NOM-Prénom : . . . . Groupe : . . . . . .

1A CC1 Mécanique du point (45 min)

Lundi 11 octobre 2021

- Aucun document n'est admis. Aucun appareil électronique n'est autorisé.
- Préparez votre carte d'étudiant.
- Pensez à simplifier au maximum vos résultats.
- Vous serez évalués sur les acquis de l'apprentissage suivants :

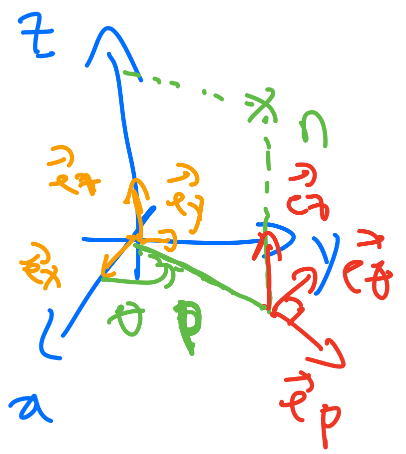
  MP1 : Connaître les concepts généraux de la mécanique du point

  MP2 : Résoudre un problème, calculer et analyser le résultat en mécanique du point.

Mouvement dans un repère cylindrique

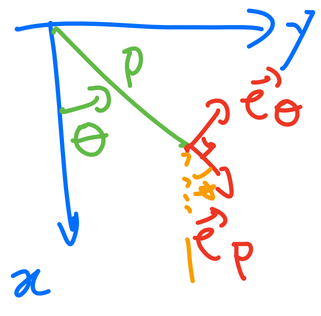
On considère un référentiel de centre O, muni d'un repère cartésien tridimensionnel, que l'on notera $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$. Dans la suite le repère cylindrique noté $(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ sera aussi utilisé. On rappelle que l'angle orienté formé par les vecteurs $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_\rho$ est noté $\theta(t)$.

1. Schématiser soigneusement le système de coordonnées cylindriques, en représentant les vecteurs de la base cylindrique. (**MP1** : 2 pts)



2. Exprimer les vecteurs de la base cylindrique en fonction des vecteurs de la base cartésienne. (**MP1** : 3 pts)

$$\vec{e}_\rho \left| \begin{matrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{matrix} \right. \qquad \vec{e}_\theta \left| \begin{matrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{matrix} \right. \qquad \vec{e}_z \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right.$$



3. Calculer les dérivées temporelles de ces vecteurs, exprimées dans la base cartésienne. (**MP1** : 3 pts)

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \left| \begin{matrix} -\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{matrix} \right. \qquad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \left| \begin{matrix} -\dot{\theta}\cos\theta \\ -\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 \end{matrix} \right. \qquad \frac{d\vec{e}_z}{dt} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

4. Exprimer ces mêmes dérivées dans la base cylindrique. Commenter ce résultat.
(**MP1** : 2 pts)

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{e}_\rho$$

- voir parler du vecteur rotation
- voir géométriquement : la dérivée d'un vecteur unitaire est ⊥ à celui-ci.

5. Montrer que de la vitesse du point M en coordonnées cylindriques s'écrit : $\vec{v}_M = \begin{vmatrix} \dot{\rho} \\ \rho\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{vmatrix}$.

(**MP2** : 3 pts)

$$\vec{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{e}_z \Rightarrow \frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{v}_M = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \dot{z}\,\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_M \begin{vmatrix} \dot{\rho} \\ \rho\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{vmatrix}$$

6. En déduire l'expression de l'accélération du point M en coordonnées cylindriques.
(**MP2** : 3 pts)

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{e}_z\right] \quad \vec{a}_M \begin{vmatrix} \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{vmatrix}$$

7. Dans la suite on s'intéresse au point M décrivant la trajectoire définie par les équations horaires suivantes :

$$\begin{cases} \rho(t) &= v_0 t \\ \theta(t) &= \omega_0 t \\ z(t) &= a_0 t^2 + z_0 \end{cases},$$

avec v_0, ω_0, a_0 et z_0 des constantes ≥ 0. Exprimer le vecteur vitesse en fonction du temps et des constantes du problème dans la base cylindrique. (**MP2** : 1 pt)

$$\vec{v}_M \begin{vmatrix} v_0 \\ v_0 t\,\omega_0 \\ 2a_0 t \end{vmatrix}$$

8. Exprimer le vecteur accélération en fonction du temps et des constantes du problème dans la base cylindrique. (**MP2** : 1 pt)

$\vec{a}_n \left| \begin{array}{l} -v_0 t w_0^2 \\ 2 v_0 w_0 \\ 2a_0 \end{array} \right.$

9. Le mouvement du point M est-il uniforme ? Justifier votre réponse. (**MP2** : 1 pt)

non la norme de la vitesse n'est pas constante, elle dépend de t

10. Représenter l'allure de la trajectoire (de façon qualitative) si ~~a_0 et~~ z_0 ~~sont nulles~~ est nul. (**MP2** : 1 pt)