

Introduction aux méthodes de volumes finis

UF « Modélisation et calcul scientifique »
Formation ModIA « Modélisation et Intelligence Artificielle »

Nicolas Bertier (nicolas.bertier@onera.fr)

INSA, 4A

Version du document : 1.0 (dernière modification le 24/01/2021)

Sauf exceptions dûment mentionnées, le contenu de ce cours est sous licence **Creative Commons Attribution - Partage dans les Mêmes Conditions** 4.0 International .

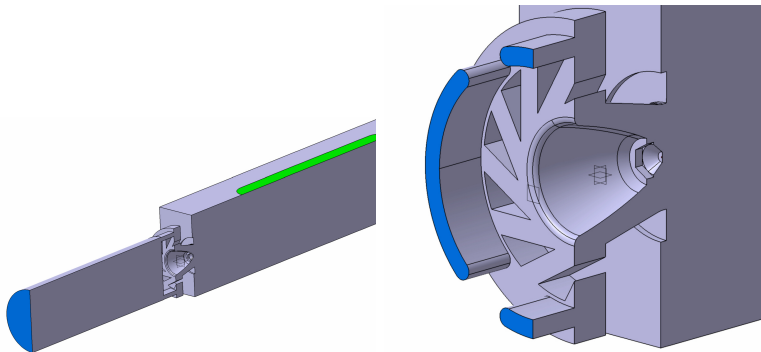
Pour accéder à une copie de cette licence, merci de vous rendre à l'adresse suivante : <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

Plan du cours

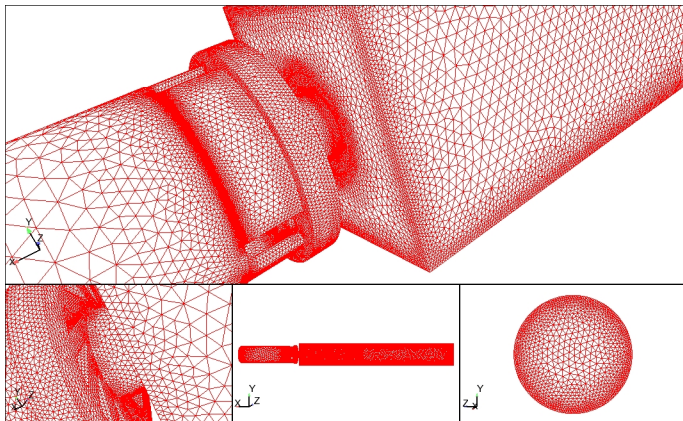
- Exemples de simulations numérique récentes en CFD
- Introduction aux méthodes de différences finies
- Le point sur l'intégration temporelle
- Analyse spectrale et équation équivalente
- Monotonie et limiteurs
- **Introduction aux méthodes de volumes finis**
- Vers la résolution des équations de Navier-Stokes

Chambre de combustion avec injecteur à swirl

Vue générale de la CAO et détail de l'injecteur :



Éléments de maillage



Formulation "volumes finis" pour l'équation d'advection

Rappel de la forme locale de l'équation d'advection sous forme conservative

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{a}u) = 0$$

On introduit alors la notation f pour le flux :

$$\mathbf{f} = \mathbf{a}u = aue_x = f\mathbf{e}_x$$

Soit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f} = 0$$

Ecriture sous forme intégrale (forme dite "faible")

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f} \right) dV = 0$$

Réécriture de la forme faible de l'équation d'advection

On rappelle la formule de Green, dans laquelle \mathbf{n} est le vecteur normal au bord du domaine Ω , noté $\partial\Omega$:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{f} dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS$$

Il est alors possible d'écrire le système comme :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

Equation bilan sur chaque cellule i

Les équations bilan peuvent s'écrire sur chaque cellule i :

$$V_i \frac{du_i}{dt} = - \sum_{j \in \mathcal{V}_i} \mathbf{f}_{i \rightarrow j} \cdot \mathbf{n}_{i \rightarrow j} S_{ij}$$

où \mathcal{V}_i désigne l'ensemble des faces du **volume de contrôle** i et S_{ij} la surface de la face séparant les cellules i et j .

Système global à résoudre

$$M \dot{U} = F(U)$$

avec la matrice M diagonale par blocs contenant les volumes des cellules, U l'ensemble des variables u_i , et F l'ensemble des flux.

Volumes Finis vs Différences Finies

Les approches **volumes finis** (VF) s'appliquent sur **formulation intégrale** (faible) des équations et possèdent de grands avantages par rapport aux méthodes de différences finies :

- elles sont **conservatives** par construction
- leur formulation les rends bien adapté à leur application sur des **maillages quelconques**

En pratique, la **majorité des codes de mécanique des fluide et d'énergétique** capables de traiter des applications industrielles repose aujourd'hui sur des **approches de type VF**.

⇒ la majorité des outils d'analyse et les grands principes étudiés en DF restent cependant valables ou peuvent être transposés simplement en VF !

Le maillage

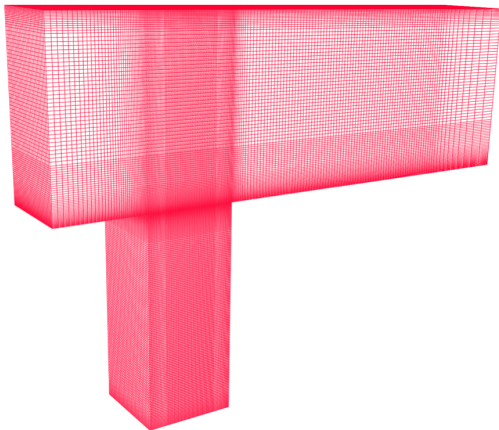
Il existe deux grandes catégories de maillages :

- Les maillages **structurés** : ils sont le résultat d'une transformation topologique continue d'un empilement de cubes en trois dimension ou de carrés en deux dimensions
- Les maillages **non-structurés** : ils ne possèdent aucune direction privilégiée dans l'espace.

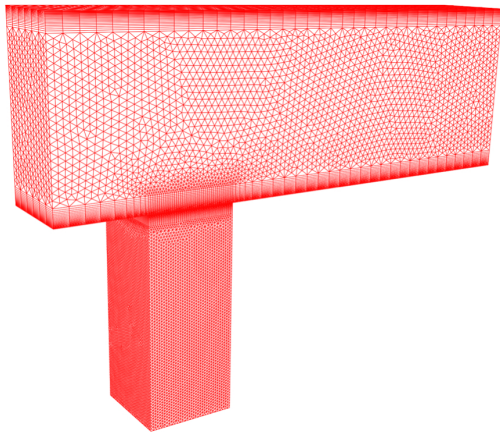
Remarques :

- Les maillages dits "non-structurés" sont souvent exclusivement constitué de tétraèdres, avec éventuellement des couches de prisme à la paroi.
- Il existe cependant des approches capables de traiter des maillages composés de polyèdres quelconques.

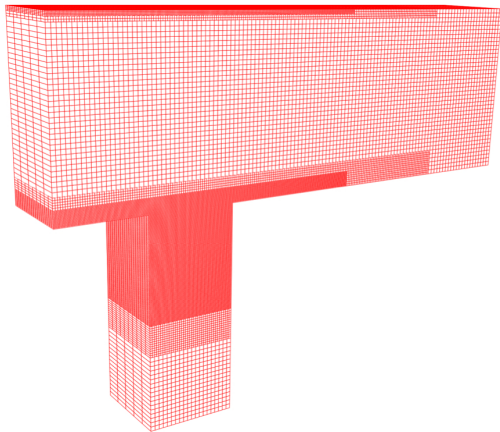
Exemple de maillage structuré



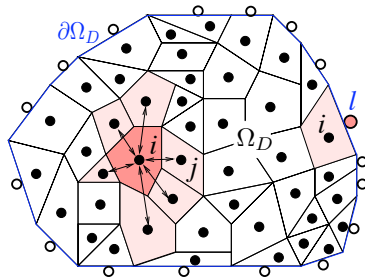
Exemple de maillage non-structuré hybride (tétraèdres+prismes)



Exemple de maillage non-structuré type hexaèdres redécoupés



Approche volumes finis en non-structuré

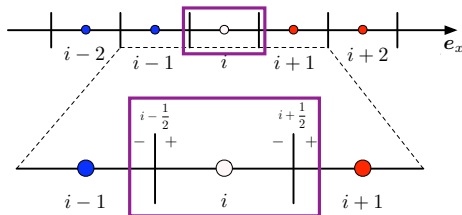


● Cellule interne i (bilan) et voisinage \mathcal{V}_i

● Cellule limite l (condition limite) et voisinage \mathcal{V}_l

Soit une cellule interne i , l'ensemble des cellules ayant une face en commun avec elle constitue son premier voisinage \mathcal{V}_i .

Définition du "volume de contrôle" VF 1D



Écriture de l'équation de bilan sur le volume de contrôle

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} dV = - \left(\int_{A_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{n}_{i+\frac{1}{2}} dS + \int_{A_{i-\frac{1}{2}}} \mathbf{f}_{i-\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{n}_{i-\frac{1}{2}} dS \right) = 0$$

Les normales aux faces étant telles que :

$$\mathbf{n}_{i-\frac{1}{2}} = -\mathbf{e}_x \quad (1)$$

$$\mathbf{n}_{i+\frac{1}{2}} = +\mathbf{e}_x \quad (2)$$

Le bilan s'écrit alors :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} dV = - \left(\int_{A_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}} dS - \int_{A_{i-\frac{1}{2}}} \mathbf{f}_{i-\frac{1}{2}} dS \right) \cdot \mathbf{e}_x = 0$$

de plus, on prend les "faces" de longueur unitaire :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} dV = \left(\mathbf{f}_{i-\frac{1}{2}} - \mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}} \right) \cdot \mathbf{e}_x = 0$$

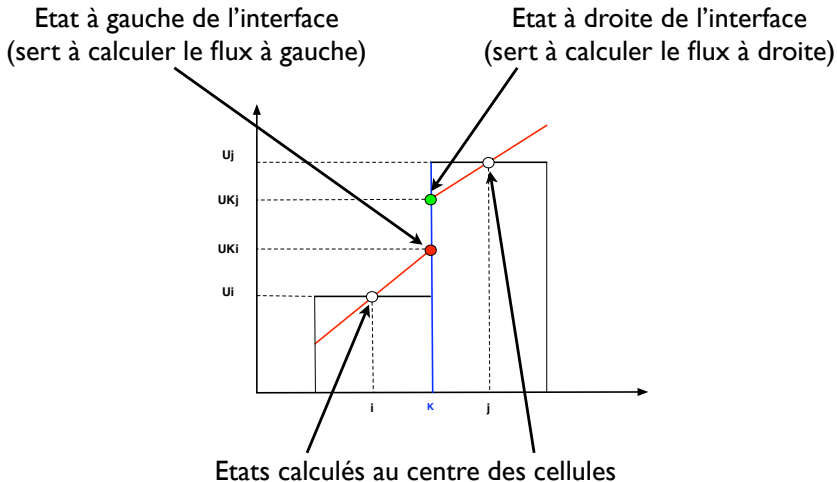
Notion de "flux numérique"

Une question fondamentale dans les méthodes de différences finies est l'évaluation des **flux numériques** sur les différentes faces du volume de contrôle. Il existe globalement deux type de flux :

- Les flux **centrés** (auxquels sont souvent ajoutés des termes stabilisateurs dissipatifs)
- Les flux **décentrés**

⇒ nous allons par la suite nous intéresser à l'**approche MUSCL** (Monotonic Upstream Schemes for Conservation Laws) qui permet d'obtenir des schémas décentrés d'ordre deux en espace très utilisés.

Schéma de principe en 1D de la méthode MUSCL

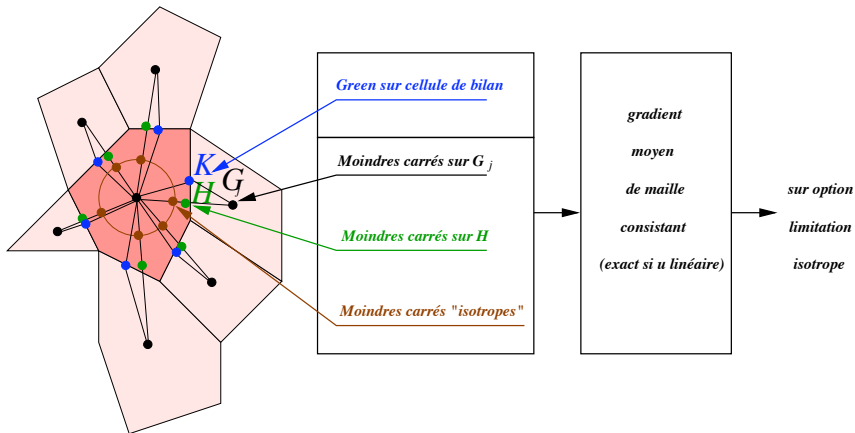


Remarques sur la méthode MUSCL

Un point important : le calcul du gradient

- L'interpolation est linéaire par cellule \Rightarrow il peut être nécessaire de calculer un gradient de maille.
- Sur des maillages **structurés** : très simple, il suffit d'utiliser la **formule de Taylor** ! gradient.
- Sur des maillages non-structurés : plus complexe, utilisation de **formules de type Green ou moindres carrés**.

Stencils pour évaluer le gradient moyen de maille



Méthode de Green

On rappelle la définition classique de la formule de Green, qui est le point de départ de la méthode :

$$\int_{\Omega} \nabla u d\Omega = \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{r}) \mathbf{n} dA$$

Ce qui peut s'écrire, une fois appliqué à une cellule i particulière :

$$V_i \overline{\nabla u} = \sum_{j \in \mathcal{V}_i} \int_{A_{ij}} u(\mathbf{r}) \mathbf{n} dA$$

Remarque : cette égalité n'est pas valable dans le cadre d'une représentation linéaire par cellules, puisque dans ce cas u n'est pas continue le long du contour $d\Omega$. C'est une des approximations de la méthode.

Ecriture de l'équation de convection en formulation volumes-finis

On reprend l'équation de convection en formulation VF 1D :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} dV = - \left(\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}} + \mathbf{f}_{i-\frac{1}{2}} \right) \cdot \mathbf{e}_x$$

Soit :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} dV = - \left[f_{i+\frac{1}{2}} \left(\mathbf{n}_{i+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{e}_x \right) + f_{i-\frac{1}{2}} \left(\mathbf{n}_{i-\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{e}_x \right) \right]$$

Et enfin :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} dV = f_{i-\frac{1}{2}} - f_{i+\frac{1}{2}}$$

- ↳ Application de l'approche VF-MUSCL à l'équation d'advection
- ↳ Ecriture des schémas semi-discrets d'ordre un et deux au point courant

Décentrement des flux

Choix du flux numérique

On choisit le flux numérique suivant :

$$f_{i-\frac{1}{2}} = \frac{f_{i-\frac{1}{2}}^- + f_{i-\frac{1}{2}}^+}{2} + \operatorname{sgn}(a) \frac{f_{i-\frac{1}{2}}^- - f_{i-\frac{1}{2}}^+}{2}$$

$$f_{i+\frac{1}{2}} = \frac{f_{i+\frac{1}{2}}^- + f_{i+\frac{1}{2}}^+}{2} + \operatorname{sgn}(a) \frac{f_{i+\frac{1}{2}}^- - f_{i+\frac{1}{2}}^+}{2}$$

avec :

$$f_{i+\frac{1}{2}}^+ = au_{i+\frac{1}{2}}^+$$

Exemple : si $a > 0$, $f_{i-\frac{1}{2}} = f_{i-\frac{1}{2}}^-$ et $f_{i+\frac{1}{2}} = f_{i+\frac{1}{2}}^-$.

- └ Application de l'approche VF-MUSCL à l'équation d'advection
- └ Ecriture des schémas semi-discrets d'ordre un et deux au point courant

Rappel des notations

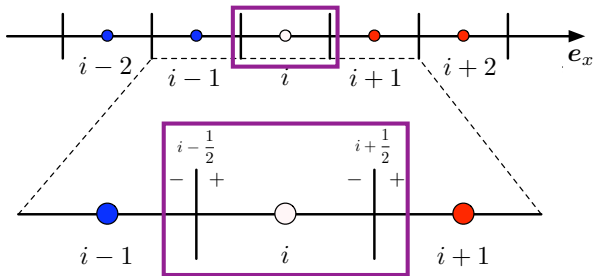


Schéma décentré d'ordre un au point courant

Pour un **schéma d'ordre un**, la valeur à l'interface est directement celle calculée au centre de la cellule :

$$u_{i-\frac{1}{2}}^- = u_{i-1}$$

$$u_{i-\frac{1}{2}}^+ = u_i$$

$$u_{i+\frac{1}{2}}^- = u_i$$

$$u_{i+\frac{1}{2}}^+ = u_{i+1}$$

On peut donc écrire le schéma au point courant suivant :

$$\Delta x \frac{du_i}{dt} = -\frac{a}{2} \{ u_{i+1} [1 - \operatorname{sgn}(a)] + 2u_i \operatorname{sgn}(a) - u_{i-1} [\operatorname{sgn}(a) + 1] \}$$

- └ Application de l'approche VF-MUSCL à l'équation d'advection
- └ Ecriture des schémas semi-discrets d'ordre un et deux au point courant

Selon le signe de 'a', on peut donc avoir :

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{a}{\Delta x} (u_i - u_{i-1}) \quad \forall a > 0$$
$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{a}{\Delta x} (u_{i+1} - u_i) \quad \forall a < 0$$

⇒ en 1D avec un maillage régulier, on retrouve donc exactement le schéma Différences Finies "FOU" !

Schéma décentré d'ordre deux au point courant

Pour un **schéma d'ordre deux**, la valeur à l'interface est interpolée linéairement à partir de celle prise au centre de la cellule.

A titre d'exemple, on peut écrire :

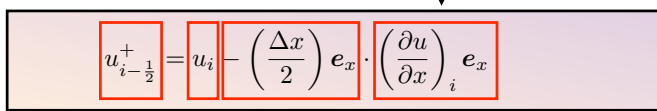
$$u_{i-\frac{1}{2}}^+ = u_i + \mathbf{d} \cdot (\nabla u)_i$$

avec :

- Dans ce cas, le vecteur reliant le centre de la cellule à sa face de gauche s'écrit : $\mathbf{d} = \frac{\Delta x}{2} (-\mathbf{e}_x)$
- Le gradient est monodimensionnel : $(\nabla u)_i = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i \mathbf{e}_x$

Par conséquent, la valeur à l'interface gauche de la cellule i s'écrit :

$$u_{i-\frac{1}{2}}^+ = u_i - \left(\frac{\Delta x}{2}\right) e_x \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i e_x$$

Gradient de maille
 ↓

 ↑
 Vecteur distance
 entre le point au centre de la maille et la face

29

Note : dans la suite, on se placera dans le cadre d'une **discrétisation centrée d'ordre deux** pour l'évaluation du gradient.

On trouve donc pour cette interface :

$$u_{i-\frac{1}{2}}^+ = u_i - \left(\frac{\Delta x}{2} \right) \mathbf{e}_x \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i \mathbf{e}_x = u_i + \frac{u_{i-1} - u_{i+1}}{4}$$

et de la même manière pour les autres interfaces :

$$u_{i-\frac{1}{2}}^- = u_{i-1} + \frac{u_i - u_{i-2}}{4}$$

$$u_{i-\frac{1}{2}}^+ = u_i - \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{4}$$

$$u_{i+\frac{1}{2}}^- = u_i + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{4}$$

$$u_{i+\frac{1}{2}}^+ = u_{i+1} - \frac{u_{i+2} - u_i}{4}$$

Le calcul et décentrement des flux s'effectue exactement de la même manière que pour le schéma d'ordre un.

On trouve pour l'expression des flux à droite et à gauche pour chaque interface :

$$f_{i-\frac{1}{2}^-} = au_{i-\frac{1}{2}}^- = a \left(u_{i-1} + \frac{u_i - u_{i-2}}{4} \right)$$

$$f_{i-\frac{1}{2}^+} = au_{i-\frac{1}{2}}^+ = a \left(u_i + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{4} \right)$$

$$f_{i+\frac{1}{2}^-} = au_{i+\frac{1}{2}}^- = a \left(u_i + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{4} \right)$$

$$f_{i+\frac{1}{2}^+} = au_{i+\frac{1}{2}}^+ = a \left(u_{i+1} + \frac{u_{i+2} - u_i}{4} \right)$$

Après quelques calculs, on peut écrire le schéma d'ordre deux au point courant :

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{a}{4\Delta x} (u_{i+1} + 3u_i - 5u_{i-1} + u_{i-2}) \quad \forall a > 0$$

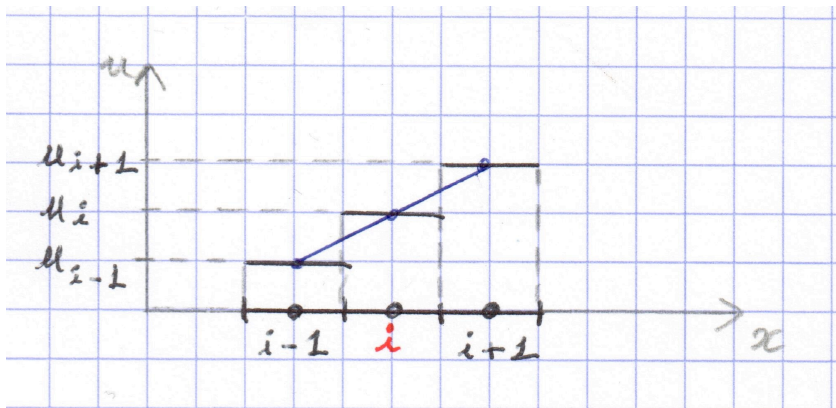
$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{a}{4\Delta x} (u_{i+2} + 3u_{i+1} - 5u_i + u_{i-1}) \quad \forall a < 0$$

Cette fois, on retombe exactement sur le **schémas UPO2VF** !

- La formulation 3D de ce schéma permet d'être utilisée sur des maillages polyédriques
- L'écriture 1D sur maillage uniforme permet de se rapporter à une expression de type différences finies et d'utiliser les outils d'analyse présentés précédemment dans le cours (analyse spectrale, équation équivalente...).

Réinterprétation des limiteurs dans un cadre VF

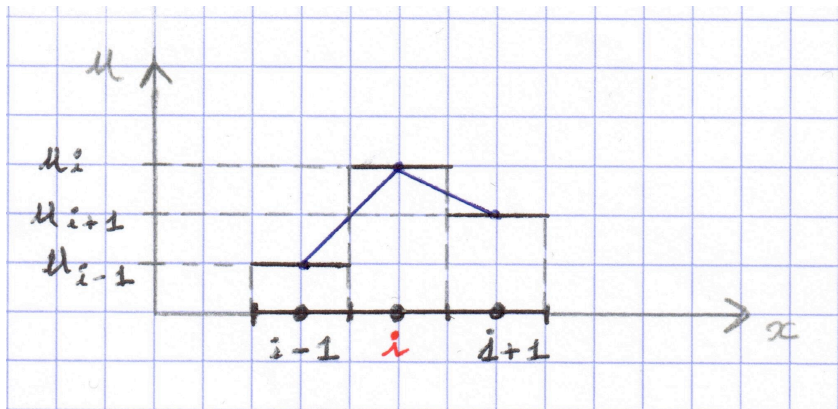
Cas $r_i = 1$, $\Psi = 1$



⇒ solution non limitée.

Réinterprétation des limiteurs dans un cadre VF

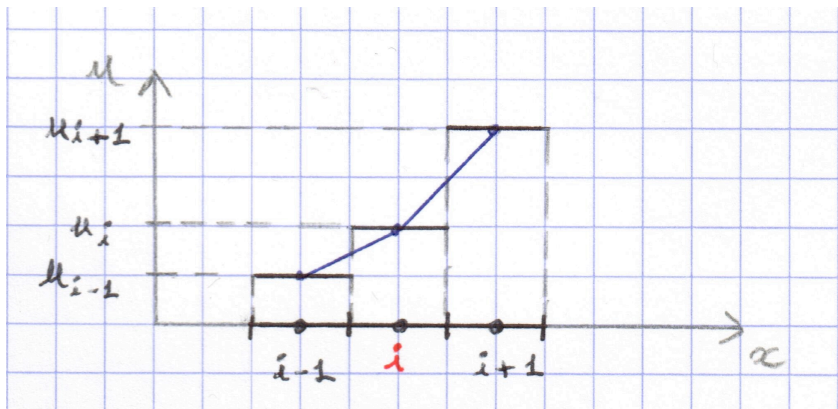
Cas $r_i \leq 0$, $\Psi = 0$



\Rightarrow termes d'ordre supérieur à un annulés, solution d'ordre un.

Réinterprétation des limiteurs dans un cadre VF

Cas $r_i \geq 1$



⇒ Solution limitée

Réinterprétation des limiteurs dans un cadre VF

Soit le rapport de pentes au point i :

$$r_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{u_i - u_{i-1}}$$

Comportements extrêmes du limiteur en fonction de r_i

- Si les gradients sont égaux en $i + 1$ et i , soit $r_i = 1$, alors aucun comportement non-monotone n'est à craindre et l'application de limiteurs sur le gradient est inutile :

$$\Psi(1) = 1$$

- Si le point i est un extremum, alors $r_i < 0$ et il est nécessaire de se ramener à l'ordre un pour rester monotone, ce qui revient à annuler le gradient :

$$\Psi(r_i) = 0 \text{ si } r_i < 0$$

Réinterprétation des limiteurs dans un cadre VF

Autres conditions à vérifier pour les limiteurs

Afin de mettre en évidence simplement ces nouvelles propriétés, on se fixe un problème et une discrétisation du gradient :

- on considère une solution telle que $u_{i-1} \leq u_i \leq u_{i+1}$
- le gradient est évalué de manière décentrée amont \Rightarrow plus simple et ne change pas la généralité des résultats.

Ecriture des états interpolés aux faces

$$u_{i+\frac{1}{2}}^- = u_i + \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \frac{\Delta x}{2} \Psi = u_i + \frac{u_i - u_{i-1}}{2} \Psi$$

$$u_{i-\frac{1}{2}}^+ = u_i - \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \frac{\Delta x}{2} \Psi = u_i - \frac{u_i - u_{i-1}}{2} \Psi$$

Réinterprétation des limiteurs dans un cadre VF

Condition sur la valeur maximale de l'état interpolé

Comme le gradient évalué en i est positif, le limiteur Ψ doit assurer que $u_{i+\frac{1}{2}}^- \leq u_{i+1}$, ce qui implique successivement :

$$\begin{aligned}
 u_i + \frac{u_i - u_{i-1}}{2} \Psi &\leq u_{i+1} \\
 (u_i - u_{i-1}) \Psi &\leq 2(u_{i+1} - u_i) \\
 \Psi &\leq 2 \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{u_i - u_{i-1}} \right)
 \end{aligned} \tag{3}$$

Ce qui mène finalement à la condition :

$$\Psi \leq 2r_i$$

Réinterprétation des limiteurs dans un cadre VF

Condition sur la valeur minimale de l'état interpolé

Comme le gradient évalué en i est positif, le limiteur Ψ doit assurer que $u_{i+\frac{1}{2}}^- \geq u_{i-1}$, ce qui implique successivement :

$$u_i - \frac{u_i - u_{i-1}}{2} \geq u_{i-1}$$

$$(u_{i-1} - u_i)\Psi \geq 2(u_{i-1} - u_i)$$

Ce qui mène finalement, en notant bien que $(u_{i-1} - u_i) \leq 0$, à la condition :

$$\Psi \leq 2$$

Limiteurs

