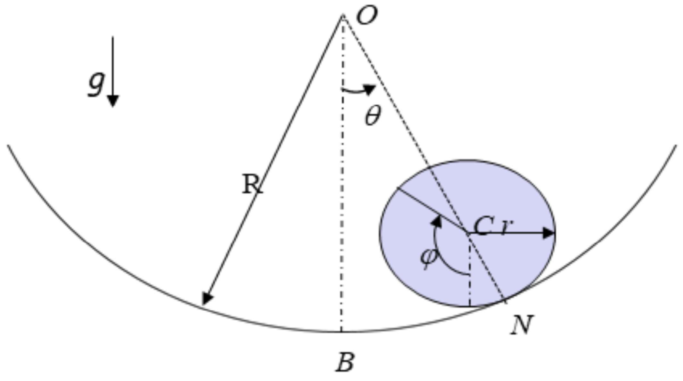
MECANIQUE



CM°5 - Energie cinétique

Plan du cours :

- Energie cinétique
- Système à un degré de liberté : Théorème de l'énergie cinétique
- Energie cinétique d'un corps solide

Mes commentaires

Energie cinétique

	Force	Puissance
Si la vitesse augmente:		
Si la vitesse est constante:		
Si la vitesse diminue:		

$$F = m.\frac{dV}{dt}$$

$$V \times F = m.\frac{dV}{dt} \times V$$

Energie cinétique:

Une masse en mouvement stocke de l'énergie appelée **énergie cinétique**.

En effet :

- Lors de l'accélération d'une masse, la force extérieure est motrice et la puissance ou le travail fourni est positif.

- Lors d'une décélération d'une masse, la force extérieure agit comme un frein et s'oppose au mouvement et la puissance ou le travail fourni est négatif → on peut récupérer alors l'énergie stockée.

Exercice : Déterminer l'expression de l'énergie cinétique à partir du travail fourni à une masse *m* pour faire passer sa vitesse de 0 à *V*.

Question : Donner des exemples d'application de l'énergie cinétique.

Mes commentaires

Théorème de l'énergie cinétique

$$\Delta W_{F_{ext}} = \Delta E_k$$

Loi de Conservation de l'énergie:

Si F_{ext} sont que des forces conservatives → Inclure ces forces dans le système

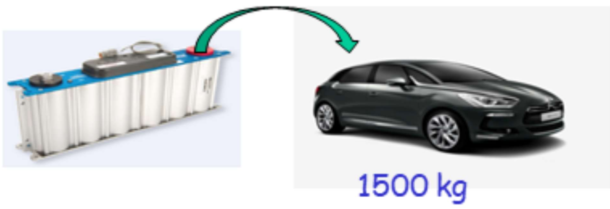
$$E_p + E_k = C^{ste}$$

Théorème de l'énergie cinétique:

$$\sum P_{F_{ext},R_G} - P_{int} = \frac{d}{dt}\left(E_k + E_p\right)$$

Application:

500 F
16 V



1500 kg

En intégrant le principe fondamental de la dynamique, il est possible d'obtenir le théorème de l'énergie cinétique ou le principe de conservation d'énergie.

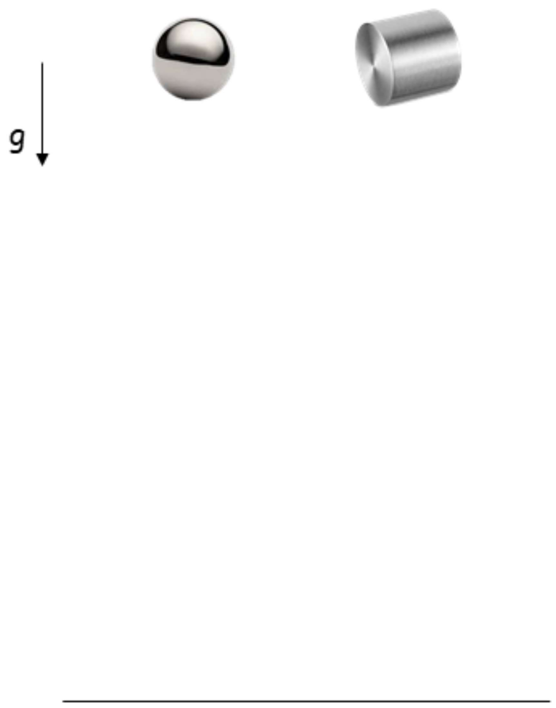
L'approche par le **théorème de l'énergie cinétique** ne peut s'appliquer qu'à des systèmes à **un seul degré de liberté**.

Exercice : Déterminez la vitesse à laquelle on peut lancer un véhicule à l'aide d'une super-capa 500 F – 16 V.

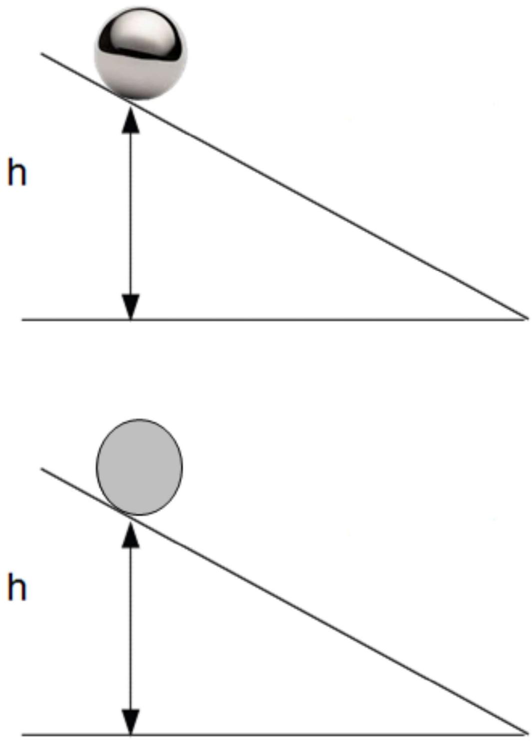
Mes commentaires

Energie cinétique en rotation

Cas 1:



Cas 2:



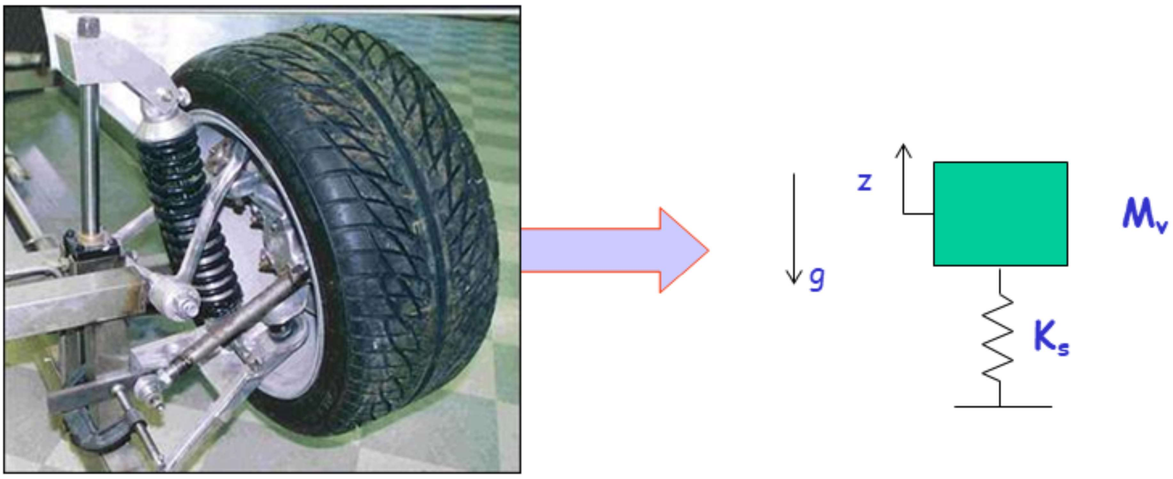
Question 1: Soient un cylindre et une sphère lâchés au même moment <u>dans le vide</u>. Quel objet aura la plus grande vitesse d'impact au sol ?

Question 2: Soient un cylindre et une sphère pleins situés, au repos, sur un plan incliné à une hauteur h. Les deux solides commencent à rouler sans glissement sur la surface. A diamètre identique quel solide aura une vitesse plus élevée une fois arrivé en bas du plan inclinée?

Remarque : moment d'inertie d'une sphère pleine $I=2/5.M.R^2$, moment d'inertie d'un cylindre plein $I=1/2.M.R^2$

Mes commentaires

Exemple: Suspension de voiture – 1 ddl



Le schéma ci-dessus représente la modélisation simplifiée d'une suspension de voiture.

Exercice :

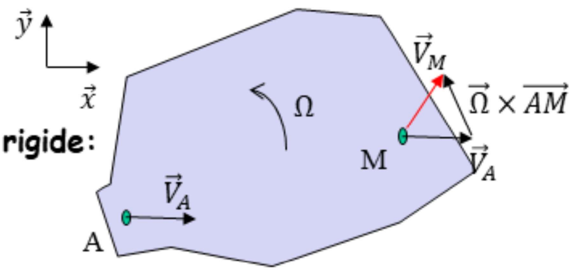
- On suppose dans un premier temps que la suspension ne comprend pas de frottement visqueux (amortisseur).

Etablissez l'expression de l'équation de mouvement à l'aide du PFD et par la dérivation de la loi de conservation de l'énergie.

- Que devient cette équation si on prend compte de l'amortissement visqueux et une force extérieure *F* ?

Mes commentaires

Energie cinétique - Définition:



$$E_k = \iiint \frac{1}{2} V_M^2 \, dm$$

Cinématique d'un solide rigide:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{AM}$$

$\Omega \vec{z}$ Pour un problème plan

$$V_M^2 = \vec{V}_M \vec{V}_M$$
$$= V_A^2 + 2\vec{V}_A(\vec{\Omega} \times \overrightarrow{AM}) + \Omega^2 AM^2$$
$$= V_A^2 + 2\overrightarrow{AM}_A(\vec{V} \times \vec{\Omega}) + \Omega^2 AM^2$$

$$E_k = \iiint \frac{1}{2}\left(V_A^2 + 2\overrightarrow{AM}_A(\vec{V} \times \vec{\Omega}) + \Omega^2 AM^2\right) dm$$

$$E_k = \frac{1}{2} V_A^2 \iiint dm + \frac{1}{2}\Omega^2 \iiint AM^2 dm + (\vec{V} \times \vec{\Omega}) \iiint \overrightarrow{AM} dm$$

Solide de masse M — Inertie J — $=0$ if $A=G$

Au centre de masse:

$$\iiint \overrightarrow{GM} dm = 0$$

Energie cinétique d'un solide:

$$E_k = \frac{1}{2} M V_G^2 + \frac{1}{2} J_G \Omega^2$$

L'énergie cinétique pour des solides peut s'obtenir simplement en sommant l'énergie cinétique en translation et en rotation <u>au centre de masse.</u>

Mes commentaires

HORS PROGRAMME

Pour un système à plusieurs degrés de liberté:

Equations de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \sum_k \frac{\partial W_{ext,k}}{\partial q_i} = F_{ext,i}, \forall q_i$$

Avec: $\mathcal{L} = \mathrm{E_k} - \mathrm{E_p}$

Hors programme:

La réécriture du PFD par produit avec un déplacement élémentaire fictif dx fait apparaître le travail virtuel de l'effort extérieur.

La variation d'énergie cinétique n'est cependant pas directement visible. Il est possible de la faire apparaître à l'aide d'une intégration par partie et en supposant les déplacements virtuels nuls en début et fin de mouvement.

L'expression générale de cette approche peut prendre en compte les énergies potentielles.

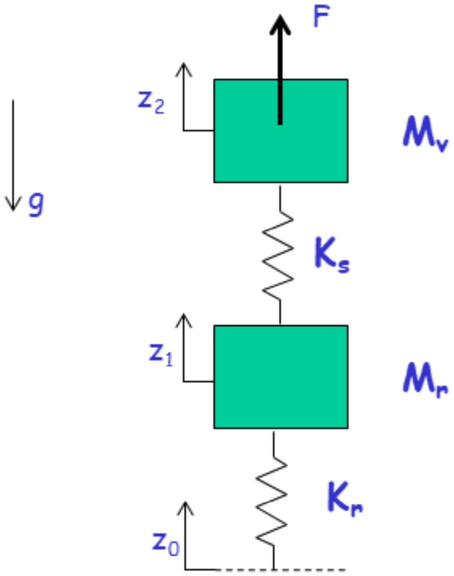
Le formalisme de Lagrange représente à l'aide des énergies le comportement possible d'un système. Un mouvement réel vérifiera la nullité de cette intégrale pour des petites variations virtuelles de trajet. Son expression intégrale n'est cependant pas souvent utilisé directement.

Les dispositifs réels présenteront très souvent plusieurs degrés de libertés, l'ensemble des énergies et donc le Lagrangien sera donc fonction de plusieurs positions, notées ici q_i, et de plusieurs vitesses, notées ici $\dot{q}_i$.

Mes commentaires

L'évaluation par déplacements virtuels pourra faire apparaître des variations de déplacements et de vitesses indépendantes et les grandeurs q_i et $\dot{q}_i$ constituent donc des variables indépendantes. La variation élémentaire du Lagrangien s'obtient par différentielle selon ces différents degrés de liberté.

Les équations de Lagrange permettent d'obtenir de manière systématique les équations caractéristiques du dispositif étudié. L'approche Lagrangienne permet d'éviter de décomposer et d'analyser un système mécanique solide par solide, de se concentrer sur les seuls degrés de liberté fonctionnels et facilite ainsi souvent la modélisation d'un système complexe.



Exercice : Modéliser une suspension de voiture en distinguant la position du châssis et celle de la roue.

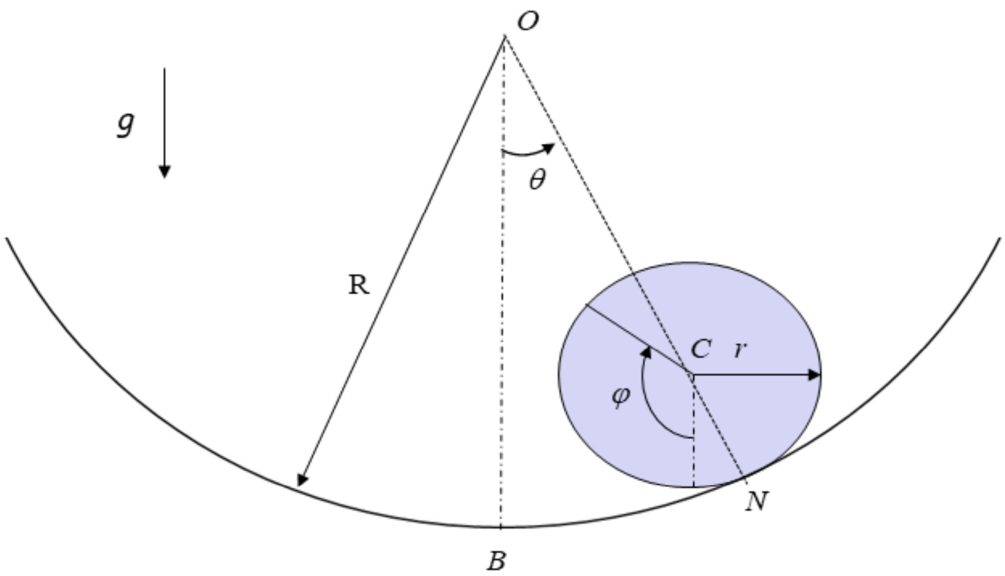
Utiliser pour cela le PFD et les équations de Lagrange.

Mes commentaires

Disque roulant

Un disque uniforme de masse M, de rayon r, et d'épaisseur h roule sans glisser sur une surface cylindrique de rayon R.

L'angle φ mesure le déplacement entre l'axe vertical et un rayon défini du disque.



Exercice : Déterminer l'équation caractéristique du mouvement du disque à l'aide des équation de Lagrange.

Mes commentaires