

# Contrôle A.S.N.L

4AE-SE - Contrôle du mardi 10 janvier 2017

Documents autorisés, durée 45 mn

Calculatrices et téléphones portables interdits

## Exercice : plan de phase

**Partie I** On considère le système différentiel du premier ordre :

$$\begin{cases} \dot{x} = y(x-1) \\ \dot{y} = x - y^2 + ay \end{cases} \quad (1)$$

où  $a$  est un paramètre réel compris entre -2 et 2.

- 1) Déterminer les points d'équilibre. Donner la nature du point d'équilibre origine.
- 2) On fixe  $a = 0$ .
  - a) Déterminer la nature des autres points d'équilibre différents de l'origine.
  - b) Dans le cas d'un point de type col, déterminer les vecteurs propres.
  - c) Représenter le champ de vecteurs dans le plan de phase.
- 3) Faire un diagramme de bifurcation pour expliquer la bifurcation en  $a = 0$ .

**Partie II** On considère le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = 3y^2 - x \\ \dot{y} = y - 3x^2 \end{cases} \quad (2)$$

- 1) Déterminer les points d'équilibre et leur nature.
- 2) Vérifier que le système est hamiltonien. Déterminer une intégrale première du système. Que peut-on en conclure pour la nature du point d'équilibre autre que l'origine ?