NOM-Prénom : Groupe : . . . . . .

1A CC2 Mécanique du point (1h)

Lundi 29 novembre 2021

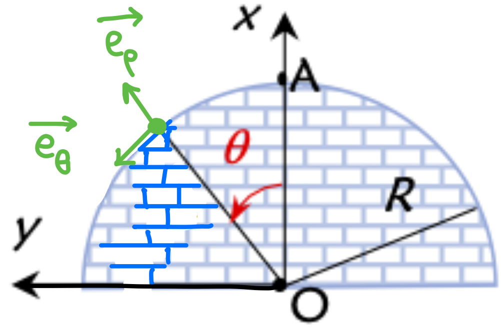
- Répondre sur le sujet, penser à simplifier au maximum vos résultats et à utiliser les résultats des questions précédentes même si n'avez pas réussi leur démonstration.
- Aucun document n'est admis, une calculatrice est autorisée.
- Vous serez évalués sur les acquis de l'apprentissage suivants :

  MP1 : Connaître les concepts généraux de la mécanique du point

  MP2 : Résoudre un problème, calculer et analyser le résultat en mécanique du point.

Mouvement d'un glaçon à la surface d'un igloo

On considère, dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen, le mouvement d'un glaçon de masse m, modélisé par un point matériel noté M. Il glisse sans frottement, à partir du point A sans vitesse initiale, sur le toit de l'igloo considéré comme une demi-sphère de rayon R. Sa position est repérée par l'angle θ comme schématisé. On admet que le mobile demeure dans le plan de la figure pendant toute la durée de son parcours.



1. Indiquer sur le schéma les vecteurs de la base cylindrique. (**MP1** : 2 pts)
2. Exprimer dans cette base les vecteurs position, vitesse et accélération du point M en tenant compte de sa trajectoire. (**MP1** : 3 pts)

Texte

Cinématique : $\rho(t) = R = cte$

$\vec{OM} = R\,\vec{e_\rho}$ 0,5

$\dot{\vec{e_\rho}} = \dot\theta\,\vec{e_\theta}$

$\vec{v} = R\dot\theta\,\vec{e_\theta}$ 1

$\dot{\vec{e_\theta}} = -\dot\theta\,\vec{e_\rho}$

$\vec{a} = -R\dot\theta^2\vec{e_\rho} + R\ddot\theta\,\vec{e_\theta}$ 1,5

3. Établir à l'aide du théorème du moment cinétique que l'équation différentielle régissant le mouvement de M est : $R\ddot\theta = g\sin(\theta)$. (**MP1** : 5 pts)

$\vec{\mathcal{L}} = \vec{OM} \wedge (m\vec{v}) = (R\vec{e_\rho}) \wedge (mR\dot\theta\,\vec{e_\theta}) = mR^2\dot\theta\,\vec{e_z}$ 0,5

Bilan des forces : $\vec{N} = N\vec{e_\rho}$ 0,5 et $\vec{OM} \wedge \vec{N} = \vec{0}$ 1 car $\vec{e_\rho} \wedge \vec{e_\rho} = \vec{0}$

0,5 $\vec{P} = -mg\,\vec{e_x} = -mg\cos\theta\,\vec{e_\rho} + mg\sin\theta\,\vec{e_\theta}$

$\vec{OM} \wedge \vec{P} = R\vec{e_\rho} \wedge (mg\sin\theta\,\vec{e_\theta}) = mRg\sin\theta\,\vec{e_z}$ 1

Théorème du moment cinétique : $\dfrac{d\vec{\mathcal{L}}}{dt} = \sum \vec{OM} \wedge \vec{F}$

0,5 $mR^2\ddot\theta\,\vec{e_z} = mRg\sin\theta\,\vec{e_z}$

$\boxed{R\ddot\theta = g\sin\theta}$ 1

4. Vérifier que $\dot{\theta} = \sqrt{\alpha - \frac{2g\cos(\theta)}{R}}$, avec α une constante, est solution de l'équation différentielle précédente. (**MP2** : 3 pts)

On rappelle que $\sqrt{u} = (u)^{1/2}$ et que $(u^m)' = m\, u'\, u^{m-1}$ donc $(u^{1/2})' = \frac{1}{2} u' u^{-1/2}$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{2g}{R} \cdot (-\sin\theta)\dot{\theta}}{\underbrace{\sqrt{\alpha - \frac{2g\cos\theta}{R}}}_{= \dot{\theta}}} = \frac{g}{R}\sin\theta$$

Attention $\frac{d(\cos\theta(t))}{dt} = -\dot{\theta}\sin\theta$

5. Déterminer la constante α à l'aide des conditions initiales. (**MP2** : 2 pts)

Pas de vitesse initiale : $v(t=0) = 0 = R\dot{\theta}(t=0)$ donc $\dot{\theta}(t=0) = 0$ 0,5

De plus $\theta(t=0) = 0$ car le point M part du point A 0,5

$$\dot{\theta}(t=0) = \sqrt{\alpha - \frac{2g\cos(\theta(t=0))}{R}} = 0 \quad \text{donc} \quad \alpha - \frac{2gR}{R} = 0 \qquad \boxed{\alpha = \frac{2g}{R}}$$

$\cos(0) = 1$ 1

6. Établir à l'aide du principe fondamental de la dynamique l'expression de la réaction normale du support, en fonction de θ, de ses dérivées et de m, g et R. (**MP1** : 3 pts)

PFD : $\vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$

$$\begin{cases} -mg\cos\theta + N = -mR\dot{\theta}^2 \\ mg\sin\theta = mR\ddot{\theta} \end{cases}$$ 1

$N = -mR\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$ 2

$N = -mR\left(\frac{2g}{R} - \frac{2g\cos\theta}{R}\right) + mg\cos\theta$ dans Q7

$$\boxed{N = -2mg + 3mg\cos\theta}$$

7. A quelle condition sur la réaction peut-on dire que le glaçon quitte la surface ? En déduire la valeur de l'angle correspondante. (**MP2** : 3 pts)

Le glaçon quitte la surface lorsque la réaction est nulle. 1

$N = 0 = -2mg + 3mg\cos\theta$

$\cos\theta = \frac{2}{3}$ 1

$\theta \approx 48°$ 1

Expérience de lancer vertical

On étudie dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen, les mouvements dans l'air d'un petit objet de masse m, modélisé par un point matériel. Initialement, il se trouve en un point choisi comme origine et noté O. Dans tout le problème, on supposera que le mobile demeure sur une droite verticale matérialisée par un axe (Oz) dirigé vers le bas. On note $\vec{e}_z$ le vecteur unitaire porté par cet axe. La position du mobile est déterminée par $z(t)$. L'air (immobile dans $\mathcal{R}$) exerce sur le système une force de frottement fluide supposée linéaire et opposée à son vecteur vitesse $\vec{v}$, telle que $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$. Le coefficient de frottement α étant supposé constant quel que soit le mouvement. Au temps pris comme origine $t = 0$, on communique au mobile une vitesse initiale $v_o\vec{e}_z$ verticale. Le signe de v_o et donc le sens de cette vitesse seront précisés ultérieurement.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$. En déduire celle, vérifiée par $v(t)$. Quel est son ordre ? Cette équation dépend-elle de la valeur de la vitesse initiale ? (**MP1** : 4 pts)

<u>Cinématique</u> : $\overrightarrow{OM} = z\,\vec{e_z}$ $\quad \vec{v} = \dot{z}\,\vec{e_z}$ $\quad \vec{a} = \ddot{z}\,\vec{e_z}$

<u>Bilan des forces</u> : $\vec{P} = +mg\,\vec{e_z}$ car $\vec{e_z}$ est vers le bas

$\vec{f} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{z}\,\vec{e_z}$

<u>PFD</u> : $m\ddot{z} = mg - \alpha\dot{z}$ soit $\boxed{\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} = g}$ 2

$\boxed{\dot{v}(t) + \frac{\alpha}{m}v(t) = g}$ 1

L'équation ne dépend pas de v_o, mais sa solution oui. 0,5

Equation différentielle du 1er ordre. 0,5

2. Donner sa solution générale $v(t)$ en fonction de t, m, g, α et d'une constante notée A qui reste à déterminer. (**MP2** : 3 pts)

$\dot{v}_H(t) + \frac{\alpha}{m}v_H(t) = 0$

$\frac{dv_H(t)}{dt} = -\frac{\alpha}{m}v_H(t)$

$\frac{dv_H(t)}{v_H(t)} = -\frac{\alpha}{m}dt$

$\ln(v_H(t)) = -\frac{\alpha}{m}t + cte$

$v_H(t) = A\exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right)$ 1

où $A = \exp(cte)$

$\frac{\alpha}{m}v_p(t) = g$

$v_p(t) = \frac{mg}{\alpha}$ 1

$v(t) = v_H(t) + v_p(t)$

$\boxed{v(t) = A\exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) + \frac{mg}{\alpha}}$ 1

3. Exprimer complètement $v(t)$ en fonction de t, m, g, α et v_o. (**MP2** : 3 pts)

$$v(t=0) = v_0 = A \exp\left(-\frac{\alpha}{m} \times 0\right) + \frac{mg}{\alpha} = A + \frac{mg}{\alpha} \quad 1$$

$$A = v_0 - \frac{mg}{\alpha}$$

$$\boxed{v(t) = \left(v_0 - \frac{mg}{\alpha}\right) \exp\left(-\frac{\alpha}{m} t\right) + \frac{mg}{\alpha}} \quad 2$$

4. Montrer que la vitesse tend vers une vitesse limite notée v_l. Exprimer cette grandeur en fonction des constantes du problème. Vérifier que sa valeur numérique est 20 m.s^{-1} pour $g = 10$ m.s^{-2}, $m = 100$ g et $\alpha = 0.05$ kg.s^{-1}. (**MP2** : 3 pts)

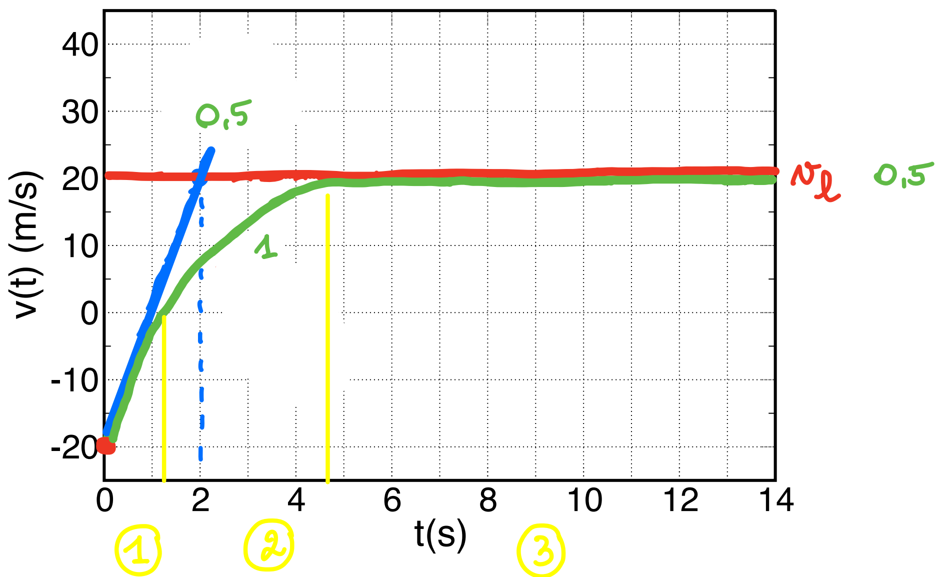
$$\lim_{t \to +\infty} v(t) = \frac{mg}{\alpha} \quad \text{car} \quad \lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$$

$$v_l = \frac{mg}{\alpha} \quad 2 \qquad \text{AN} \quad v_l = \frac{0,1 \times 10}{0,05} = 20 \text{ m.s}^{-1} \quad 1$$

5. On considère le cas suivant : la vitesse initiale est dirigée vers le haut et vaut v_o= –20 m.s^{-1}. Représenter soigneusement la courbe correspondante sur le graphique ci-dessous en faisant attention à la tangente à l'origine que l'on calculera préalablement. (**MP2** : 3 pts)

$$\dot{v}(t) = \left(v_0 - \frac{mg}{\alpha}\right)\left(-\frac{\alpha}{m}\right) \exp\left(-\frac{\alpha}{m} t\right) = \left(g - \frac{v_0 \alpha}{m}\right) \exp\left(-\frac{\alpha}{m} t\right)$$

$$\dot{v}(t=0) = 10 - \frac{-20 \times 0,05}{0,1} = 10 + \frac{1}{0,1} = 10 + 10 = 20 \text{ m.s}^{-2} \quad 1$$



6. En s'appuyant sur ce tracé, décrire qualitativement les différentes phases du mouvement de M. (**MP1** : 3 pts)

1 la bille monte tant que $v(t) < 0$

2 puis elle descend en accélerant

3 et se stabilise sur sa vitesse limite v_l