

# Formulaire du cours "Ondes et Propagation" (2<sup>ème</sup> année)

## 1 Généralités

1. Constantes caractéristiques du vide :  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ F.m}^{-1}$  ;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$  ;  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
2. Equations de conservation :
  - (a) de la charge :  $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
  - (b) de l'énergie :  $\text{div } \vec{S} + \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$
3. Vecteur de Poynting (noté  $\vec{S}$  ou  $\vec{\Pi}$ ) et densité d'énergie :  $\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H}$  et  $u = \frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu}$
4. Vitesses de phase et vitesse de groupe :  $v_\phi = \left( \frac{dx}{dt} \right)_{\phi=cste}$  et  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$
5. Constante diélectrique généralisée :  $\epsilon^* = \epsilon + \frac{i\sigma}{\omega}$

## 2 Milieux : grandeurs caractéristiques

1. Induction électrique :  $\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  avec  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$  et  $\epsilon_r = \chi_e + 1$
2. Champ magnétique :  $\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$  avec  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$  et  $\mu_r = \chi_m + 1$
3. Densités volumiques de courant :  $\vec{j}_{libre} = \sigma \vec{E}$  ;  $\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$  ;  $\vec{j}_m = \text{rot } \vec{M}$
4. Densité surfacique de courant d'aimantation :  $\vec{j}_{ms} = \vec{M} \wedge \vec{n}$  ( $\vec{n}$  vecteur unitaire normal à la surface)
5. Densité volumique de charges de polarisation :  $\rho_p = -\text{div } \vec{P}$
6. Densité surfacique de charges de polarisation :  $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$
7. Energie potentielle de polarisation du diélectrique :  $E_{pot} = -\frac{1}{2} \epsilon_0 \chi_e E^2$
8. Indice de réfraction d'un milieu non-dissipatif :  $n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r(\omega) \mu_r(\omega)}$

## 3 Réflexion / Réfraction

1. Interface ( $\Sigma$ ) entre 2 diélectriques notés (1) et (2) :
  - (a) Lois de Snell-Descartes :  $\theta_i = \theta_r = \theta_1$  et  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$
  - (b) Relations de Fresnel :
    - i.  $r_\perp(E) = \left( \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_\perp$  et  $t_\perp(E) = \left( \frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_\perp$  pour une onde TE
    - ii.  $r_\perp(B) = -r_\perp(E)$  et  $t_\perp(B) = \frac{n_2}{n_1} t_\perp(E)$  pour une onde TE
    - iii.  $r_\parallel(E) = \left( \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_\parallel$  et  $t_\parallel(E) = \left( \frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_\parallel$  pour une onde TM
    - iv.  $r_\parallel(B) = -r_\parallel(E)$  et  $t_\parallel(B) = \frac{n_2}{n_1} t_\parallel(E)$  pour une onde TM

2. Interface ( $\Sigma$ ) entre un diélectrique (1) et un métal (2) :

(a) Dans le cas d'un métal parfait, un élément de surface  $dS$  de ( $\Sigma$ ) subit une force  $d\vec{f}$  telle que :

$$d\vec{f} = \vec{j}_s \wedge \frac{\vec{B}(\Sigma)}{2} dS$$

(b) Pour un métal non parfait :

i. Temps de relaxation du conducteur :  $\tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma}$  et  $\rho(t) = \rho_0 \exp(-\frac{t}{\tau})$

ii. Profondeur de pénétration :  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$

iii. Puissance dissipée par unité de volume :  $\frac{dP_{joule}}{dv} = \vec{j} \cdot \vec{E}$

## 4 Propagation guidée (guide d'onde rectangulaire métallique)

1. Conditions de continuité pour les champs  $\vec{E}_{total}$  et  $\vec{B}_{total}$  sur les surfaces du guide d'onde :

$$\vec{E}_T = \vec{0} \text{ (composante tangentielle)}$$

$$\vec{B}_N = \vec{0} \text{ (composante normale)}$$

2. Guide d'onde rectangulaire  $a \times b$  :

$$\text{mode } TE_{m0} : a = \frac{m\lambda}{2 \cos \theta} \text{ et } \lambda_c = \frac{2a}{m} \text{ (} m \text{ entier non nul)}$$

$$\text{mode } TE_{0n} : b = \frac{n\lambda}{2 \cos \theta} \text{ et } \lambda_c = \frac{2b}{n} \text{ (} n \text{ entier non nul)}$$

$$\text{mode } TE_{mn} : \lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \text{ (} m \text{ et } n \text{ entiers non nuls)}$$

3. Relation fondamentale de la propagation guidée :

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda_g}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_c}\right)^2$$

4. Atténuation dans le guide d'onde (propagation selon +Oz) :

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{-\left(\frac{dP}{dz}\right)}{P(z)} \text{ avec } P(z) \text{ la puissance transmise à travers la section}$$

$$\alpha = \frac{1}{2\mu_0} \cdot \frac{R_s \oint B_T^2 dl}{\iint (\vec{E} \wedge \vec{B}^*) \cdot \vec{e}_z dS} \text{ avec } R_s = \frac{1}{\sigma \delta}, \text{ la résistance superficielle de la paroi}$$