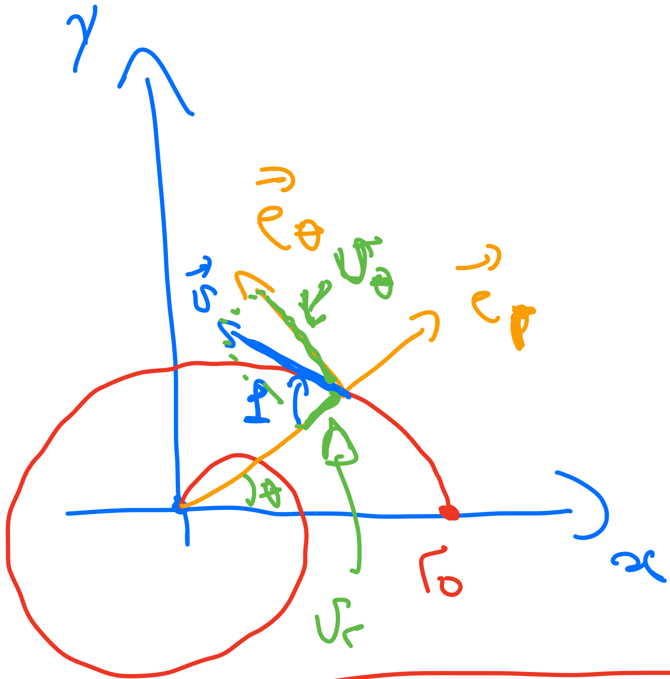
Exo 1

1)



2) $\vec{r} = r(t)\,\vec{e}_r$

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \begin{vmatrix} v_r = -\alpha\omega r(t) \\ v_\theta = \omega r(t) \end{vmatrix}}$$

car $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\dfrac{d\vec{e}_r}{dt}$ avec $\dfrac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$

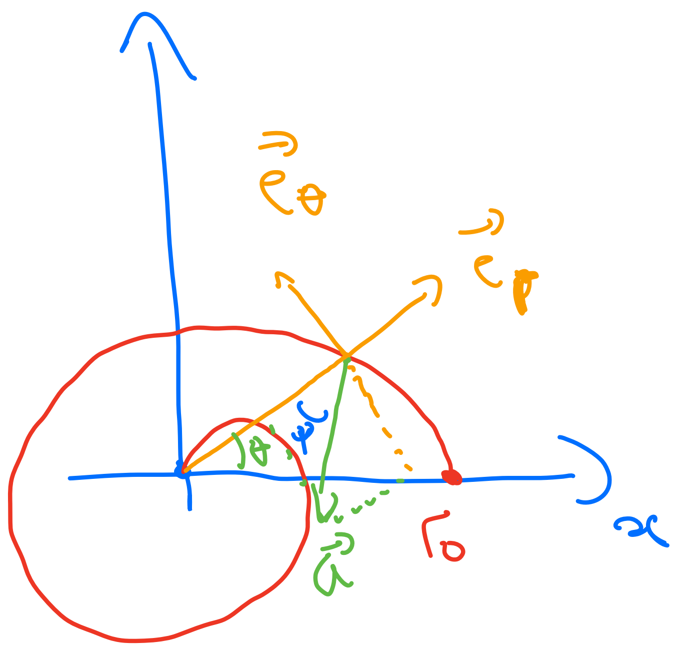
3) cf. schéma ci-dessus.

4) $\dfrac{v_\theta}{v_r} = \dfrac{\omega}{-\alpha\omega} = -\dfrac{1}{\alpha}$ $\quad \tan\varphi = \dfrac{v_\theta}{v_r}$

$$\boxed{\varphi = \mathrm{Arctan}\left(-\frac{1}{\alpha}\right) = -\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$$

5) $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = \begin{vmatrix} a_r = (\alpha^2 - 1)\,\omega^2 r(t) \\ a_\theta = -2\alpha\,\omega^2 r(t) \end{vmatrix}$

6)



7) $\tan\psi = \dfrac{a_\theta}{a_r} \Rightarrow \boxed{\psi = \operatorname{Arctan} \dfrac{2\alpha}{(1-\alpha^2)}}$

$= \dfrac{-2\alpha w^2}{(\alpha^2-1)w^2}$

Exercice II

1) $$\boxed{\begin{cases} R\dot{\theta} = V_0 \cos\alpha \\ R\sin\theta\,\dot{\varphi} = -V_0 \sin\alpha \end{cases}}$$

2) $\theta = \theta_0 + \left(\dfrac{V_0\cos\alpha}{R}\right)t$; $\varphi = \varphi_0 - \tan\alpha \ln\left(\dfrac{\tan\theta/2}{\tan\theta_0/2}\right)$

3) $\alpha = \text{Arctan}\left(\dfrac{l - l_0}{\ln \dfrac{\tan(\theta/2)}{\tan(\theta_0/2)}}\right)$ A.N : $\alpha = 24{,}4°$

$$\boxed{t = \frac{R(\theta - \theta_0)}{V_0 \cos\alpha} = 85\ h}$$

Exercice III

1) . la première voiture a pour mvt :

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{a_1}{2} t^2 + v_0 t \\ v_1(t) &= -a_1 t + v_0 \end{aligned}}$$

. Elle s'arrête $(v_1 = 0)$ pour le temps $\boxed{t' = \dfrac{v_0}{a_1}}$

$$x_1(t') = -\frac{a_1}{2} t'^2 + v_0 t'$$

$$= -\frac{a_1}{2}\left(\frac{v_0}{a_1}\right)^2 + v_0 \times \frac{v_0}{a_1}$$

$$= -\frac{v_0^2}{2a_1} + \frac{v_0^2}{a_1} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a_1}$$

$$\boxed{x_1(t') = 75\ m}$$

$$\boxed{\cdot\ x_2(t) = -\frac{1}{2}a_2 t^2 + v_0 t + v_0\tau}$$

$$v_2(t) = -a_2 t + v_0 \qquad \underset{\text{arrêt :}}{v_2 = 0} \Rightarrow t'' = \frac{v_0}{a_2}$$

$$x_2(t'') = -\frac{1}{2}a_2\left(\frac{v_0}{a_2}\right)^2 + v_0\frac{v_0}{a_2} + v_0\tau$$

$$= \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a_2} + v_0\tau$$

$$\boxed{x_2(t'') = 120\ m}$$

Pour éviter la collision $D > 45\ m$

2) on prend pour origine des positions : la position de la seconde voiture au début de son accélération.

$$x_1(t) = d + vt$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2}at^2 + vt$$

la 2nde voiture se rabat quand $x_2 - x_1 = d$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}at^2 = 2d \qquad t = 2\sqrt{d/a}$$

A.N: $t = 10\,s$

Au bout de ce temps elle a parcouru : $\frac{1}{2}at^2 + vt$
soit 250 m

3) Posons $D = PN_0$
t_2 est l'instant de la rencontre.

$$t_2 = \frac{D\tan\alpha}{v}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{D/\cos\alpha}{w} \qquad t_1 = \frac{D\tan\alpha}{v} - \frac{D}{w\cos\alpha}$$

$$\frac{dt_1}{d\alpha} = \frac{D}{v\cos^2\alpha} - \frac{D\sin\alpha}{w\cos^2\alpha} > 0 \text{ si } \sin\alpha < \frac{w}{v}$$

qui montre donc que $t_1(\alpha)$ est maximum (= départ tardif)

$$\boxed{\text{pour } \alpha = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{w}{v}\right)}$$

4) A. Chute de la bille : $z(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2$
~~t~~ elle heurte le sol pour $z = 0$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

* à la vitesse $v_i = -gt = -\sqrt{2h_0 g}$

* elle repart avec la vitesse $v_f = e\sqrt{2h_0 g}$

$\Rightarrow$ elle remonte selon

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_f t$$

* au plus haut $v = -gt' + v_f = 0$

$$t' = \frac{v_f}{g} = e\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

* cela correspond à une hauteur :

$$h_1 = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_f}{g}\right)^2 + v_f\left(\frac{v_f}{g}\right) = \frac{v_f^2}{2g} = e^2 h_0$$

$$\boxed{h_1 = e^2 h_0}$$

* $\tau_0 = t + t' = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} + e\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$

$$\boxed{\tau_0 = (1+e)\sqrt{\frac{2h_0}{g}}}$$

B) $h_2 = e^2 h_1$

$h_3 = e^2 h_2$ ...

$$\boxed{h_n = e^2 h_{n-1}}$$

$$\boxed{\tau_n = (1+e)\sqrt{\frac{2h_n}{g}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} h_n &= (e^2)^n\, h_0 \\ \tau_n &= e^n\, \tau_0 \end{aligned}}$$

c) $t_n = \tau_0 + \tau_1 + \dots + \tau_{n-1}$

$= \tau_0 \left(1 + e + \dots + e^{n-1}\right)$

suite géométrique de raison e, premier terme 1.

$$\boxed{t_n = \frac{1-e^n}{1-e}\tau_0 = \frac{1-e^n}{1-e}(1+e)\sqrt{\frac{2h_0}{g}}}$$

comme un rebond dissipe de l'énergie $e<1$

$$\boxed{t_\infty = \lim_{n\to\infty} t_n = \frac{1+e}{1-e}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}}$$

D) Pour une bille d'acier : $t_\infty = 8{,}58$ s

Pour un ballon : $t_\infty = 3{,}81$ s

Exercice IV

1) $\begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = 4t(t-1) \end{cases}$ Équations horaires

Pour avoir la trajectoire on doit éliminer la variable t pour avoir $y(x)$ par exemple.

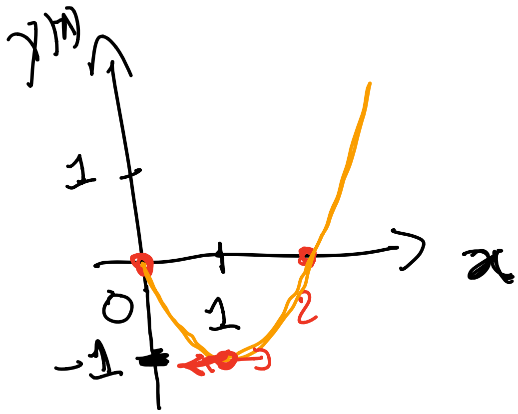
$$t = \frac{x}{2} \Rightarrow y(x) = 4\times\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}-1\right)$$

$$y(x) = x \times 2\left(\frac{x}{2}-1\right)$$

$$\boxed{y(x) = x(x-2)}$$

* $y = 0$ pour $x = 0$
  $x = 2$

$$y'(x) = (x-2) + x$$
$$= 2x - 2$$
$$= 2(x-1)$$



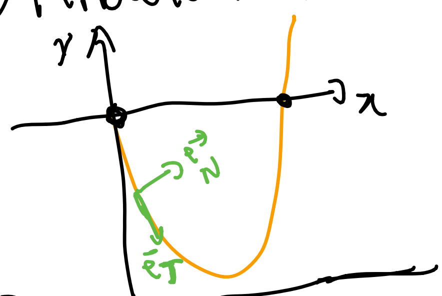
x	0		1		$+\infty$
$y'(x)$		$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

2) $v(t) \begin{vmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 4(t-1) + 4t \end{vmatrix}$

$$\boxed{v(t) = \begin{vmatrix} 2 \\ 8t-4 \end{vmatrix}}$$

3) $a(t) \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 8 \end{vmatrix}$ $\quad a(t)$ est constant.

Utilisation de la base de Frenet



composante tangentielle : $\dfrac{d\|\vec{v}\|}{dt}$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + (8t-4)^2}$$

$$\frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = \frac{\cancel{2} \times 8 \times (8t-4)}{\cancel{2}\sqrt{2^2+(8t-4)^2}} = \frac{8(8t-4)}{\sqrt{2^2+(8t-4)^2}}$$

$$\boxed{a_T = \frac{8(8t-4)}{\sqrt{2^2+(8t-4)^2}}}$$

$$a_N^2 = \|\vec{a}\|^2 - a_T^2$$

$$\|\vec{a}\|^2 = 8^2$$

$$a_N^2 = 8^2 \left[1 - \frac{(8t-4)^2}{2^2+(8t-4)^2} \right]$$

$$a_N^2 = 8^2 \left[\frac{2^2 + \cancel{(8t-4)^2} - \cancel{(8t-4)^2}}{2^2+(8t-4)^2} \right]$$

$$a_N^2 = 8^2 \, \frac{2^2}{2^2+(8t-4)^2}$$

$$\boxed{a_N = 8 \times \frac{2}{\sqrt{2^2+(8t-4)^2}}}$$

Exercice V

1) $\begin{cases} x(t) = t^2 - 4t + 1 \\ y(t) = -2t^4 \\ z(t) = 3t^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x'(t) = t^2 + t + 2 \\ y'(t) = -2t^4 + 5 \\ z'(t) = 3t^2 - 7 \end{cases}$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_{M/R} \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2t - \cancel{4} \\ -8t^3 \\ 6t \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}'(t) = \vec{v}_{M/R'} \begin{vmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ \dot{z}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2t+1 \\ -8t^3 \\ 6t \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' - 5\vec{i}}$$

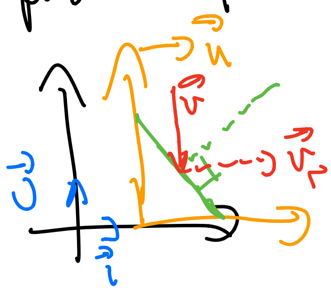
2) $\vec{a}(t) \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ -24t^2 \\ 6 \end{vmatrix}$ $\vec{a}'(t) \begin{vmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \\ \ddot{z}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ -24t^2 \\ 6 \end{vmatrix}$

$\boxed{\text{m̂ accélération}}$

3) ⟹ mouvement de translation uniforme de (R') par rapport à (R).

Exercice VI

$$\vec{V}_{après} = (v+u)\,\vec{i}$$



car $\|\vec{v}_r\| = v$