Afin d'implémenter correctement la résolution du problème (2), nous procédons en plusieurs étapes. Dans un premier temps, nous nous concentrons sur la discrétisation de l'opérateur Laplacien, pour lequel nous considérons des conditions mixtes Dirichlet/Neumann (non) homogènes. Après cela, nous étudions une discrétisation centrée du terme advectif, et enfin nous terminons par regarder les aspects de discrétisation en temps. L'objectif de ce travail est de pouvoir prédire numériquement le comportement de ce produit à la surface de l'eau au cours du temps.

Approximation spatiale du Laplacien

Considérons pour commencer l'approximation de l'opérateur Laplacien en 2D sur l'ouvert $\Omega =]0, a[\times]0, b[$ avec des conditions à la limite de type Dirichlet homogène sur $\partial\Omega$:

$$\begin{aligned} -\mu\Delta u &= f \text{ dans } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{aligned}$$

avec $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un terme source.

2. A y_j fixé, montrer que

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{2u(x_i, y_j) - u(x_{i-1}, y_j) - u(x_{i+1}, y_j)}{h_x^2} + \mathcal{O}(h_x^2).$$

   En déduire une approximation à l'ordre 2 de $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j)$ et de $-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j)$.

3. Ecrire le schéma aux différences finies consistant à l'ordre 2 en un point (x_i, y_j) n'appartenant pas au bord.

4. Ecrire les conditions de Dirichlet homogènes discrètes sur le bord $\partial\Omega$ et mettre ce schéma sous la

forme $\mathbf{AU} = \mathbf{F}$ avec

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_0 \\ \boldsymbol{U}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}_{N_y+1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{U}_j = \begin{pmatrix} U_{0,j} \\ U_{1,j} \\ \vdots \\ U_{N_x+1,j} \end{pmatrix} \quad 0 \leq j \leq N_y + 1$$

5. Pour vérifier que votre implémentation est correcte, montrer que si l'on prend le terme source définit par
$$f(x,y) = \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}\right) \sin(\frac{\pi x}{a}) \sin(\frac{\pi y}{b}),$$
et $\mu = 1$, alors la solution exacte du probleme est donnée par $u(x,y) = \sin(\frac{\pi x}{a}) \sin(\frac{\pi y}{b})$. Montrer en particulier que l'erreur d'approximation converge bien lorsque vous raffinez votre maillage.

Prenons maintenant en compte la condition de Neumann sur le bord Γ_1 :

$$\begin{aligned} -\mu \Delta u &= f \text{ dans } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \text{ sur } \Gamma_1. \end{aligned}$$

6. Sur $\Gamma_1 = \{(a,y) | y \in [0,b]\}$, montrer que l'on a
$$\frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = \frac{4u(a - h_x, y) - u(a - 2h_x, y) - 3u(a,y)}{2h_x} + \mathcal{O}(h_x^2).$$

7. En déduire la modification à apporter sur $\mathbf{A}$ pour prendre en compte cette condition de Neumann sur Γ_1 et vérifier vos résultats en considérant la solution $u(x,y) = \sin(\frac{\pi y}{b}) \left(\cos(\frac{\pi x}{a}) - 1\right)$ (il faudra donc calculer le terme f correspondant).

Approximation des termes advectifs

Sous l'influence de l'écoulement de la rivière, les effets advectifs ont tendance à déplacer le produit dans le sens de V. Comme on l'a vu, ces effets sont représentés par le terme de dérivée directionnelle $V \cdot \nabla u$. Considérons le problème de diffusion-advection stationnaire :

$$\begin{aligned} -\mu \Delta u + V \cdot \nabla u &= f \text{ dans } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \text{ sur } \Gamma_1, \end{aligned}$$

avec $V \in \mathbb{R}^2$.

8. Dans ce problème, deux phénomènes physiques sont en intéraction : les phénomènes diffusifs et et les phénomènes advectifs. Afin de quantifier quel phénomène est prédominant sur l'autre, on introduit le nombre de Péclet. Soit ℓ une échelle de longueur caractéristique (par exemple le rayon de la tache de produit) et v une échelle de vitesse (typiquement la norme de V). Par analyse dimensionnelle, on introduit le nombre de Péclet adimensionnel défini par :
$$\mathrm{Pe}_\ell = \frac{\ell v}{\mu}.$$

Quel est le régime dominant si $\mathrm{Pe}_\ell \gg 1$?

9. Montrer que si $V = \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \end{pmatrix}$, alors,

$$V \cdot \nabla u(x_i, y_j) = v_x \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{2h_x} + \mathcal{O}(h_x^2).$$

En déduire la discrétisation du terme advectif et vérifier vos résultats dans le régime diffusif.

Marches en temps

Considérons maintenant le problème complet (2). On note $\mathbf{A}$ l'approximation de l'opérateur $C \mapsto -\mu\Delta C + V \cdot \nabla C$ avec les conditions au bord de type Dirichlet/Neumann. Le problème semi-discret en espace ainsi s'écrit sous la forme d'un problème de Cauchy :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{U}(t) + \mathbf{A}\mathbf{U}(t) = 0, \tag{3a}$$

$$\mathbf{U}(t=0) = \mathbf{U}_0. \tag{3b}$$

Dans la suite on prendra un coefficient de diffusion $\mu = 0.01$ et on choisira pour condition initiale une Gaussienne centré en (x_0, y_0), suffisament éloigné du bord $\partial\Omega$ et de rayon r_0 :

$$C_0(x, y) = e^{-\left(\frac{x-x_0}{r_0}\right)^2 - \left(\frac{y-y_0}{r_0}\right)^2}.$$

L' intervalle de temps pour notre étude sera $[0, T]$, avec δt le pas de temps et N_T le nombre de pas de temps (*ie.* $\delta t = T/N_T$). On notera également $t_n = n\delta t$ pour tout $n \in [0, N_T]$. L'approximation de la quantité $\mathbf{U}(t_n)$ pour $n \geq 1$ est notée $\mathbf{U}^n$.

10. Appliquer le schéma de Crank-Nicholson en présence d'un champs advectif $V = (1, 0)$. Quel est le régime de l'écoulement ? Pourquoi il n'est pas raisonnable de considérer le schéma d'Euler ?
11. On choisit $r_0 = 0.1$, $x_0 = 0.25$ et $y_0 = 0.5$ sur $\Omega =]0, 2[\times]0, 1[$. Au bout de combien de temps la concentration a t-elle diminuée de 80% ?
12. Effectuer de même pour une condition initiale moins régulière mais plus réaliste :

$$C_0(x, y) = \begin{cases} r_0^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 \text{ si } r_0^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 > 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$