# Caractéristiques équivalentes d'inertie de mécanismes courants

Il semble évident, et nous allons le montrer, que dans le cas, par exemple, du démarrage à vide (couple permanent sur la charge nulle) d'une charge en rotation à travers un réducteur, le couple moteur à appliquer pour mettre en rotation cette charge d'inertie non nulle dépend du rendement du réducteur :

— pour un réducteur à mauvais rendement, le couple moteur devra être plus important que pour un réducteur à bon rendement ;

— pour un rendement nul du réducteur, caricaturons par ce cas extrême, il semble de bon sens que le moteur, quel qu'il soit, ne pourra faire démarrer la charge.

Il faut donc tenir compte du rendement dans l'expression de l'inertie équivalente ramenée sur l'arbre moteur.

Cela surprend de prime abord quand j'expose cet état à certains collègues habitués à raisonner en termes d'énergie cinétique équivalente sur les deux arbres :

$J_{equi} \times \omega_m^2 = J_c \times \omega_c^2$ et donc $J_{equi} = J_c \times \dfrac{\omega_c^2}{\omega_m^2}$

avec $k = \dfrac{\omega_m}{\omega_c}$ rapport de transmission du réducteur, $J_{equi} = \dfrac{J_c}{k^2}$.

Mais c'est oublier que cette écriture a pour origine le théorème de l'énergie cinétique dans lequel il faut tenir compte du travail des forces de frottement dans la transmission, image du rendement de cette même transmission.

Avant de proposer les modifications de l'expression de l'inertie équivalente pour chaque cas envisagé dans le tableau, justifions la nouvelle écriture sur un cas simple (semblable au premier cas du tableau avec un seul réducteur) :

— une charge d'inertie $J_c$ sur l'arbre 2 de sortie du réducteur ;

— un démarrage à vide $C_{pc} = 0$ ;

— un réducteur de rendement $\eta$, de rapport de transmission $k = \dfrac{\omega_m}{\omega_c}$ ;

— le moteur d'inertie $J_m$, délivrant un couple moteur $C_m$ sur l'arbre 1, entrée du réducteur.

Appliquons le principe fondamental de la dynamique à l'arbre moteur 1 :

$$C_m - C_{ered} = J_m \times \frac{d\omega_m}{dt} \quad (1)$$

avec $C_{ered}$, le couple résistant du réducteur sur l'arbre moteur.

Appliquons le principe fondamental de la dynamique à l'arbre 2 :

$$C_{sred} = J_c \times \frac{d\omega_c}{dt} \quad (2)$$

avec $C_{ered}$, le couple moteur délivré par le réducteur sur l'arbre 2.

Écrivons, par ailleurs, la transmission par le réducteur avec le rendement $\eta$ :

$$\eta = \frac{C_{sred} \times \omega_c}{C_{ered} \times \omega_m} \quad (3)$$

De plus, rappelons que le rapport de transmission s'exprime :

$$k = \frac{\omega_m}{\omega_c}$$

et par dérivation :

$$\frac{d\omega_m}{dt} = k \times \frac{d\omega_c}{dt} \quad (4)$$

La combinaison de ces quatre relations conduit à une relation finale :

$$C_m = (J_m + \frac{J_c}{\eta \times k^2}) \times \frac{d\omega_m}{dt}$$

où l'inertie équivalente de la charge ramenée sur l'arbre moteur apparaît comme le terme $J_{equi} = \dfrac{J_c}{\eta \times k^2}$.

Ainsi, nous voyons bien l'influence du rendement :

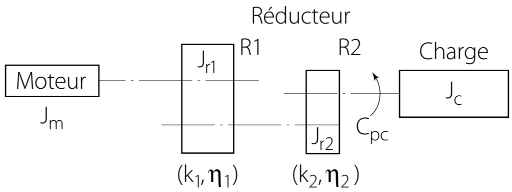
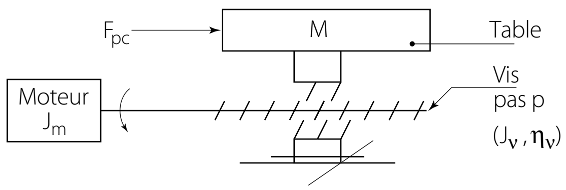
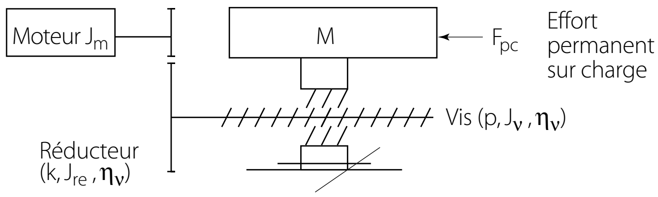
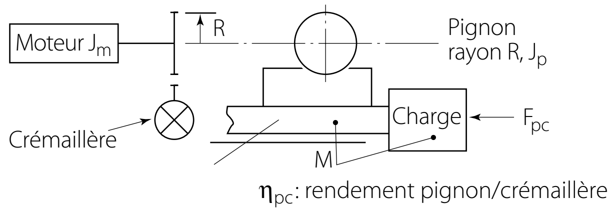
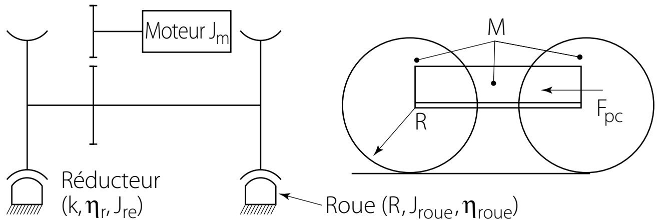
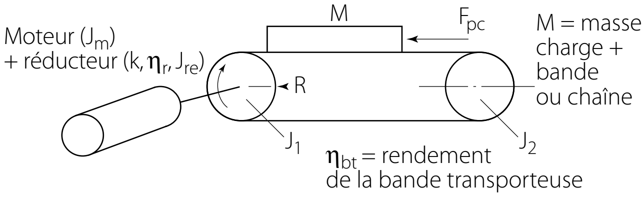
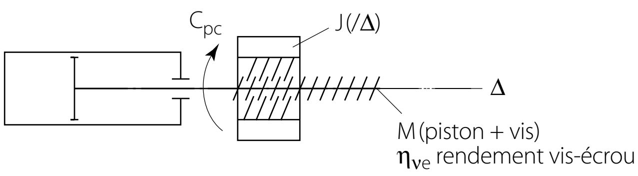
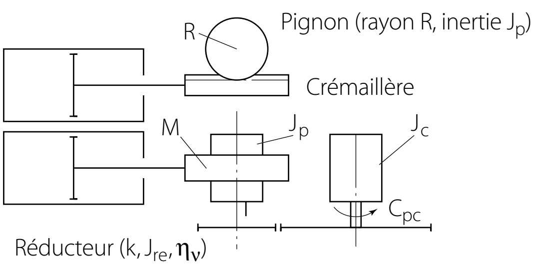
— pour un rendement faible du réducteur, l'inertie équivalente apparaît plus importante sur l'arbre moteur et donc le couple moteur nécessaire aussi ;

— anecdotiquement, un rendement nul nécessite un couple moteur infini !

La démonstration aurait pu être conduite de la même façon en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.

On peut, ainsi, sur les mêmes principes, appliquer le raisonnement aux différents cas proposés dans le tableau.

Je suggère donc les modifications suivantes, tenant compte de l'influence du rendement sur l'inertie équivalente (voir le tableau page suivante).

| Type | Schéma de principe | Caractéristiques équivalentes |
|---|---|---|
| Moteur + 2 réducteurs + charges |  | $C_{pm} = \frac{C_{pc}}{\eta_1 \eta_2 k_1 k_2}$ (N·m)<br>$J_{me} = J_m + J_{r1} + \frac{J_{r2}}{\eta_1 k_1^2} + \frac{J_c}{(k_1 k2)^2 (\eta_1 \eta_2)}$ (kg·m²) |
| Moteur + vis-écrou + table |  | $C_{pm} = \frac{F_{pc}}{\eta_v} \cdot \frac{p}{2\pi}$<br>$J_{me} = J_m + J_v + \frac{M}{\eta_v}\left(\frac{p}{2\pi}\right)^2$ |
| Moteur + réducteur + vis-écrou + table |  | $C_{pm} = \frac{1}{\eta_r \eta_v} \frac{1}{k} \frac{F_{pc} \cdot p}{2\pi}$<br>$J_{me} = J_m + J_{re} + \frac{J_v}{k^2 \eta_r} + \frac{M\left(\frac{p}{2\pi}\right)^2}{k^2 \eta_r \eta_v}$ |
| Moteur + pignon crémaillère + table (+ réducteur éventuel) |  | $C_{pm} = \frac{R \cdot F_{pc}}{\eta_{pc}}$ $\eta_{pc}$ rendement<br>$J_{me} = J_m + J_p + \frac{(MR^2)}{\eta_{pc}}$<br>Avec réducteur<br>$C_m = \frac{1}{\eta_{pc} \eta_r} \frac{R \cdot F_{pc}}{k}$<br>$J_{me} = J_m + J_{re} + \frac{J_p}{k^2 \eta_r} + \frac{MR^2}{k^2 \eta_{pc} \eta_{roue}}$ |
| Chariot automoteur: moteur + réducteur + roues + chariot |  | $C_{pm} = \frac{1}{\eta_r \cdot \eta_{roue}} \frac{R \cdot F_{pc}}{k}$<br>$J_{me} = J_m + J_{re} + \frac{J_{roues}}{k^2 \eta_r} + \frac{MR^2}{k^2 \eta_{pc} \eta_{roue}}$ |
| Bandes transporteuses: moteur + réducteur + chaîne ou bande |  | $C_{pm} = \frac{1}{\eta_r \cdot \eta_{bt}} \frac{R \cdot F_{pc}}{k}$<br>$J_{me} = J_m + J_{re} + \frac{J_1}{k^2 \eta_r} + \frac{J_2}{k^2 \eta_r \eta_{bt}} + \frac{MR^2}{k^2 \eta_r \eta_{bt}}$ |
| Vérin + vis-écrou |  | $F_{pm} = \frac{1}{\eta_{ve}} \cdot C_{pc} \cdot \frac{2\pi}{p}$ (en N)<br>$M_{me} = M + \frac{J}{\eta_{ve}}\left(\frac{2\pi}{p}\right)^2$ (en Kg) |
| Vérin + pignon crémaillère + réducteur + charge |  | $F_{pm} = \frac{1}{\eta_{pc} \eta_r} \frac{C_{pc}}{kR}$<br>$M_{me} = M + \frac{J_p + J_{re}}{\eta_{pc} R^2} + \frac{J_c}{k^2 R^2 \eta_{pc} \eta_r}$ |