INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Département de STPI

Pré-orientation : Ingénierie de la Construction

COURS DE

MECANIQUE DES SYSTEMES MATERIELS 2

SOMMAIRE

Rédigé et mis en forme par Alain BOYER, Jean-Charles MARE Jean-Yves PLANTEC et Marc SARTOR

GEOMETRIE DES MASSES

Après avoir vu les notions de :

- longueur - permettant de définir la géométrie d'un système,
- temps - permettant de créer un champ de vitesses, c'est à dire de mettre en place une cinématique,

nous allons formuler le concept de masse qui, associé ultérieurement à une géométrie et une cinématique données, permet de mettre en place le concept de quantité de mouvement, c'est à dire une cinétique.

I MASSE D'UN SYSTEME MATERIEL

I.1 Définition

Soit un système (S) et un point courant $P \in (S)$. On associe au point P un volume élémentaire $d\mathcal{V}$ de masse dm.

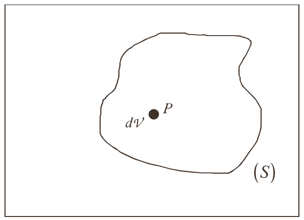
On définit la masse spécifique - ou masse volumique :

$$\rho_v = \frac{dm}{d\mathcal{V}} \qquad \text{unité : } [\rho_v] = [M] \cdot [L]^{-3}$$

ρ_v n'est pas nécessairement une constante ; elle peut varier en fonction du point P (quand le matériau considéré n'est pas homogène) ou en fonction du temps. Ainsi la masse m du système s'écrit de façon générale :

$$m = \iiint_{\mathcal{V}} \rho_v(P)\, d\mathcal{V}$$

où le domaine d'intégration n'a pas non plus nécessairement une géométrie fixe (si le système est déformable).



Hypothèse : on se placera ici, comme dans les chapitres précédents, dans le cadre des solides rigides ; de plus - sauf mention contraire - on considèrera que ρ est une constante.

Par ailleurs, on sera souvent amené à considérer des solides de géométrie particulière :

- des solides dits "solides-plaque" (ou plaques) ; ils sont tels qu'une dimension (l'épaisseur) est très inférieure aux dimensions longitudinales. Leur masse est donnée par l'expression :

$$m = \iint_{\mathcal{S}} \rho_s(P)\, d\mathcal{S}$$

où $d\mathcal{S}$ est un élément de surface et ρ_S une masse surfacique $[\rho_S] = [M] \cdot [L]^{-2}$

- des solides dits "solides-barre" (ou barres) ; ils sont tels qu'une dimension (l'élancement) est très supérieure aux dimensions transversales. Leur masse est donnée par l'expression :

$$m = \int_L \rho_l(P)\, ds$$

où ds est un élément d'arc et ρ_l la masse linéique $[\rho_l] = [M] \cdot [L]^{-1}$

- des solides constitués d'un nombre fini de points matériels ; on parle de répartition de masse discrète. Leur masse est donnée par l'expression :

$$m = \sum_i m_i$$

I.2 Calcul de la masse

La détermination de la masse d'un solide passe donc, dans le cas général, par le calcul d'une intégrale de volume. Le cours de mathématiques correspondant sera vu plus tard dans l'année mais ceci ne nous empêche nullement d'en présenter les éléments suffisants pour ce cours.

Ainsi :

$$m = \iiint_{\mathcal{V}} \rho_v\, d\mathcal{V}$$

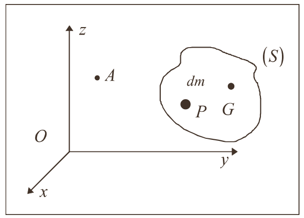
ou $d\mathcal{V}$, élément de volume, prend les expressions usuelles :

- $dx\, dy\, dz$ en coordonnées cartésiennes,
- $rdr\, d\theta$ en coordonnées polaires,
- $rdr\, d\theta\, dz$ en coordonnées cylindriques,

Le calcul de la masse m s'effectue en intégrant successivement suivant les trois directions, les bornes d'intégration pouvant être variables.

II CENTRE D'INERTIE

II.1 Définition



Le centre d'inertie G (centre de gravité) d'un solide (S) de masse m est le barycentre de tous les points matériels de (S) affectés de leur masse respective. On a :

$$m\,\vec{AG} = \int \vec{AP}\,dm$$

où l'opérateur d'intégration $\int$ représente $\iiint_{\mathcal{V}}$, $\iint_{S}$ ou $\int_{L}$ ou Σ selon les cas, et où A est un point quelconque de l'espace. Ainsi :

$$\vec{AG} = \frac{1}{m}\int \vec{AP}\,dm$$

II.1.1 Remarque

Soit un repère $\mathcal{R}$ d'origine O. On pose :

$$\vec{OG} = \begin{vmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{vmatrix}_{\mathcal{R}}$$

On a :

$$x_G = \frac{1}{m}\int x\,dm \qquad y_G = \frac{1}{m}\int y\,dm \qquad z_G = \frac{1}{m}\int z\,dm$$

Ainsi, en coordonnées cartésiennes :

$$x_G = \frac{1}{m}\iiint_{\mathcal{V}} \rho_v x\,dx\,dy\,dz \qquad y_G = \frac{1}{m}\iiint_{\mathcal{V}} \rho_v\,y\,dx\,dy\,dz \qquad z_G = \frac{1}{m}\iiint_{\mathcal{V}} \rho_v z\,dx\,dy\,dz$$

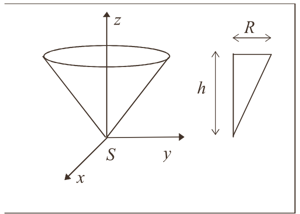
II.1.2 Propriétés

Si un solide homogène (S) présente :

- un plan de symétrie, alors le centre d'inertie se trouve dans ce plan ;
- un axe de symétrie, alors le centre d'inertie se trouve sur cet axe ;
- un centre de symétrie, alors le centre d'inertie est ce point.

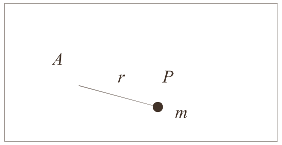
Ces propriétés évidentes résultent des méthodes d'intégration sur des domaines présentant des symétries. Elles ne seront pas démontrés ici dans leur généralité.

Application : centre de gravité d'un triangle, centre de gravité d'un cône.



III MOMENTS D'INERTIE

Soit un point matériel P de masse m fixé au bout d'un fil sans masse (A,P) de longueur r. Le concept d'inertie de P au point A est en relation avec l'investissement énergétique (la quantité d'énergie) nécessaire pour lancer la masse en rotation autour du point A :



On pose :

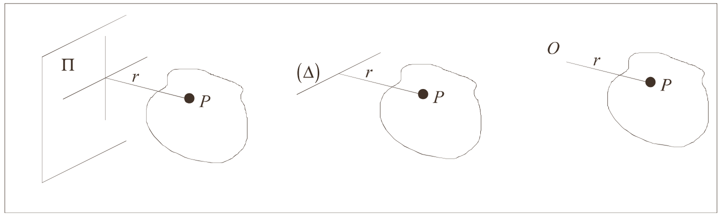
$$\mathrm{I} = m\,r^2 \qquad\qquad [I] = [M]\cdot[L]^2$$

Ainsi :

- si le fil est plus long, l'énergie nécessaire sera quadratiquement plus importante ;
- si la masse est plus importante, l'énergie nécessaire sera proportionnellement plus importante.

III.1 Définitions

Etant donné un solide (S), on définit différents moments d'inertie :



III.1.1 Moment d'inertie d'un solide par rapport à un plan

On appelle moment d'inertie par rapport à un plan (π) la quantité :

$$\mathrm{I}_{\pi}(s) = \int_S r^2\,dm$$

où r est la distance du point courant du solide au plan (π).

III.1.2 Moment d'inertie d'un solide par rapport à une droite

On appelle moment d'inertie par rapport à une droite (Δ) la quantité :

$$\mathrm{I}_{\Delta}(s) = \int_S r^2\,dm$$

où r est la distance du point courant du solide à la droite (Δ).

III.1.3 Moment d'inertie d'un solide par rapport à un point

On appelle moment d'inertie par rapport à un point A la quantité :

$$\mathrm{I}_A(s) = \int_S r^2 \, dm$$

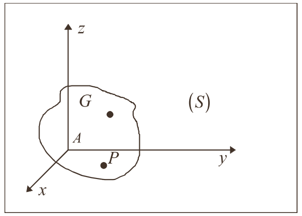
où r est la distance du point courant du solide au point A.

Remarque : ces quantités sont toutes positives.

III.2 Moments d'inertie et produits d'inertie pour un solide

III.2.1 Définitions

Soit un solide (S) auquel on associe un repère $\mathcal{R}(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ supposé lié au solide au cours du temps.



Conformément aux définitions précédentes, on peut calculer les moments d'inertie par rapport aux axes $(A\vec{x})$, $(A\vec{y})$ et $(A\vec{z})$. On pose :

$$\mathrm{A} = \mathrm{I}_{A\vec{x}}(s) = \int_S \left(y^2 + z^2\right) dm \text{ , moment d'inertie par rapport à } (A\vec{x}),$$

$$\mathrm{B} = \mathrm{I}_{A\vec{y}}(s) = \int_S \left(x^2 + z^2\right) dm \text{ , moment d'inertie par rapport à } (A\vec{y}),$$

$$\mathrm{C} = \mathrm{I}_{A\vec{z}}(s) = \int_S \left(x^2 + y^2\right) dm \text{ , moment d'inertie par rapport à } (A\vec{z}).$$

De plus on forme les quantités suivantes (homogènes à des inerties) :

$$\mathrm{D} = \mathrm{I}_{A\vec{y}A\vec{z}}(s) = \int_S y\, z\, dm \text{ , produit d'inertie par rapport aux axes } (A\vec{y}) \text{ et } (A\vec{z}),$$

$$\mathrm{E} = \mathrm{I}_{A\vec{x}A\vec{z}}(s) = \int_S x\, z\, dm \text{ , produit d'inertie par rapport aux axes } (A\vec{x}) \text{ et } (A\vec{z}),$$

$$\mathrm{F} = \mathrm{I}_{A\vec{x}A\vec{y}}(s) = \int_S x\, y\, dm \text{ , produit d'inertie par rapport aux axes } (A\vec{x}) \text{ et } (A\vec{y}).$$

appelées produits d'inertie du solide (S) et dont la signification apparaîtra plus tard.

III.2.2 Propriétés

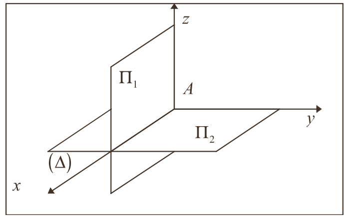
On a :

$$\mathrm{A} = \mathrm{I}_{A\vec{x}}(s) = \int_S r^2 \, dm = \int_S \left(y^2 + z^2\right) dm = \int_S y^2 \, dm + \int_S z^2 \, dm = \mathrm{I}_{\vec{x}A\vec{z}}(s) + \mathrm{I}_{\vec{x}A\vec{y}}(s)$$

Ainsi :

$$\mathrm{I}_{A\vec{x}}(s) = \mathrm{I}_{\vec{x}A\vec{z}}(s) + \mathrm{I}_{\vec{x}A\vec{y}}(s)$$

Théorème : Le moment d'inertie d'un solide par rapport à une droite est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à deux plans perpendiculaires passant par cette droite :



$$\mathrm{I}_\Delta(s) = \mathrm{I}_{\pi 1}(s) + \mathrm{I}_{\pi 2}(s)$$

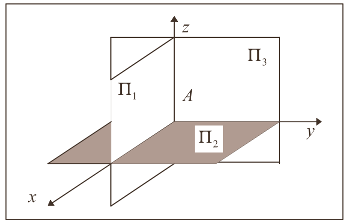
On a, d'autre part :

$$\mathrm{I}_A(s) = \int_S \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \cdot dm = \int_S x^2 \cdot dm + \int_S y^2 \cdot dm + \int_S z^2 \cdot dm = \mathrm{I}_{\vec{y}O\vec{z}}(s) + \mathrm{I}_{\vec{x}O\vec{z}}(s) + \mathrm{I}_{\vec{x}O\vec{y}}(s)$$

Ainsi :

$$\mathrm{I}_A(s) = \mathrm{I}_{\vec{y}A\vec{z}}(s) + \mathrm{I}_{\vec{x}A\vec{z}}(s) + \mathrm{I}_{\vec{x}A\vec{y}}(s)$$

Théorème : Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un point est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à trois plans perpendiculaires se rencontrant en ce point.



$$\mathrm{I}_A(s) = \mathrm{I}_{\pi 1}(s) + \mathrm{I}_{\pi 2}(s) + \mathrm{I}_{\pi 3}(s)$$

IV OPERATEUR D'INERTIE - MATRICE D'INERTIE

IV.1 Définitions

Soit un solide (S), un point A quelconque (qui n'appartient pas nécessairement à (S)) et une base $\mathcal{B}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$. On définit un opérateur linéaire $\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]$, appelé matrice d'inertie du solide (S) en A relativement à la base $\mathcal{B}$. Cet opérateur est tel que :

$$\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]\cdot\vec{u}=\int_S \vec{AP}\wedge\left(\vec{u}\wedge\vec{AP}\right)dm$$

où $\vec{u}$ est un vecteur quelconque dans $\mathcal{B}$ et P le point courant de (S).

Signification : Soit l'opérateur matriciel $[K]$ qui, à tout vecteur $\vec{u}$, fait correspondre le vecteur $\vec{AP}\wedge\vec{u}$. $[K]$ est tel que : $[K]\cdot\vec{u}=\vec{AP}\wedge\vec{u}$. On a :

$$\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]\cdot\vec{u}=-\int_S \vec{AP}\wedge\left(\vec{AP}\wedge\vec{u}\right)dm$$

d'où :

$$\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]\cdot\vec{u}=-\int_S [K]^2\cdot\vec{u}\ dm$$

IV.2 Composantes de $\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]$

Soit $\vec{u}=\left|\begin{matrix}u_x\\u_y\\u_z\end{matrix}\right._{\mathcal{B}}$ le vecteur quelconque et $P(x,y,z)_{\mathcal{R}}$ le point courant de (S), avec $\mathcal{R}=(A,\mathcal{B})$. On a :

$$[K]\cdot\vec{u}=\vec{AP}\wedge\vec{u}=\left|\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}\right.\wedge\left|\begin{matrix}u_x\\u_y\\u_z\end{matrix}\right.=\left|\begin{matrix}yu_z-zu_y\\zu_x-xu_z\\xu_y-yu_x\end{matrix}\right.=\begin{bmatrix}0&-z&y\\z&0&-x\\-y&x&0\end{bmatrix}\cdot\left|\begin{matrix}u_x\\u_y\\u_z\end{matrix}\right.$$

d'où : $[K]=\begin{bmatrix}0&-z&y\\z&0&-x\\-y&x&0\end{bmatrix}$ et : $[K]^2=\begin{bmatrix}-z^2-y^2&xy&zx\\xy&-z^2-x^2&yz\\zx&yz&-y^2-x^2\end{bmatrix}$

On a :

$$\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]\cdot\vec{u}=-\int_S [K]^2\cdot\vec{u}\ dm=\left(-\int_S [K]^2\ dm\right)\cdot\vec{u}$$

$$\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]=-\int_S [K]^2\ dm=\begin{bmatrix}\int_S\left(y^2+z^2\right)dm & -\int_S x\ y\ dm & -\int_S z\ x\ dm\\ -\int_S x\ y\ dm & \int_S\left(z^2+x^2\right)dm & -\int_S y\ z\ dm\\ -\int_S z\ x\ dm & -\int_S y\ z\ dm & \int_S\left(y^2+x^2\right)dm\end{bmatrix}$$

En reprenant les différentes notations précédentes, la matrice d'inertie du solide (S) en A et relativement à la base $\mathcal{B}$ est :

$$\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]=\begin{bmatrix}\mathrm{A}&-\mathrm{F}&-\mathrm{E}\\-\mathrm{F}&\mathrm{B}&-\mathrm{D}\\-\mathrm{E}&-\mathrm{D}&\mathrm{C}\end{bmatrix}$$

Application : matrice d'inertie d'un rectangle, matrice d'inertie d'un disque évidé.

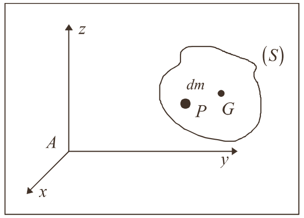
V THÉORÈME DE HUYGENS

Soit $\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]$ la matrice d'inertie en A et relativement à la base $\mathcal{B}$ d'un solide (S). On a, quelque soit le vecteur $\vec{u}$:

$$\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]\cdot\vec{u}=\int_S \vec{AP}\wedge\left(\vec{u}\wedge\vec{AP}\right)dm$$

où P est le point courant de (S). Soit G le centre de gravité de (S). On rappelle que :

$$\int_S \vec{GP}\ dm=\vec{0}$$



Ecrivons que $\vec{AP}=\vec{AG}+\vec{GP}$. Alors :

$$\begin{aligned}\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]\cdot\vec{u}&=\int_S\left(\vec{AG}+\vec{GP}\right)\wedge\left(\vec{u}\wedge\left(\vec{AG}+\vec{GP}\right)\right)dm\\&=\int_S\vec{AG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\vec{AG}\right)dm+\int_S\vec{AG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\vec{GP}\right)dm+\int_S\vec{GP}\wedge\left(\vec{u}\wedge\vec{AG}\right)dm+\int_S\vec{GP}\wedge\left(\vec{u}\wedge\vec{GP}\right)dm\\&=\vec{AG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\vec{AG}\right)\int_S dm+\vec{AG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\left(\int_S\vec{GP}\ dm\right)\right)+\left(\int_S\vec{GP}\ dm\right)\wedge\left(\vec{u}\wedge\vec{AG}\right)+\int_S\vec{GP}\wedge\left(\vec{u}\wedge\vec{GP}\right)dm\\&=\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(Gm)\right]\cdot\vec{u}+\vec{0}+\vec{0}+\left[\mathrm{I}_{G,\mathcal{B}}(s)\right]\cdot\vec{u}\end{aligned}$$

d'où la relation :

$$\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]=\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(G;m)\right]+\left[\mathrm{I}_{G,\mathcal{B}}(s)\right]$$

Ainsi, la matrice d'inertie en A est la somme de la matrice d'inertie en G et de la matrice d'inertie en A du point G seul affecté de toute la masse m.

Application : rectangle (signification terme à terme)

VI AXES PRINCIPAUX D'INERTIE

VI.I Définitions

La matrice d'inertie $\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]$ du solide (S) au point A relativement à la base $\mathcal{B}$ est symétrique et donc diagonalisable. Elle admet trois vecteurs propres perpendiculaires deux à deux qui forment une base $\mathcal{B}_p$ dite principale. Ainsi, au point A et relativement à la base $\mathcal{B}_p$, la matrice d'inertie de (S) s'écrit :

$$\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}_p}(s)\right]=\begin{bmatrix}\mathrm{A_p} & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{B_p} & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{C_p}\end{bmatrix}$$

Remarques :

- $\mathrm{A_p}$, $\mathrm{B_p}$ et $\mathrm{C_p}$ sont appelés moments d'inertie principaux de (S) au point A ;
- le trièdre d'origine A dont les axes sont parallèles aux vecteurs propres est le trièdre principal d'inertie en A ;
- les axes principaux sont les axes tels que les produits d'inertie sont nuls ;
- le trièdre principal d'inertie en G, centre d'inertie du solide, est appelé trièdre central d'inertie.

VI.2 Recherche des axes principaux

VI.2.1 Valeurs propres

On recherche les valeurs propres de la matrice $\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]$. Ainsi λ est valeur propre de $\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]$ si :

$$\det\left(\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]-\lambda[I]\right)=0 \text{ où } [I]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

VI.2.2 Prise en compte des symétries

Un axe -par exemple l'axe $(A\vec{z})$- est principal d'inertie si :

$$\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]\cdot\vec{z}=\lambda\,\vec{z}$$

Soit :

$$\begin{bmatrix}\mathrm{A} & -\mathrm{F} & -\mathrm{E}\\ -\mathrm{F} & \mathrm{B} & -\mathrm{D}\\ -\mathrm{E} & -\mathrm{D} & \mathrm{C}\end{bmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\0\\\lambda\end{vmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{vmatrix}-\mathrm{E}=0\\-\mathrm{D}=0\\\mathrm{C}=\lambda\end{vmatrix}$$

Il faut donc que E et D soient nuls simultanément :

- premier cas : si (S) admet $(\vec{x}A\vec{y})$ comme plan de symétrie alors :

$$\mathrm{E}=\int_S x\,z\,dm=\int_{S1}x\,z\,dm+\int_{S2}x\,z\,dm=\int_{S1}x\,z\,dm+\int_{S1}x\,(-z)\,dm=0$$

de même :

$$\mathrm{D}=\int_S y\,z\,dm=0$$

Théorème : si le solide admet un plan de symétrie, alors, en tout point de ce plan, l'axe perpendiculaire à ce plan est principal d'inertie ;

- second cas : si (S) admet $(\vec{y}A\vec{z})$ comme plan de symétrie, alors $\mathrm{E}=0$;
  si (S) admet $(\vec{x}A\vec{z})$ comme plan de symétrie, alors $\mathrm{D}=0$.
  ainsi, si $(A\vec{z})=(\vec{y}A\vec{z})\cap(\vec{x}A\vec{z})$ est axe de symétrie, $\mathrm{E}=\mathrm{D}=0$.

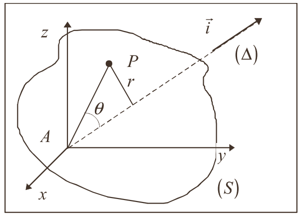
Théorème : si le solide admet un axe de symétrie, cet axe est principal d'inertie ;

Application : plaque plane sans épaisseur

VII MOMENT D'INERTIE PAR RAPPORT A UNE DROITE PASSANT PAR A

On suppose connue la matrice d'inertie $\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]$ du solide (S) en A et relativement à la base $\mathcal{B}$. Soit (Δ) un axe passant par A et de vecteur unitaire $\vec{i}$:

$$\left\|\vec{AP}\wedge\vec{i}\right\|=|AP|\sin\theta=r$$



Le moment d'inertie $\mathrm{I}_\Delta(s)$ du solide (S) par rapport à l'axe (Δ) est :

$$\mathrm{I}_\Delta(s)=\int_S r^2\,dm=\int_S\left(\vec{AP}\wedge\vec{i}\right)\cdot\left(\vec{AP}\wedge\vec{i}\right)dm$$

d'où :

$$\mathrm{I}_\Delta(s)=\int_S\left(\vec{AP}\wedge\vec{i},\vec{AP},\vec{i}\right)dm=\int_S\left(\vec{i},\vec{AP}\wedge\vec{i},\vec{AP}\right)dm=\vec{i}\cdot\int_S\vec{AP}\wedge\left(\vec{i}\wedge\vec{AP}\right)dm$$

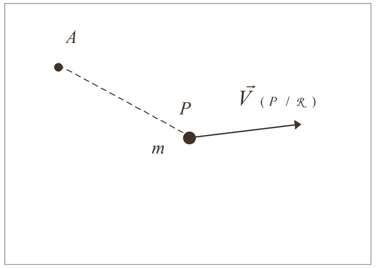
Finalement :

$$\mathrm{I}_\Delta(s)=\vec{i}\cdot\left(\left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]\cdot\vec{i}\right)$$

TORSEUR CINETIQUE

C'est le torseur dont la résultante est le vecteur quantité de mouvement.

I DEFINITION POUR UN POINT MATERIEL



On appelle quantité de mouvement du point P dans son mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$ la quantité :

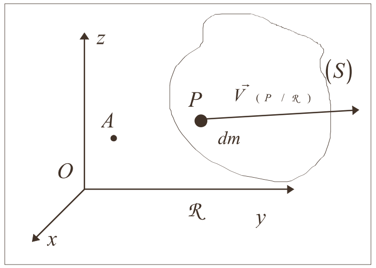
$$\vec{R}_c = m \ \vec{V}_{(P/\mathcal{R})} \qquad [M][L][T]^{-1}$$

On appelle moment cinétique en un point A du point P dans son mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$ la quantité :

$$\vec{\sigma}_{A(P/\mathcal{R})} = \vec{AP} \wedge m \ \vec{V}_{(P/\mathcal{R})} \qquad [M][L]^2[T]^{-1}$$

II DEFINITION DU TORSEUR CINETIQUE D'UN SOLIDE

Soit un solide (S) en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$. Au point courant P on associe la masse élémentaire dm.



Le torseur cinétique associé à l'ensemble des quantités de mouvement de chaque point du solide a pour éléments de réduction en A :

$$[\mathcal{C}i_{(S/\mathcal{R})}] = \left[\vec{R}_{c(S/\mathcal{R})} = \int_S \vec{V}_{(P/\mathcal{R})} dm \qquad \vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})} = \int_S \vec{AP} \wedge \vec{V}_{(P/\mathcal{R})} dm\right]_A$$

où :

- $\vec{R}_{c(S/\mathcal{R})}$ est la résultante cinétique,
- $\vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})}$ est le moment cinétique au point A.

Ces quantités sont liées par la relation classique de changement de point du champ des moments d'un torseur. Soit :

$$\vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})} = \vec{\sigma}_{B(S/\mathcal{R})} + \vec{AB} \wedge \vec{R}_{c(S/\mathcal{R})}$$

III EXPRESSION DE LA RESULTANTE CINETIQUE

On a :

$$m\,\vec{OG} = \int_S \vec{OP}\, dm$$

o˘ désigne G le centre d'inertie du solide (S) et m sa masse. En dérivant par rapport au temps dans le repère $\mathcal{R}(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$:

$$m\left(\frac{d}{dt}\vec{OG}\right)_{\mathcal{R}} = \int_S \left(\frac{d}{dt}\vec{OP}\right)_{\mathcal{R}} dm$$

$$m\,\vec{V}_{(G/\mathcal{R})} = \int_S \vec{V}_{(P/\mathcal{R})}\, dm$$

Finalement :

$$\vec{R}_{c(S/\mathcal{R})} = m \ \vec{V}_{(G/\mathcal{R})}$$

La résultante cinétique est la quantité de mouvement du centre d'inertie G affecté de la masse totale m.

IV EXPRESSION DU MOMENT CINETIQUE D'UN SOLIDE RIGIDE

Soit un point A du solide (S). On a :

$$\vec{V}_{(P\in S/\mathcal{R})} = \vec{V}_{(A\in S/\mathcal{R})} + \vec{PA} \wedge \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$$

Ainsi le moment cinétique devient :

$$\vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})} = \int_S \vec{AP} \wedge \vec{V}_{(P/\mathcal{R})} dm = \int_S \vec{AP} \wedge \vec{V}_{(A\in S/\mathcal{R})} dm + \int_S \vec{AP} \wedge \left(\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \wedge \vec{AP}\right) dm$$

$$\vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})} = \int_S \vec{AP}\, dm \wedge \vec{V}_{(A\in S/\mathcal{R})} + \left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]\cdot\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} = m\,\vec{AG} \wedge \vec{V}_{(A\in S/\mathcal{R})} + \left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right]\cdot\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$$

Finalement :

$$A \in S \qquad \vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})} = \left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right] \cdot \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} + A\vec{G} \wedge m\vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})}$$

Cas particuliers où le second terme s'annule:

- si A est un point fixe du solide (S) dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, le moment cinétique en A s'écrit :

$$\vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})} = \left[\mathrm{I}_{A,\mathcal{B}}(s)\right] \cdot \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$$

- si A est le centre d'inertie G, le moment cinétique s'écrit :

$$\vec{\sigma}_{G(S/\mathcal{R})} = \left[\mathrm{I}_{G,\mathcal{B}}(s)\right] \cdot \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$$

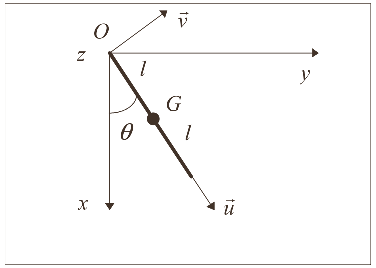
Si A n'est pas un point du solide (S), on applique la relation de changement de point vers un point où le moment cinétique a une expression simple, par exemple G :

$$\vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})} = \vec{\sigma}_{G(S/\mathcal{R})} + A\vec{G} \wedge \vec{R}_{c(S/\mathcal{R})}$$

Ce qui donne (Théorème de Koenig) :

$$\forall A \qquad \vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})} = \left[\mathrm{I}_{G,\mathcal{B}}(s)\right] \cdot \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} + A\vec{G} \wedge m\,\vec{V}_{(G/\mathcal{R})}$$

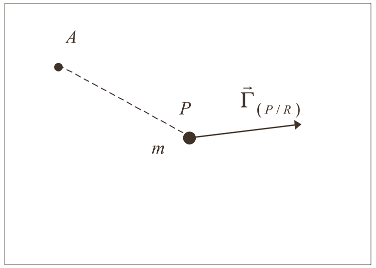
V APPLICATION : BARRE EN ROTATION



TORSEUR DYNAMIQUE

C'est le torseur dont la résultante est le vecteur quantité d'accélération.

I DEFINITION POUR UN POINT MATERIEL



On appelle quantité d'accélération du point P dans son mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$ la quantité :

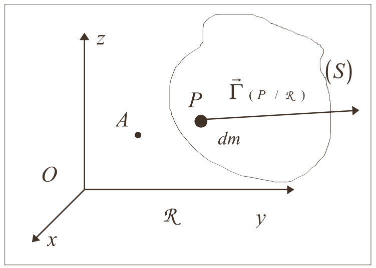
$$\vec{R}_d = m \ \vec{\Gamma}_{(P/\mathcal{R})} \qquad [M][L][T]^{-2}$$

On appelle moment dynamique en un point A du point M dans son mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$ la quantité :

$$\vec{\delta}_{A(P/\mathcal{R})} = \vec{AP} \wedge m\vec{\Gamma}_{(P/\mathcal{R})} \qquad [M][L]^2[T]^{-2}$$

II DEFINITION DU TORSEUR DYNAMIQUE D'UN SOLIDE

Soit un solide (S) en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$. Au point courant P on associe la masse élémentaire dm.



Le torseur dynamique associé à l'ensemble des quantités d'accélération de chaque point du solide a pour éléments de réduction en A :

$$\left[\mathcal{D}_{(S/\mathcal{R})}\right] = \left[\vec{R}_{d(S/\mathcal{R})} = \int_S \vec{\Gamma}_{(P/\mathcal{R})}\, dm \qquad \vec{\delta}_{A(S/\mathcal{R})} = \int_S \vec{AP} \wedge \vec{\Gamma}_{(P/\mathcal{R})}\, dm \right]_A$$

où :

- $\vec{R}_{d(S/\mathcal{R})}$ est la résultante dynamique,
- $\vec{\delta}_{A(S/\mathcal{R})}$ est le moment dynamique au point A.

Ces quantités sont liées par la relation classique de changement de point du champ des moment d'un torseur. Soit :

$$\vec{\delta}_{A(S/\mathcal{R})} = \vec{\delta}_{B(S/\mathcal{R})} + \vec{AB} \wedge \vec{R}_{d(S/\mathcal{R})}$$

III EXPRESSION DE LA RESULTANTE DYNAMIQUE

On a d'après la définition du centre d'inertie :

$$m\,\vec{OG} = \int_S \vec{OP}\, dm$$

où G désigne le centre d'inertie du solide (S) et m sa masse. En dérivant deux fois par rapport au temps dans le repère $\mathcal{R}(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$:

$$m\left(\frac{d^2}{dt^2}\vec{OG}\right)_{\mathcal{R}} = \int_S \left(\frac{d^2}{dt^2}\vec{OP}\right)_{\mathcal{R}} dm$$

$$m\,\vec{\Gamma}_{(G/\mathcal{R})} = \int_S \vec{\Gamma}_{(P/\mathcal{R})}\, dm$$

Finalement :

$$\vec{R}_{d(S/\mathcal{R})} = m \ \vec{\Gamma}_{(G/\mathcal{R})}$$

La résultante dynamique est la quantité d'accélération du centre d'inertie G affecté de la masse totale m.

IV EXPRESSION DU MOMENT DYNAMIQUE D'UN SOLIDE RIGIDE

Soit un point A n'appartenant pas nécessairement au solide (S). Le moment cinétique s'écrit :

$$\vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})} = \int_S \vec{AP} \wedge \vec{V}_{(P/\mathcal{R})}\, dm$$

En dérivant par rapport à t dans le repère $\mathcal{R}(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$:

$$\left(\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})}\right)_{\mathcal{R}} = \int_S \left(\frac{d}{dt}\vec{AP}\right)_{\mathcal{R}} \wedge \vec{V}_{(P/\mathcal{R})}\, dm + \int_S \vec{AP} \wedge \left(\frac{d}{dt}\vec{V}_{(P/\mathcal{R})}\right)_{\mathcal{R}} dm$$

Or :

$$\left(\frac{d}{dt}\vec{AP}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d}{dt}\vec{OP}\right)_{\mathcal{R}} - \left(\frac{d}{dt}\vec{OA}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{V}_{(P/\mathcal{R})} - \vec{V}_{(A/\mathcal{R})}$$

D'où :

$$\left(\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})}\right)_{\mathcal{R}} = \int_S \left(\vec{V}_{(P/\mathcal{R})} - \vec{V}_{(A/\mathcal{R})}\right) \wedge \vec{V}_{(P/\mathcal{R})}\, dm \; + \; \int_S \vec{AP} \wedge \vec{\Gamma}_{(P/\mathcal{R})}\, dm$$

On fait ainsi apparaître le moment dynamique $\vec{\delta}_{A(S/\mathcal{R})}$:

$$\left(\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})}\right)_{\mathcal{R}} = -\vec{V}_{(A/\mathcal{R})} \wedge \int_S \vec{V}_{(P/\mathcal{R})}\, dm \; + \; \vec{\delta}_{A(S/\mathcal{R})}$$

Finalement :

$$\forall A \qquad \vec{\delta}_{A(S/\mathcal{R})} = \left(\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})}\right)_{\mathcal{R}} + m\vec{V}_{(A/\mathcal{R})} \wedge \vec{V}_{(G/\mathcal{R})}$$

Cas particuliers où le second terme s'annule: :

- si A est un point fixe de $\mathcal{R}$, ou si $\vec{V}_{(A/\mathcal{R})}$ est colinéaire à $\vec{V}_{(G/\mathcal{R})}$, le moment dynamique en A s'écrit :

$$\vec{\delta}_{A(S/\mathcal{R})} = \left(\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})}\right)_{\mathcal{R}}$$

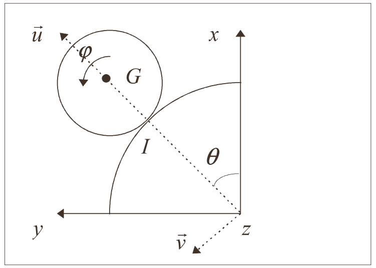
- si A est le centre d'inertie G de (S), le moment dynamique s'écrit :

$$\vec{\delta}_{G(S/\mathcal{R})} = \left(\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{G(S/\mathcal{R})}\right)_{\mathcal{R}}$$

- on peut également appliquer la relation :

$$\vec{\delta}_{A(S/\mathcal{R})} = \vec{\delta}_{G(S/\mathcal{R})} + \vec{AG} \wedge m\vec{\Gamma}_{(G/\mathcal{R})}$$

V APPLICATION : BOSSE DE BERCY



Principe fondamental de la dynamique - Théorèmes généraux

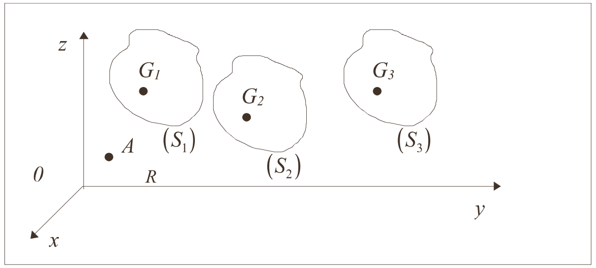
I DEFINITIONS - RAPPELS

I.1 Ensemble matériel

C'est un ensemble constitué par plusieurs solides (rigides ou non) pouvant présenter des liaisons entre eux.

I.2 Torseurs cinétique et dynamique d'un ensemble matériel

Soit Σ un ensemble de solides S_i de centres de gravité et de masses respectifs G_i et m_i en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$ de centre O.



On a :

$$m(\Sigma) = \sum_i m_i$$

Le centre d'inertie de l'ensemble Σ est le point G défini par :

$$m(\Sigma)\vec{OG} = \sum_i m_i \vec{OG_i}$$

d'où, en dérivant par rapport au temps dans le repère $\mathcal{R}$:

$$m(\Sigma)\vec{V}(G/\mathcal{R}) = \sum_i m_i \vec{V}(G_i/\mathcal{R})$$

et :

$$m(\Sigma)\vec{\Gamma}(G/\mathcal{R}) = \sum_i m_i \vec{\Gamma}(G_i/\mathcal{R})$$

De même, le moment cinétique en un point A de l'ensemble Σ est :

$$\vec{\sigma}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = \int_\Sigma \vec{AM} \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R})dm = \sum_i \int_{S_i} \vec{AM} \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R})dm$$

d'où :

$$\vec{\sigma}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = \sum_i \vec{\sigma}_A(S_i/\mathcal{R})$$

Finalement, en termes de torseurs cinétique et dynamique :

$$\left[\mathcal{C}i(\Sigma/\mathcal{R})\right]_A = \sum_i \left[\mathcal{C}i(s_i/\mathcal{R})\right]_A$$

et :

$$\left[\mathcal{D}(\Sigma/\mathcal{R})\right]_A = \sum_i \left[\mathcal{D}(s_i/\mathcal{R})\right]_A$$

II ENONCE DU PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE

Il existe au moins un repère - appelé repère galiléen (ou absolu) - et une chronologie - appelée chronologie absolue - tel que, pour tout ensemble matériel Σ (de solides rigides ou non), le torseur dynamique est égal au torseur des efforts extérieurs s'exerçant sur l'ensemble matériel.

$$\left[\mathcal{D}(\Sigma/\mathcal{R})\right] = \left[F_{ext/\Sigma}\right]$$

soit :

$$\left[\vec{R}_d(\Sigma/\mathcal{R}) \quad \vec{\delta}_A(\Sigma/\mathcal{R})\right]_A = \left[\vec{R}_{[F_{ext/\Sigma}]} \quad \vec{M}_{A[F_{ext/\Sigma}]}\right]_A$$

Remarque :

- les torseurs sont écrits au même point ;
- le cadre de la mécanique classique implique l'invariabilité de la masse d'un système au cours du temps ;
- le repère galiléen est, en principe, celui de Copernic ; en pratique, tout repère lié à la terre est suffisant pour la plupart des problèmes considérés dans ce cours ;
- dans ce cours, on rappelle que l'on ne s'intéresse qu'aux solides rigides ; la résultante dynamique se calcule alors grâce aux formules énoncées dans le chapitre précédent ;
- on rappelle que la notion d'effort extérieur dépend de l'ensemble considéré.

III CONSEQUENCES : THEOREMES GENERAUX

L'égalité du torseur dynamique et du torseur des efforts extérieurs entraîne :

- l'égalité des résultantes : c'est le théorème de la résultante dynamique ou théorème du centre de gravité,
- l'égalité des moments en un point A : c'est le théorème du moment dynamique.

III.1 Théorème du centre de gravité

Théorème : la résultante générale du torseur des efforts extérieurs s'exerçant sur un ensemble matériel Σ est égale à la résultante dynamique de l'ensemble Σ :

$$\vec{R}_{d\,(\Sigma / \mathcal{R})} = \vec{R}_{[F_{ext/\Sigma}]}$$

On obtient :

- 3 équations scalaires dans le cas général,
- 2 équations scalaires pour un problème plan.

III.2 Théorème du moment dynamique

Théorème : le moment en un point A du torseur des efforts extérieurs s'exerçant sur un ensemble matériel A est égal au moment dynamique :

$$\vec{\delta}_{A\,(\Sigma / \mathcal{R})} = \vec{M}_{A[F_{ext/\Sigma}]}$$

On obtient :

- 3 équations scalaires dans le cas général,
- 1 équation scalaire pour un problème plan.

Cas particulier :

$$\text{si } \begin{cases} \vec{V}_{(A/\mathcal{R})} = \vec{0} \text{ ou} \\ A \equiv G \text{ ou} \\ \vec{V}_{(A/\mathcal{R})} /\!/ \vec{V}_{(G/\mathcal{R})} \end{cases} \quad \text{alors comme } m\,\vec{V}_{A/\mathcal{R}} \wedge \vec{V}_{G/\mathcal{R}} = \vec{0} \quad \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\vec{\sigma}_{A\,(\Sigma/\mathcal{R})}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{M}_{A[F_{ext/\Sigma}]}$$

Cette restriction est appelée parfois "théorème du moment cinétique".

III.3 Cas de la statique

Dans le cas de la statique, tous les points de Σ sont fixes par rapport à $\mathcal{R}$. On a :

$$\forall P, \vec{V}_{(P \in \Sigma / \mathcal{R})} = \vec{0}$$

Le principe fondamental de la statique s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} \vec{0} & \vec{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{R}_{[F_{ext/\Sigma}]} & \vec{M}_{A[F_{ext/\Sigma}]} \end{bmatrix}_A$$

Ainsi présentée, la statique, étudiée précédemment, est un cas particulier de la dynamique.

IV THEOREME DE L'ACTION ET DE LA REACTION

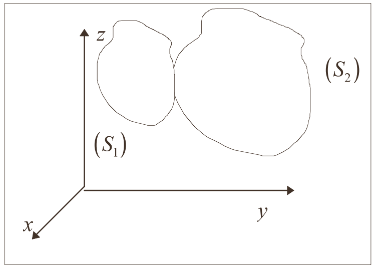
Soient deux ensembles matériels S_1 et S_2 en mouvement par rapport à un repère galiléen $\mathcal{R}$.

Soient :

- $[F_{1/2}]$ le torseur des actions de S_1 sur S_2,
- $[F_{2/1}]$ le torseur des actions de S_2 sur S_1.

Soient :

- $[\mathcal{D}(1/\mathcal{R})]$ le torseur dynamique du mouvement de S_1 par rapport à $\mathcal{R}$,
- $[\mathcal{D}(2/\mathcal{R})]$ le torseur dynamique du mouvement de S_2 par rapport à $\mathcal{R}$,



On applique le PFD au solide (1) : parmi les forces extérieures à 1, on distingue :

- les actions sur 1 de la part de 2.
- les actions sur 1 qui sont extérieures à 1 et à 2.

On a :

$$[\mathcal{D}(1/\mathcal{R})] = [F_{2/1}] + [F_{\text{ext à 1 et 2}/1}]$$

On applique de façon similaire le PFD au solide (2) :

$$[\mathcal{D}(2/\mathcal{R})] = [F_{1/2}] + [F_{\text{ext à 1 et 2}/2}]$$

On applique le PFD à l'ensemble (1+2) :

$$[\mathcal{D}(1+2/\mathcal{R})] = [F_{\text{ext à 1 et 2}/(1+2)}]$$

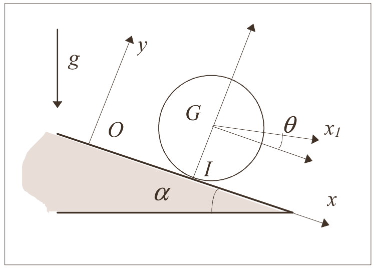
On obtient par différence :

$$[F_{1/2}] + [F_{2/1}] = [0]$$

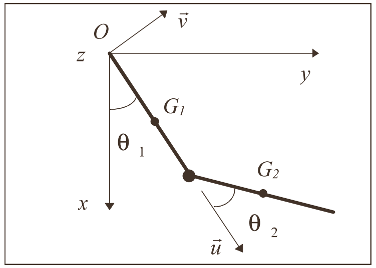
Théorème : le torseur des actions d'un ensemble S_1 sur un ensemble S_2 est l'opposé du torseur des actions de S_2 sur S_1.

V APPLICATIONS

V.1 Cylindre roulant sans glisser sur un plan incliné



V.2 Pendule double

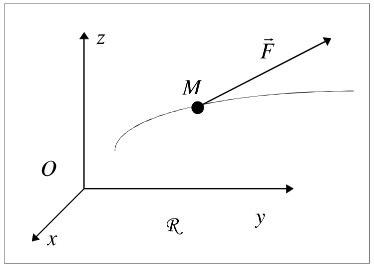


TRAVAIL - PUISSANCE

I DEFINITIONS

I.1 Travail d'une force

Soit un point M en mouvement par rapport à un repère R. Soit une force $\vec{F}$ agissant sur ce point.



On appelle travail élémentaire entre les instants t et $t+dt$ la quantité scalaire :

$$d\mathsf{T}_{\mathsf{R}} = \vec{F}\,.\,d\vec{OM} \qquad\qquad J \text{ ou } mN$$

où $d\vec{OM}$, déplacement élémentaire du point M dans R, est un vecteur tangent à la trajectoire de M par rapport à R.

On a :

$$\vec{V}_{(M\,/\,\mathcal{R})} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$$

d'où :

$$d\mathcal{T}_{\mathcal{R}} = \vec{F}\,.\,\vec{V}_{(M\,/\,\mathcal{R})}\,dt$$

Ainsi le travail développé par la force $\vec{F}$ entre les instants t_0 et t_1 s'écrit :

$$\mathcal{T}_{\mathcal{R}\,t_0}^{\;t_1} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\,.\,\vec{V}_{(M\,/\,\mathcal{R})}\,dt$$

I.2 Puissance d'une force

La puissance développée à l'instant t par la force $\vec{F}$ est, par définition, la quantité de travail effectuée par la force $\vec{F}$ par unité de temps :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \vec{F}\,.\,\vec{V}_{(M\,/\,\mathcal{R})} \qquad\qquad Js^{-1} \text{ ou } W$$

Ainsi :

$$\mathsf{T}_{\mathsf{R}\,t_0}^{\;t_1} = \int_{t_0}^{t_1} \mathsf{P}_{\mathsf{R}}\,dt$$

Remarque : les notions de travail et de puissance sont liées à un repère de référence.

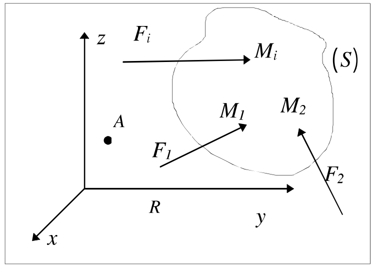
II PUISSANCE DEVELOPPEE PAR UN TORSEUR DE FORCES S'EXERÇANT SUR UN SOLIDE

Soit un solide (S) en mouvement par rapport à un repère $\mathsf{R} = (O\vec{x}\vec{y}\vec{z})$. Le torseur cinématique en un point A est noté :

$$\left[\mathsf{C}_{S\,/\,\mathcal{R}}\right] = \left[\vec{\Omega}_{S\,/\,\mathcal{R}} \quad \vec{V}_{(A\,\in S\,/\,\mathcal{R})}\right]_A$$

Ce solide est soumis à l'action d'un ensemble de forces extérieures F_i agissant en des points M_i dont le torseur résultant en A est noté :

$$\left[F_{ext\,/\,S}\right] = \left[\vec{R}_{[F_{ext/S}]} \qquad \vec{M}_{A[F_{ext/S}]}\right]_A$$



La puissance de cet ensemble de forces s'écrit par définition :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \sum_i \left(\vec{F}_i\,.\,\vec{V}_{(M_i\,\in S/\mathcal{R})}\right)$$

Or :

$$\vec{V}_{(M_i\,\in S\,/\,\mathcal{R})} = \vec{V}_{(A\,\in S\,/\,\mathcal{R})} + \vec{M_iA} \wedge \vec{\Omega}_{S\,/\,\mathcal{R}}$$

Ainsi :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \left(\sum_i \vec{F}_i\right).\,\vec{V}_{(A\,\in S\,/\,\mathcal{R})} + \sum_i \left(\vec{F}_i\,,\,\vec{M_iA}\,,\,\vec{\Omega}_{S\,/\,\mathcal{R}}\right) = \vec{R}_{[F_{ext/S}]}\,.\,\vec{V}_{(A\,\in S\,/\,\mathcal{R})} + \vec{\Omega}_{S\,/\,\mathcal{R}}\,.\sum_i \left(\vec{AM}_i \wedge \vec{F}_i\right)$$

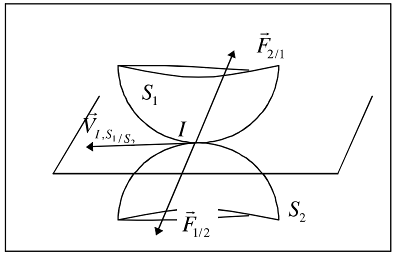
Soit finalement :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \vec{R}_{[F_{ext/S}]}\,.\,\vec{V}_{(A\in S/\mathcal{R})} + \vec{\Omega}_{S\,/\,\mathcal{R}}\,.\,\vec{M}_{A[F_{ext/S}]} = \left[\vec{R}_{[F_{ext/S}]} \quad \vec{M}_{A[F_{ext/S}]}\right]_A \cdot \left[\vec{\Omega}_{S\,/\,\mathcal{R}} \quad \vec{V}_{(A\,\in S\,/\,\mathcal{R})}\right]_A = \left[F_{ext/S}\right].\left[C_{S/\mathcal{R}}\right]$$

La puissance d'un torseur d'efforts agissant sur un solide (S) est égale au produit de ce torseur d'efforts et du torseur cinématique.

III PUISSANCE DES ACTIONS DE CONTACT ENTRE DEUX SOLIDES

On considère deux solides (S_1) et (S_2) en mouvement par rapport à un repère R et en contact ponctuel au point I .



On a, d'après le théorème de l'action et de la réaction :

$$[F_{2/1}] = -[F_{1/2}]$$

On calcule la puissance développée par ces deux actions de contact :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \vec F_{2/1}.\vec V_{(I\in 1/\mathcal{R})} + \vec F_{1/2}.\vec V_{(I\in 2/\mathcal{R})} = \vec F_{2/1}.\left(\vec V_{(I\in 1/\mathcal{R})} - \vec V_{(I\in 2/\mathcal{R})}\right) = \vec F_{2/1}.\vec V_{(I\in 1/2)}$$

d'où :

$$\mathrm{P}_{\mathrm{R}} = \vec F_{2/1}\,\vec V g(I,1/2)$$

On rappelle que $\vec V_{I\in 1/2}$ représente la vitesse de glissement en I du solide (S_1) par rapport au solide (S_2).

Remarques :

- la puissance des efforts de contact est indépendante de tout repère ; elle ne dépend que du mouvement relatif des deux solides $\mathcal{P} = \vec F_{2/1}\,\vec V g\,(I,1/2)$;
- si l'on applique la loi de coulomb :

  $\vec F_{2/1} = \vec N_{2/1} + \vec T_{2/1}$ et $\vec T_{2/1}$ opposé à $\vec V_{(I\in 1/2)}$

  d'où :

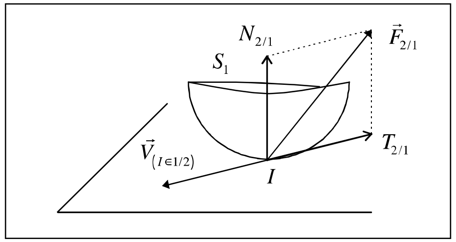
  $$\mathcal{P} = \vec F_{2/1}.\vec V_{(I\in 1/2)} = \left(\vec N_{2/1} + \vec T_{2/1}\right).\vec V_{(I\in 1/2)} = \vec T_{2/1}.\vec V_{(I\in 1/2)}$$

  cette puissance est donc négative ; du fait du frottement, elle se transforme en chaleur ;
- les conditions pour que la puissance des efforts de contact soit nulle sont :

  * $\vec V_{(I\in 1/2)}$ (roulement sans glissement)

  ou :

  * $\vec T_{2/1} = \vec 0$, ce qui correspond à $f = 0$ (contact sans frottement).



IV GENERALISATION: PUISSANCE DES EFFORTS INTERIEURS A UNE LIAISON

On considère deux solides (S_1) et (S_2) en liaison l'un par rapport à l'autre.

Soit $[F_{1/2}]$ le torseur des actions de liaison entre le solide (S_1) et le solide (S_2) et $[C_{2/1}]$ le torseur cinématique du mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) alors:

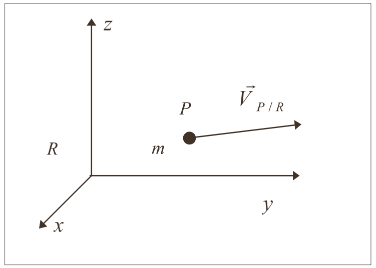
$$P_{\text{int}} = [F_{1/2}][C_{2/0}] + [F_{2/1}][C_{1/0}] = [F_{1/2}][C_{2/0}] - [F_{1/2}][C_{1/0}] = [F_{1/2}][C_{2/1}]$$

ENERGIE CINETIQUE

I DEFINITION

I.1 Energie cinétique d'un point matériel

Soit un point matériel P de masse élémentaire m en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$.

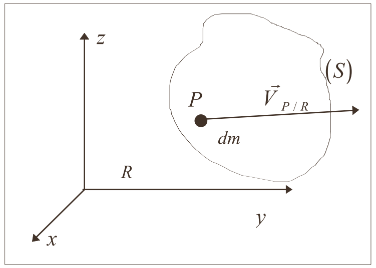


Par définition, on appelle énergie cinétique du point matériel P, la quantité scalaire :

$$\mathcal{E}_{P/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} m \vec{V}^2_{(P/\mathcal{R})} \qquad \text{en } J$$

I.2 Energie cinétique d'un système matériel

Soit un système matériel (S) en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$.



L'énergie cinétique du système (S) est la quantité scalaire :

$$\mathcal{E}_{S/\mathcal{R}} = \int_S \frac{1}{2} \vec{V}^2_{(P/\mathcal{R})} dm$$

II CALCUL DE L'ENERGIE CINETIQUE D'UN SOLIDE

On considère le mouvement du solide (S) par rapport à $\mathcal{R} = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Soit G le centre d'inertie de (S).

On a :

$$\vec{V}_{(P \in S/\mathcal{R})} = \vec{V}_{(G \in S/\mathcal{R})} + \vec{PG} \wedge \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{S/\mathcal{R}} &= \frac{1}{2} \int_S (\vec{V}_{(G \in S/\mathcal{R})} + \vec{PG} \wedge \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}) \,.\, (\vec{V}_{(G \in S/\mathcal{R})} + \vec{PG} \wedge \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}) \, dm \\
&= \frac{1}{2} \int_S \vec{V}^2_{(G \in S/\mathcal{R})} \, dm + \int_S \vec{V}_{(G \in S/\mathcal{R})} . (\vec{PG} \wedge \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}) \, dm + \frac{1}{2} \int_S (\vec{PG} \wedge \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}) \,.\, (\vec{PG} \wedge \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}) \, dm
\end{aligned}$$

Dans le premier terme de gauche $\vec{V}_{(G \in S/\mathcal{R})}$ est une constante. Dans le second terme de gauche $\vec{V}_{G \in S/\mathcal{R}}$ et $\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$ sont des constantes vis à vis de l'intégration : ce terme s'écrit :

$$\vec{V}_{(G \in S/\mathcal{R})} . \left(\int_S \vec{PG} \, dm \wedge \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \right) = \vec{V}_{(G \in S/\mathcal{R})} . \left(\vec{0} \wedge \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \right) = \vec{0}$$

Le second terme s'écrit, en appliquant les règles du produit mixte :

$$\frac{1}{2} \int_S (\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \wedge \vec{GP}) \,.\, (\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \wedge \vec{GP}) \, dm = \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} . \int_S \vec{GP} \wedge (\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \wedge \vec{GP}) \, dm = \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} . \left(\left[I_G(S) \right] . \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \right)$$

Finalement :

$$\mathcal{E}_{S/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} m \vec{V}^2_{(G \in S/\mathcal{R})} + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} . \left(\left[I_G(S) \right] . \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \right)$$

Remarque 1 : si il existe un point A (S) fixe dans le mouvement de (S) par rapport à $\mathcal{R} = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$; on a :

$$\vec{V}_{(P \in S/\mathcal{R})} = \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})} + \vec{PA} \wedge \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} = \vec{PA} \wedge \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$$

le calcul précédent devient de manière évidente :

$$\mathcal{E}_{S/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} . \left(\left[I_A(S) \right] . \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \right)$$

Ainsi, l'énergie cinétique d'un solide peut être vue comme la somme de l'énergie cinétique du centre de gravité G affecté de toute la masse m et de l'énergie cinétique du solide dans son mouvement autour de G (supposé fixe par rapport à $\mathcal{R}$).

Remarque 2 : Energie cinétique d'un ensemble de solides

Soit (S) un ensemble de solides (S_i) $i=1,n$ de manière évidente, au vu des propriétés de l'intégrale on a:

$$\mathcal{E}_{S/\mathcal{R}} = \sum_i \mathcal{E}_{S_i/\mathcal{R}}$$

III THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE POUR UN SOLIDE

On considère le solide (S) dans son mouvement par rapport à un repère galiléen $\mathcal{R}$. On a :

$$\mathcal{E}_{S/\mathcal{R}} = \int_S \frac{1}{2} \vec{V}^2{}_{(P/\mathcal{R})}\, dm$$

En dérivant par rapport au temps dans $\mathcal{R}$:

$$\left(\frac{d\,\mathcal{E}_{S/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \int_S \vec{V}_{(P/\mathcal{R})} . \left(\frac{d\,\vec{V}_{(P/\mathcal{R})}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} dm = \int_S \vec{V}_{(P/\mathcal{R})} . \vec{\Gamma}_{(P/\mathcal{R})}\, dm$$

Soit A un point de (S), on a :

$$\vec{V}_{(P\in S/\mathcal{R})} = \vec{V}_{(A\in S/\mathcal{R})} + \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \wedge \vec{AP}$$

Ainsi :

$$\left(\frac{d\,\mathcal{E}_{S/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \int_S \vec{V}_{(A\in S/\mathcal{R})} . \vec{\Gamma}_{(P/\mathcal{R})}\, dm + \int_S \left(\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \wedge \vec{AP}\right) . \vec{\Gamma}_{(P/\mathcal{R})}\, dm$$

$$= \vec{V}_{(A\in S/\mathcal{R})} . \int_S \vec{\Gamma}_{(P/\mathcal{R})}\, dm + \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} . \int_S \left(\vec{AP} \wedge \vec{\Gamma}_{(P/\mathcal{R})}\right) dm$$

On voit apparaître la résultante dynamique et le moment dynamique au point A. Ainsi :

$$\left(\frac{d\,\mathcal{E}_{S/R}}{dt}\right)_{R} = \vec{V}_{(A\in S/\mathcal{R})} . \vec{R}_d + \vec{\Omega}_{S/R} . \vec{\delta}_{A(S/\mathcal{R})} = \begin{bmatrix} \vec{R}_d & \vec{\delta}_{A(S/\mathcal{R})} \end{bmatrix}_A . \begin{bmatrix} \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} & \vec{V}_{(A\in S/\mathcal{R})} \end{bmatrix}_A$$

$$\left(\frac{d\,\mathcal{E}_{S/R}}{dt}\right)_{R} = \left[D(S/\mathcal{R})\right] \cdot \left[C(S/\mathcal{R})\right]$$

Or, d'après le principe fondamental de la dynamique, il y a égalité entre le torseur dynamique et le torseur des efforts extérieurs.

$$\left[D(S/\mathcal{R})\right] = \left[F_{Ext/S}\right]$$

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit donc :

$$\left(\frac{d\,\mathcal{E}_{S/R}}{dt}\right)_{R} = \left[F_{Ext/S}\right] \cdot \left[C(S/\mathcal{R})\right]$$

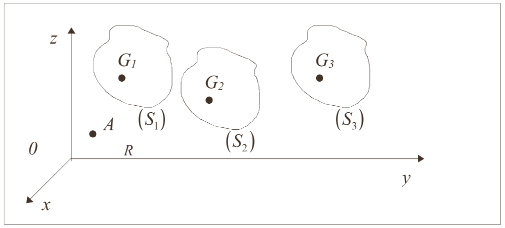
$$\left(\frac{d\,\mathcal{E}_{S/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} \vec{R}_{[F_{ext/S}]} & \vec{M}_{A[F_{ext/S}]} \end{bmatrix}_A . \begin{bmatrix} \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} & \vec{V}_{(A\in S/\mathcal{R})} \end{bmatrix}_A = \mathcal{P}_{\mathcal{R}}$$

Théorème : dans le mouvement du solide (S) par rapport à un repère galiléen, la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique est égale à la puissance des forces extérieures agissant sur le solide.

Remarque : ce théorème permet d'obtenir une équation scalaire ; dans beaucoup de cas, cette formulation permet d'écrire rapidement une équation de mouvement du système ne faisant pas apparaître des inconnues d'effort.

IV THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE POUR UN ENSEMBLE DE SOLIDES

Soit Σ un ensemble de solides S_i en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$ de centre O.



On a comme précédemment:

$$\mathcal{E}_{\Sigma/\mathcal{R}} = \sum_i \mathcal{E}_{S_i/\mathcal{R}}$$

Dans l'écriture du principe fondamental de la dynamique pour chacun des solides, il y a égalité entre le torseur dynamique et le torseur des efforts extérieurs à chacun des solides isolé. D'où:

$$\left[D(S_i/\mathcal{R})\right] = \left[F_{Ext/S_i}\right] = \left[F_{Ext\,\grave{a}\,\Sigma_i/S_i}\right] + \left[F_{\mathrm{int}\,\grave{a}\,\Sigma_i/S_i}\right]$$

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit dans ce cas:

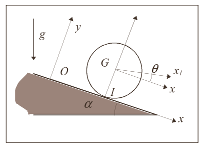
$$\left(\frac{d\,\mathcal{E}_{S/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \mathcal{P}_{Ext/\mathcal{R}} + \mathcal{P}_{int/\mathcal{R}}$$

Théorème : dans le mouvement d'un ensemble de solides (Σ) par rapport à un repère galiléen, la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique de l' ensemble de solides (Σ) est égale:

- à la puissance des forces extérieures agissant sur l'ensemble de solides (Σ),
- augmentée de la puissance des forces intérieures agissant dans l'ensemble des solides (Σ)

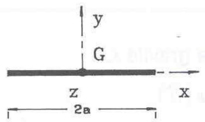
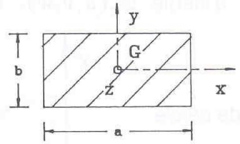
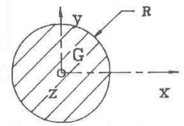
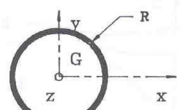
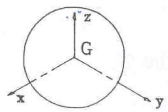
Remarque : On retrouve le théorème précédent (cas du solide) quand $\mathcal{P}_{int/\mathcal{R}} = 0$

IV APPLICATION : BILLE SUR PLAN INCLINE

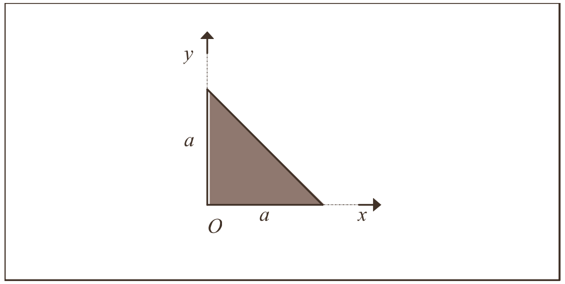


GEOMETRIE DES MASSES

X.1 Déterminer les matrices d'inertie des solides de base définis ci-dessous :

barre		$\bar{\bar{I}}_{G,\mathcal{R}} = \left(\quad \right)_{G,\mathcal{R}}$
plaque		$\bar{\bar{I}}_{G,\mathcal{R}} = \left(\quad \right)_{G,\mathcal{R}}$
disque plan		$\bar{\bar{I}}_{G,\mathcal{R}} = \left(\quad \right)_{G,\mathcal{R}}$
cerceau		$\bar{\bar{I}}_{G,\mathcal{R}} = \left(\quad \right)_{G,\mathcal{R}}$
sphère pleine		$\bar{\bar{I}}_{G,\mathcal{R}} = \left(\quad \right)_{G,\mathcal{R}}$

X.2 Soit une plaque plane de masse m et de forme triangulaire :



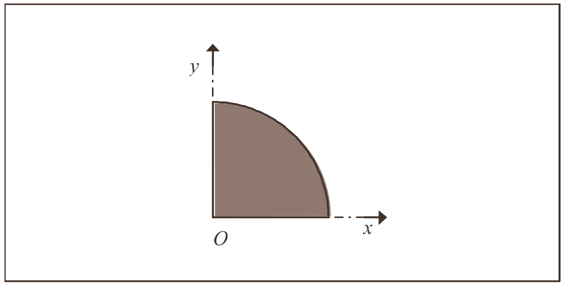
a) Déterminer la position du centre de gravité G.

b) Déterminer la matrice d'inertie $\left[\mathrm{I}_{O,\mathcal{B}}(s)\right]$.

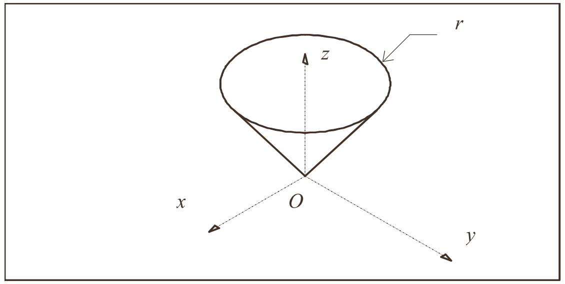
c) Déterminer la matrice d'inertie $\left[\mathrm{I}_{G,\mathcal{B}}(s)\right]$.

d) Déterminer les axes principaux d'inertie $\mathcal{B}_p(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ au point O. Calculer la matrice $\left[\mathrm{I}_{G,\mathcal{B}p}(s)\right]$. Conclusions.

X.3 Même question que X.2 avec un quart de cercle de rayon a.



X.4 Soit un cône (C) de sommet O, de hauteur h, de rayon r et de masse m :



a) Déterminer un trièdre principal d'inertie $\mathcal{B}_p$ au point O.

b) Calculer la position du centre d'inertie G.

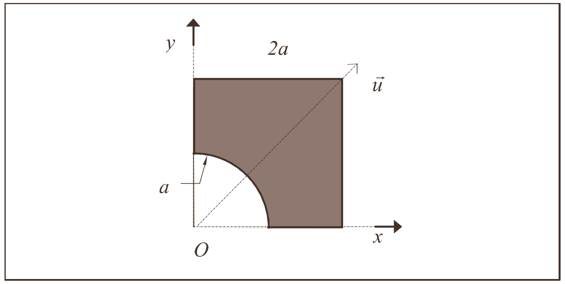
c) Déterminer la matrice d'inertie $\left[\mathrm{I}_{O,\mathcal{B}p}(C)\right]$.

d) Déterminer la matrice d'inertie $\left[\mathrm{I}_{G,\mathcal{B}p}(C)\right]$.

Thé au harem de Huyghens

X.5 Christian Huygens croqua dans un petit-beurre. Un gobelet dans une main et le petit-beurre dans l'autre, il fixa malicieusement ses invitées. "Mesdames", leur dit-il, "je vous propose aujourd'hui, pour le fun, de calculer quelques grandeurs inertielles caractéristiques de ces solides".

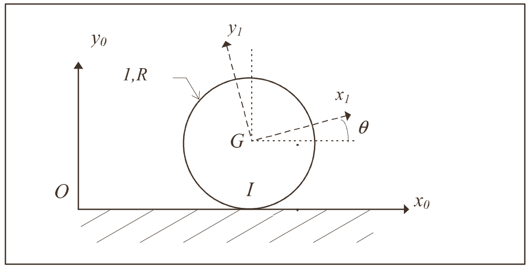
a) Un modèle géométrique associé au petit-beurre entamé est proposé ci dessous. Il s'agit d'une plaque (P) de masse m et d'épaisseur $e \ll a$.



Calculer le moment d'inertie de la plaque (P) par rapport à l'axe diagonal $\Delta = (O\vec{u})$.

TORSEUR CINETIQUE

XI.1 La roue 1 en contact avec un sol plat roule sans glisser et est modélisée comme suit :



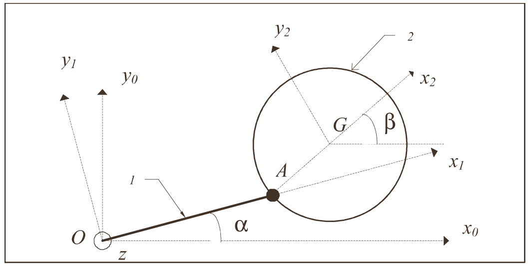
1 est un disque plein de masse m, de rayon R et de Centre d'Inertie G.

a) Calculer le torseur cinétique de 1 dans son mouvement par rapport à 0 au point G.

b) Calculer le torseur cinétique de $1/0$ au point I (on simplifiera le résultat en considérant qu'il existe Roulement sans Glissement en I de 1 par rapport à 0).

TORSEUR DYNAMIQUE

XII.1 Un manège de foire est, en vue de calculs dynamiques, modélisé comme suit:



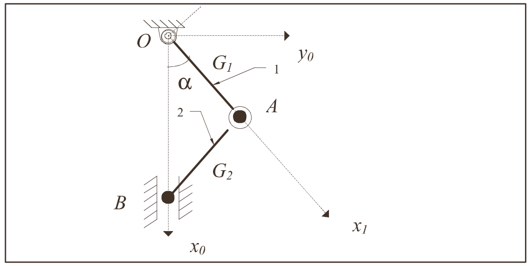
1 est une barre dont la masse est négligée. 2 est un disque de masse m, de rayon R et de centre de gravité G. 1 et 2 sont astreints à demeurer dans le plan $\left(O\vec{x}_0\vec{y}_0\right)$.

a) Ecrire le torseur cinétique $\left[\mathcal{C}i_{\,(1+2/0)}\right]$ de ($1+2$) par rapport à 0 au point O.

b) Ecrire le torseur dynamique $\left[\mathcal{D}_{(1+2/0)}\right]$ de ($1+2$) par rapport à 0 au point O.

XII.2 Considérons le système articulé constitué des deux barres 1 et 2.

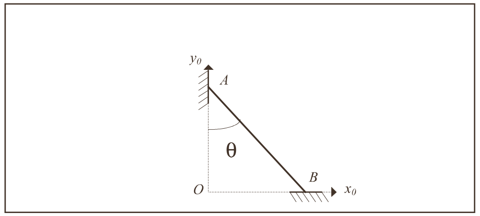
$OA = AB = l$



Calculer le moment dynamique $\vec{\delta}_{O(1+2/0)}$.

THEOREMES GENERAUX

XIII.1 On étudie la stabilité d'une échelle 1 appuyée contre un mur 0 L'échelle est modélisée par une barre homogène de masse m et de longueur $2l$. Les contacts en A et B sont supposés ponctuels et sans frottement.



a) Ecrire le principe fondamental de la dynamique appliqué au solide 1 au Centre de Gravité G.

b) En déduire la loi du mouvement de l'échelle. Conditions initiales :

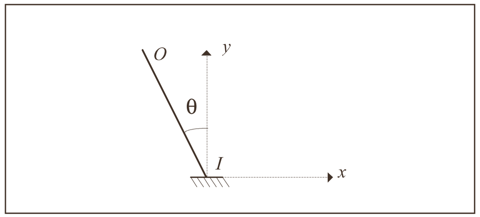
$$\text{à } t=0 \quad : \quad \theta=\theta_0 \ , \dot{\theta}=0$$

c) Quel est le domaine de validité de cette loi ?

d) Refaire le problème avec frottement.

XIII.2 Une barre de longueur $2l$ et de masse m est en appui en I sur une surface horizontale. Le modèle dynamique est proposé ci-dessous. Sa position spatiale est repérée par les coordonnées $(x_I, 0)$ du point I et l'angle θ. Le coefficient de frottement en I est f.

Elle est lâchée depuis la position définie par $I(0,0)$ et l'angle $\theta=\theta_0$



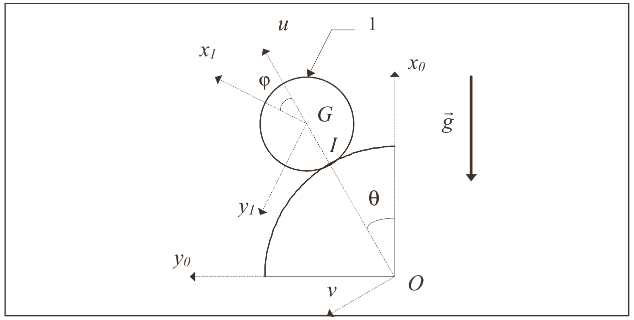
a) Etablir le principe fondamental de la dynamique appliqué à la barre

b) Discuter les différents cas de figure suivant qu'il existe ou non glissement au point I.

XIII.3 Etude d'une roue de moto abordant une bosse du circuit de Bercy.

La roue est modélisée par un disque homogène de rayon r et de masse m. La bosse est modélisée par un cylindre de rayon R. On considère les angles:

- θ angle positionnant le centre d'inertie G de 1;
- φ angle caractérisant plus particulièrement la rotation de la roue par rapport au sol.



a) Ecrire la condition de roulement sans glissement en I.

b) Appliquer le principe fondamental de la dynamique au solide 1 au point G.

c) En déduire la loi du mouvement en θ sachant que :

$$\text{à } t=0 \quad : \quad \theta=\theta_0 \ , \dot{\theta}=0$$

d) Pour quel angle θ_c y a t-il rupture du contact entre le sol et la roue ?

e) Pour quel angle θ_f y a t-il roulement sans glissement entre le sol et la roue ?

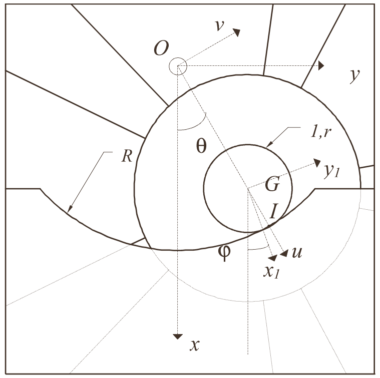
f) En déduire le domaine de validité des résultats obtenus en c).

XIII.4 Détermination de l'inertie d'un rotor.

Dans ce problème, les formes de la pièce 1 sont très complexes Par ailleurs, seul le moment d'inertie $I_{Gz}(1)$ nous intéresse ; on va ici le déterminer de façon expérimentale.

On fait rouler sans glisser le rotor 1 (de rayon r au point de contact) à l'intérieur d'un cylindre 0 de rayon R (fig.2). Le rotor a une masse m et un moment d'inertie $I_{Gz}(1)$ inconnu par rapport à l'axe $(G\vec{z})$. On considère les angles :

- θ angle positionnant le centre d'inertie de 1 ;
- φ angle caractérisant plus particulièrement la rotation du rotor par rapport au cylindre.



a) Ecrire le roulement sans glissement.

b) Appliquer le principe fondamental de la dynamique au solide 1 au point G.

c) En déduire les équations du mouvement.

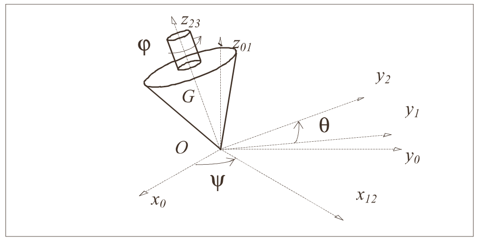
d) Dans le cas où θ reste petit, déduire de c) l'expression du moment d'inertie $I_{Gz}(1)$ en fonction de la période T des oscillations du rotor 1.

XIII.5 On étudie ici le phénomène de la toupie. Le modèle dynamique proposé est celui de la figure ci-dessous. La position de la toupie 1 est repérée par les trois angles d'Euler. On supposera que l'extrémité de la toupie reste confondue avec le centre O du repère $\mathcal{R}_0$. On supposera également connue la matrice d'inertie de la toupie au point O et dans un repère $\mathcal{R}_3$ lié à la toupie :

$$\left[\mathrm{I}_{O,\mathcal{B}_3}(1)\right] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

L'action de contact entre 0 et 1 est notée $\vec{R}_{0/1} = \begin{vmatrix} X_{0/1} \\ Y_{0/1} \\ Z_{0/1} \end{vmatrix}$ dans le repère $\mathcal{R}_1$:

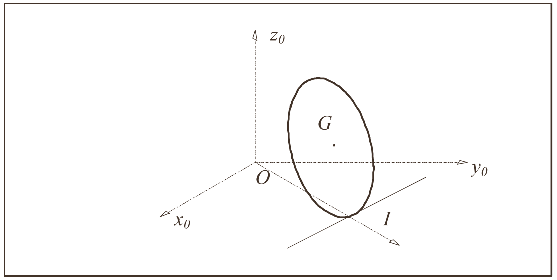
La position du centre de gravité G de la toupie est tel que $OG = a$.



a) Etablir les six équations du principe fondamental de la dynamique appliqué à la toupie 1.

b) On constate qu'en mouvement stationnaire, l'angle θ est une constante θ_0. En déduire les équations différentielles régissant le mouvement de la toupie dans cette phase.

XIII.6 Une pièce de monnaie 1 modélisée ici par un disque de masse m et de rayon R roule sans glisser sur le sol 0 (fig.1). Le paramétrage de la position de 1 est celui des angles d'Euler. On pose $OI = \rho$.

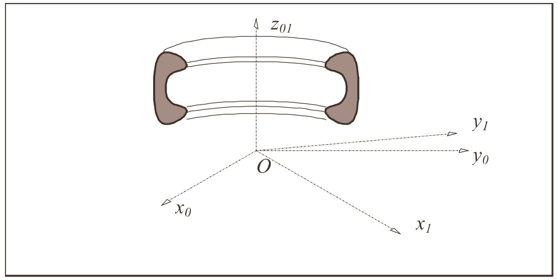


a) Ecrire l'équation de roulement sans glissement en I.

b) Etablir les six équations du principe fondamental de la dynamique appliqué à 1.

c) Discuter les solutions des équations différentielles.

XIII.7 On va montrer, dans cet exercice, qu'à grande vitesse, une mauvaise répartition des masses dans une roue de voiture provoque des vibrations. Ces vibrations sont préjudiciables au confort de conduite mais également nocives à terme pour l'ensemble du mécanisme de direction. On cherche alors comment, en modifiant cette répartition, équilibrer la roue.



Le modèle est celui de la figure ci-dessus. L'ensemble {pneu+jante+enjoliveur} est un solide 1 de centre de gravité G en rotation de paramètre θ $\left(\dot{\theta} = cte\right)$ par rapport à 0 grâce à une liaison pivot d'axe $\left(O\vec{z}_0\right)$.

Les défauts d'usinage, les perçages supplémentaires, l'inhomogénéité du pneu confèrent au système 1 une géométrie et une répartition des masses quelconque. Ainsi, la matrice d'inertie de 1 en un point O de l'axe de rotation est :

$$\left[\mathrm{I}_{O,\mathcal{B}_3}(1)\right] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}$$

Le torseur des actions de liaison en O entre 0 et 1 est noté : $\left[F_{2/1}\right] = \begin{bmatrix} X_{2/1} & L_{2/1} \\ Y_{2/1} & M_{2/1} \\ Z_{2/1} & 0 \end{bmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}_1$:

La position du centre de gravité G du système 1 dans $\mathcal{R}_1$ est $G(a,0,c)$. L'action du poids est négligée.

On vient fixer deux masses ponctuelles supplémentaires m_1 et m_2 à la roue en des points $P_1(r_1,\alpha_1,z_1)$ et $P_2(r_2,\alpha_2,z_2)$ dans $\mathcal{R}_1$ (coordonnées cylindriques).

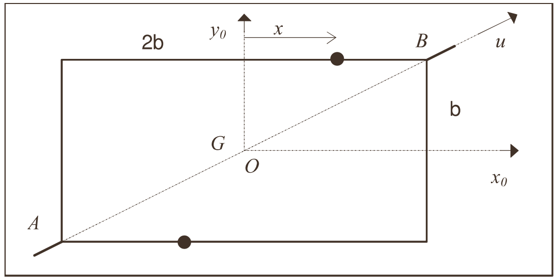
a) Ecrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'ensemble $\{1+P_1+P_2\}$.

b) Expliquer d'où proviennent les vibrations mentionnées plus haut.

c) Proposer des valeurs pour r_1, α_1, z_1 et r_2, α_2, z_2 pour annuler ces vibrations.

XIII.8 Equilibrage d'une plaque.

Soit une plaque de masse m, de largeur $2b$, de longueur $4b$ et d'épaisseur faible. Dans un mécanisme non représenté, cette plaque tourne autour de l'axe AB ; l'équilibrage est obtenu par l'intermédiaire de 2 masselottes de masse μ situées aux abscisses $+x$ et $-x$.



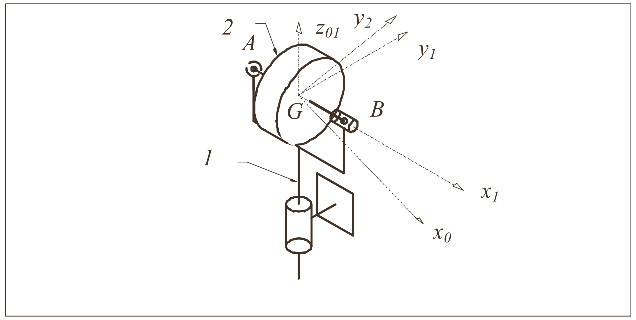
Calculer les masses minimum des 2 masselottes et leur position pour assurer l'équilibrage du système matériel.

XIII.9 Le dispositif représenté ci-dessous est destiné à illustrer l'effet du couple gyroscopique. La pièce *1* est une fourchette en rotation de paramètre ψ par rapport au bâti *0*. A l'intérieur de cette fourchette, tourne, à vitesse constante $\dot{\varphi}$, un rotor *2* de masse m dont la matrice d'inertie est :

$$\left[\mathrm{I}_{G,\mathcal{B}_2}(2)\right] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

La fourchette *1* est de masse négligeable par rapport à *2*.

La liaison en A est de type rotule, en B de type linéaire annulaire. On pose $AB = 2a$.



a) Ecrire les équations du principe fondamental de la dynamique appliqué au rotor.

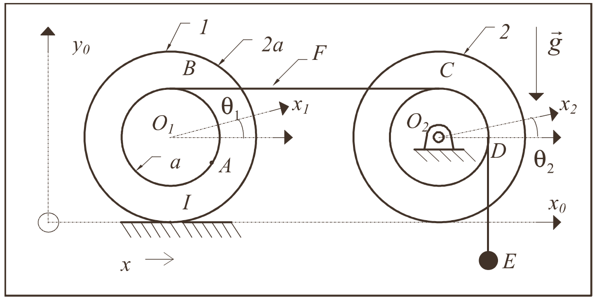
b) Exprimer les efforts en A et B en fonction des paramètres du problème.

c) Discuter la valeur de ces efforts et leur effet sur le comportement du mécanisme en fonction des valeurs des paramètres.

XIII.10 Le mécanisme représenté ci-dessous est un treuil relativement sommaire : l'utilisateur fait tourner la roue *1* qui tire et enroule un câble F passant autour une poulie de renvoi *2* et soulevant une masse M. On étudie plus particulièrement la phase où l'utilisateur lâche la roue *1* : le système est entraîné par la masse M.

Les paramètres de position sont:

- x : abscisse du point de contact I,
- y : ordonnée de la masse M,
- θ_1 et θ_2 : positions angulaires des deux poulies.



a) Exprimer $\dot{y}$, $\ddot{\theta}_1$, et $\ddot{\theta}_2$ en fonction de $\dot{x}$.

b) Déterminer l'équation de mouvement ainsi que les tensions dans le câble F.

c) Discuter le domaine de validité des résultats.

Formulaire Mécanique du Solide

Torseur en un point A :

$$\left[T\right]_{A,\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{ll} \vec{R} = \left|\begin{array}{l} X \\ Y \\ Z \end{array}\right._{\mathcal{B}} & \vec{M}_A = \left|\begin{array}{l} L \\ M \\ N \end{array}\right._{\mathcal{B}} \end{array}\right]_A \quad \text{avec } \vec{M}_{A[T]} = \vec{M}_{B[T]} + \vec{AB} \wedge \vec{R}_{[T]}$$

Torseur cinématique en un point A du mouvement d'un solide rigide :

$$\left[C_{S/\mathcal{R}}\right] = \left[\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \quad , \quad \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})}\right]_A \text{ avec } \quad \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})} = \vec{V}_{(B \in S/\mathcal{R})} + \vec{AB} \wedge \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$$

Relation de composition des vitesses :

$$\vec{V}(A \in S_2 / S_0) = \vec{V}(A \in S_2 / S_1) + \vec{V}(A \in S_1 / S_0)$$

Relation de dérivation dans une base mobile :

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{u}$$

Principe Fondamental de la Dynamique :

$$\left[\mathrm{F}_{Ext/S}\right]_A = \left[\mathcal{D}_{(S/\mathcal{R})}\right]_A \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_{[\mathrm{F}_{ext}/S]} = m\,\vec{\Gamma}_{(G \in S/\mathcal{R})} \\ \vec{M}_{A[\mathrm{F}_{ext}/S]} = \vec{\delta}_{A(S/\mathcal{R})} \end{cases}$$

avec :

$$\vec{\delta}_{A(S/\mathcal{R})} = \left(\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})}\right)_{\mathcal{R}} + m\,\vec{V}_{(A/\mathcal{R})} \wedge \vec{V}_{(G \in S/\mathcal{R})}$$

où :

$$\vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})} = \left[I_{A,\mathcal{B}}(S)\right]\,\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} + m\;\vec{AG} \wedge \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})} \qquad \text{avec } A \in S$$

et

$$\left[I_{A,\mathcal{B}}(S)\right] = \begin{bmatrix} \int_S (y^2+z^2)dm & -\int_S xydm & -\int_S xzdm \\ & \int_S (z^2+x^2)dm & -\int_S yzdm \\ & & \int_S (x^2+y^2)dm \end{bmatrix}$$

Théorème de Huygens

$$\left[I_{A,\mathcal{B}}(S)\right] = \left[I_{G,\mathcal{B}}(S)\right] + \left[I_{A,\mathcal{B}}(G,m(S))\right]$$

Puissance développée

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \left[\vec{R}_{[F_{ext/S}]} \qquad \vec{M}_{A[F_{ext/S}]}\right]_A \cdot \left[\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \qquad \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})}\right]_A$$

Energie cinétique

$$\mathcal{E}_{S/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} m \vec{V}^2_{(G \in S/\mathcal{R})} + \frac{1}{2}\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \cdot \left(\left[I_{G,.}(S)\right].\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}\right), \text{ si A est fixe, } \mathcal{E}_{S/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \cdot \left(\left[I_A(S)\right].\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}\right)$$

Théorème de l'Energie Cinétique

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_{\Sigma/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \mathcal{P}_{Ext\,\grave{a}\,\Sigma/_{\mathcal{R}}} + \mathcal{P}_{Int\,\grave{a}\,\Sigma/_{\mathcal{R}}}$$