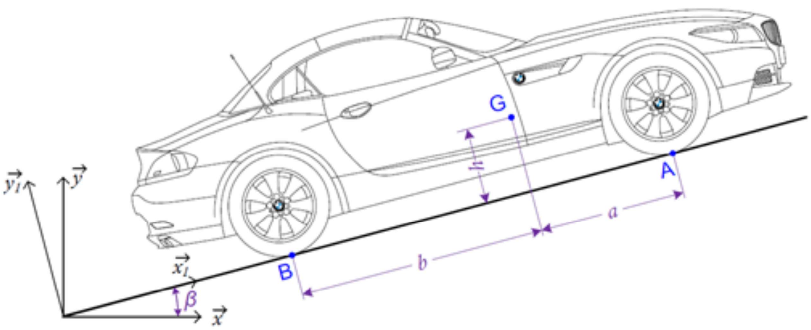
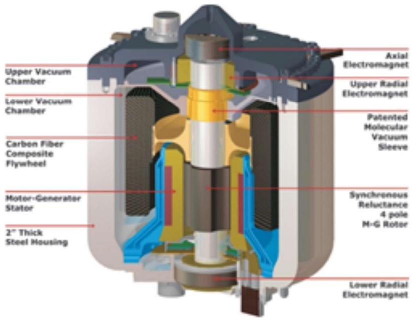
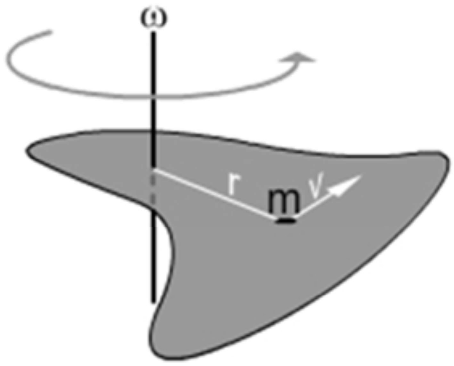
MECANIQUE







CM°4

Dynamique de translation et de rotation

Objectifs du cours :

Traiter des problèmes de mécanique en translation et en rotation à vitesse constante ou variable.

Plan du cours :

- Mouvement de translation et de rotation
- Puissance et pertes par frottement
- Dynamique en translation
- Dynamique en rotation
- Calcul d'inertie et de centre de masse

Mes commentaires

De la statique à la dynamique

Type de régime Fréquence	Modèles types	Concepts	Type de simulation (résolution)
Basse fréquence			
Statique	Transformateur Raideur	Force, Moment	Equations algébriques
Quasi statique	Transformateur Eléments dissipatifs	Force, Moment Vitesse Puissance	
Dynamique	Eléments de stockage (capacitif <u>ou</u> inertiel)	Force, Vitesse, Accélération, …	Equations différentielles
Transitoire	Eléments de stockage (capacitif <u>ou</u> inertiel	Mode de Résonance Bande passante Temps de réponse	
Haute fréquence			

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit le principe fondamental de la statique (PFS). La modélisation de système mécanique évolue selon le type de mouvement (statique, mouvement à vitesse constante, mouvement à vitesse variable).

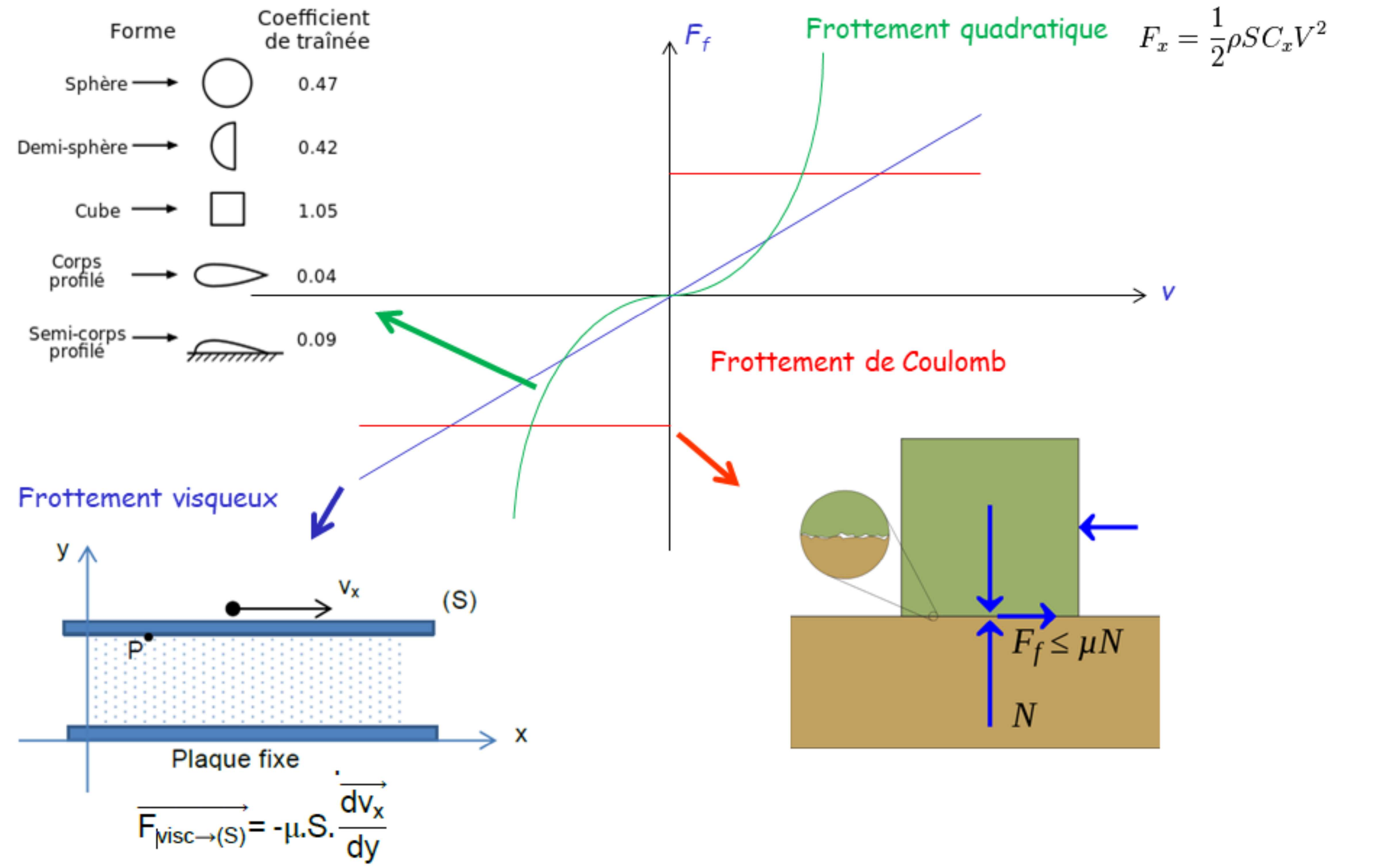
Les modèles de simulation peuvent être plus ou moins précis :

- Pour des phénomènes variant relativement lentement, on peut supposer travailler en régime permanent ou **quasi statique**.
- Pour des profils de mission présentant des variations plus rapide, il peut être nécessaire de prendre en compte certains effets **dynamiques** comme l'inertie d'un rotor nécessitant des efforts lors d'une accélération.
- Sur des variations très rapides **transitoires**, des modes de résonances peuvent être excités et ajouter des oscillations importantes sur les variables.

Mes commentaires

Dans ce chapitre, nous allons mettre en place les équations nécessaires pour représenter des mouvements à vitesse constante ou variable sur un axe de translation ou de rotation.

Forces de frottement



Il est possible de continuer à appliquer le Principe Fondamental de la Statique à des dispositifs en mouvement à vitesse constante. Il faut cependant prendre en compte certains efforts supplémentaires comme **les forces de frottements**.

Les forces de frottements **s'opposent au mouvement** et sont donc orientées de manière opposée au vecteur vitesse. La puissance correspondante générée se transforme en chaleur.

Les forces de frottements peuvent être de différents types :

- De contact entre 2 solides : **Frottement sec** (ou de Coulomb) qui est indépendant de la vitesse de glissement.
  L'intensité du frottement varie en fonction du poids apparent de l'objet et du coefficient de frottement μ mais pas de l'aire de contact ni de la vitesse.

Mes commentaires

à vitesse <u>non</u> nulle : Ff=μ.N à vitesse nulle Ff<=μ.N

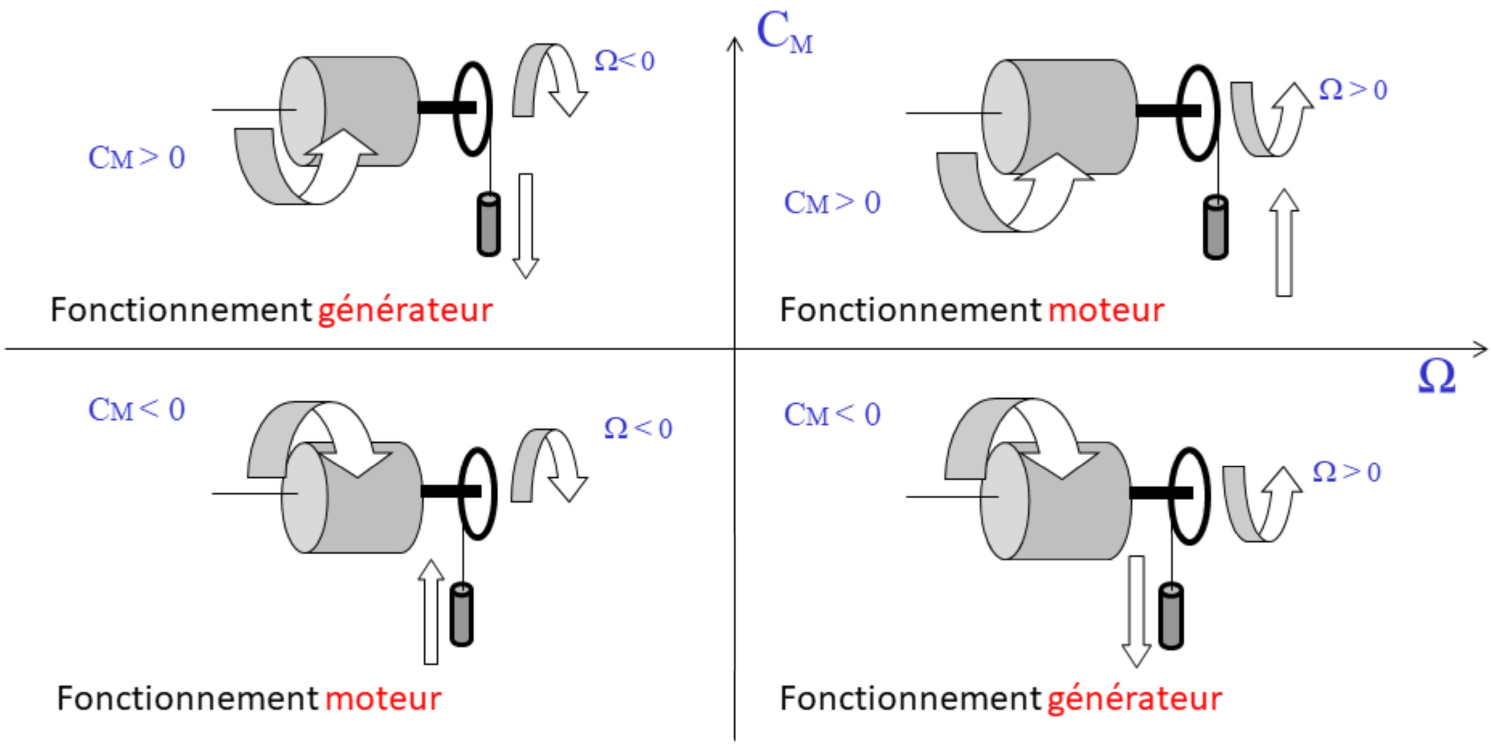
- Fluide à basse vitesse : **Frottement visqueux** (ou forces de viscosité) qui est proportionnel au gradient de vitesse et au coefficient de viscosité μ. Il dépend du fluide et caractérise la résistance d'un fluide à l'écoulement.
- Fluide à haute vitesse : **Frottement aérodynamique** (ou de trainée) qui s'exprime en fonction du carré de la vitesse et de la surface apparente du solide en mouvement.

Puissance: Translation & rotation

Puissance de translation : **P = F.v**

Unités: puissance en Watt (W)

Puissance de rotation: **P = C.Ω**



La notion de vitesse permet de calculer la **puissance fournie ou à fournir**. La puissance en mécanique se calcule par le produit

Effort.Vitesse de translation

ou

Couple.Vitesse de rotation.

Par exemple, pour un ascenseur la charge peut présenter différentes combinaison de vitesses et d'efforts qui peuvent faire travailler l'actionneur en moteur ou générateur (frein). Il existe donc quatre quadrants de fonctionnement (Cf dessin ci-dessus).

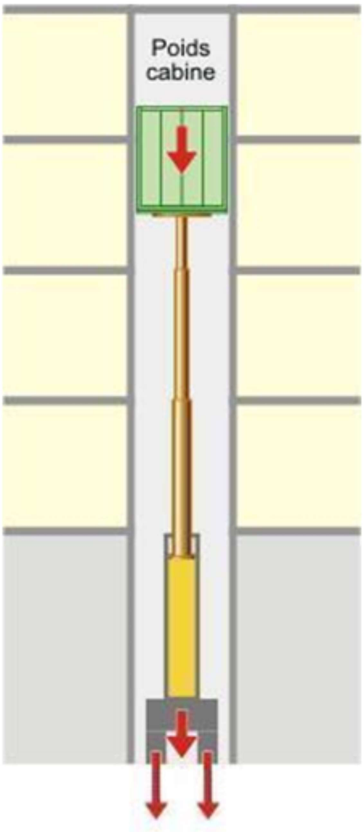
Il est important de connaître les différents quadrants de l'application considérée ou du dispositif d'entraînement.

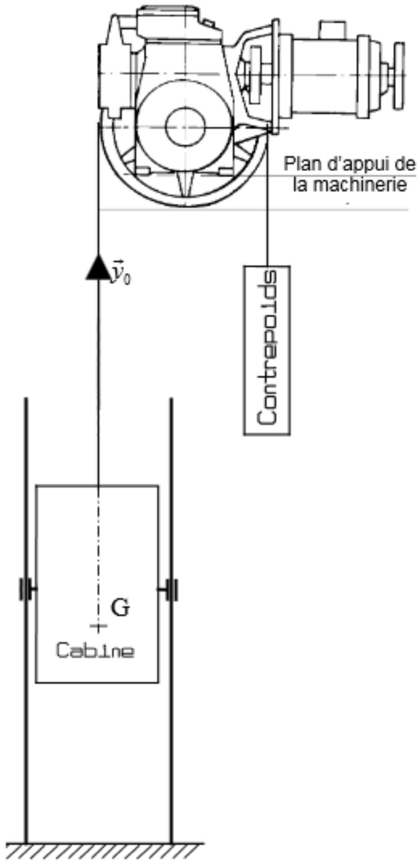
- L'électronique d'alimentation d'un moteur électrique est fortement fonction du nombre de quadrants

Mes commentaires

- Les calculs à base de rendements nécessitent de connaître le sens du flux de puissance

Exemples : Ascenseur (hydraulique, électrique)





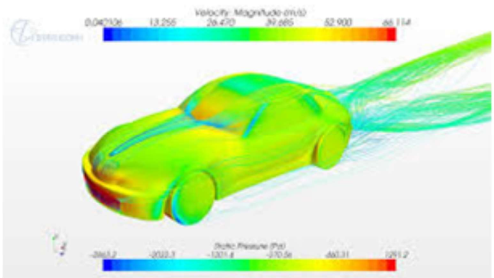
Exercice: Calculer la puissance nécessaire pour déplacer à vitesse stabilisée de 2 m/s une cabine d'ascenseur hydraulique ou électrique.

La charge mécanique est constituée ici :

- d'une cabine de masse m1 de 1000 kg
- d'un contrepoids de masse m2 de 700 kg (uniquement pour le modèle électrique)

Est-ce une puissance de translation ou de rotation?

Mes commentaires

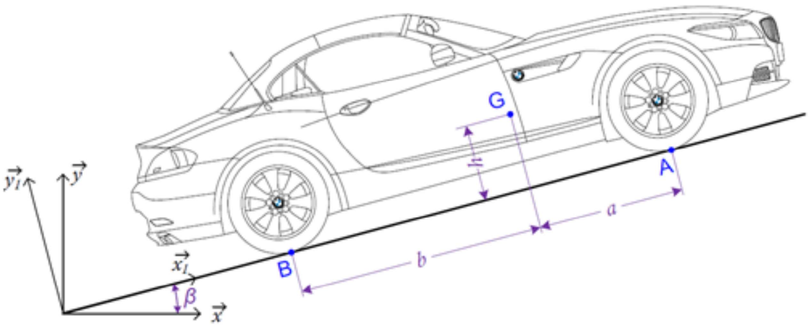


Masse de la voiture : m = 1500 kg

Frottement aérodynamique

$$F_d = \frac{1}{2}\rho C_x S v^2$$

- $\rho = 1.20$: densité volumique de l'air (kg/m^3)
- v : vitesse du vehicule (m/s)
- $S = 1.5\ m^2$: surface frontale (m^2)
- $C_x = 0.35$: coefficient de trainée (sans unité)



Force de résistance au roulement

$$F_r = C_{rr} N$$

- C_{rr} = 100.10-4 : coefficient de la résistance au roulement (sans unité)
- N : force normale (N)

Exercice : Compléter le schéma et calculer la puissance nécessaire à développer pour assurer un vitesse de 100 km/h sur une pente de 5%.

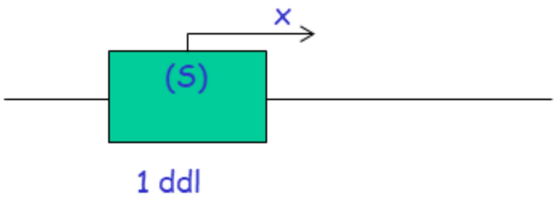
Aide au raisonnement:

- Définir le système à isoler et le repère d'étude
- Lister les forces extérieures appliquées sur ce système et donner leurs composantes
- Appliquer la formule de la puissance en translation. Suivant quel axe?

Mes commentaires

Seconde loi de Newton (PFD)

Mouvement de translation :



Seconde loi de Newton (PFD):

$$\sum F_{ext \to S} = m_S . \frac{dV_{S/R_G}}{dt}$$

Si la masse est constante

ou

$$\sum F_{ext \to S} = \frac{dp_{S/R_G}}{dt}$$

Quantité de mouvement
$p_{S/R} = m_S . V_{S/R}$

Nous allons modéliser des solides en **mouvements linéaires sur un axe** et caractérisés par des **vitesses variables**.

Les lois données se contenteront donc d'une notation scalaire.

Les systèmes étudiés pourront avoir un ou plusieurs degrés de liberté.

Un solide soumis à une somme de force non nulle voit sa vitesse évoluée selon **la seconde loi de Newton** également appelée **Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)**.

Ce principe peut utiliser la notion d'accélération ou la notion de quantité de mouvement (systèmes à masse **non constante)**.

Mes commentaires

Passage: FPD en translation -> PFD en rotation

Déplacement linéaire $\longrightarrow$ **Déplacement angulaire**

$\times\ \vec{r}_{B/A}$

TRANSLATION | **ROTATION**

Attention

Quantité de mouvement: $\vec{p} = m\vec{v}$

Moment cinétique: $\vec{h}_{B/O} = \vec{r}_{B/O} \wedge \vec{p}_{B/O}$

FPD: $\sum \vec{F}_{ext} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

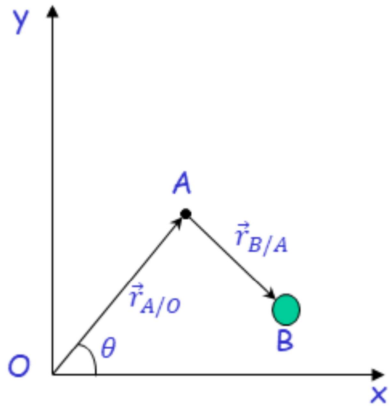
Moment en A: $\sum \vec{M}_{B/A} = \underbrace{\vec{r}_{B/A} \wedge \dfrac{d\vec{P}_{B/O}}{dt}}_{\vec{a}\wedge\frac{d\vec{b}}{dt}}$

$$\frac{d(\vec{a}\wedge\vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt}\wedge\vec{b} + \vec{a}\wedge\frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\sum \vec{M}_{B/A} = \frac{d(\vec{r}_{B/A}\wedge\vec{P}_{B/O})}{dt} - \frac{d\vec{r}_{B/A}}{dt}\wedge\vec{P}_{B/O}$$

$$= \frac{d\vec{h}_{B/A}}{dt} - \frac{d(\vec{r}_{B/O} - \vec{r}_{A/O})}{dt}\wedge\vec{P}_{B/O}$$

$$= \frac{d\vec{h}_{B/A}}{dt} - (\vec{v}_{B/O} - \vec{v}_{A/O})\wedge \underbrace{\vec{P}_{B/O}}_{m\vec{v}_{B/O}} = \frac{d\vec{h}_{B/A}}{dt} - \vec{v}_{A/O}\wedge\vec{P}_{B/}$$



$$\sum \vec{M}_{B/A} = \frac{d\vec{h}_{B/A}}{dt} + \vec{V}_{A/O} \wedge \vec{P}_{B/O}$$

Pour une particule solide, il est possible de réécrire le PFD en utilisant des grandeurs représentatives des mouvements de rotation :

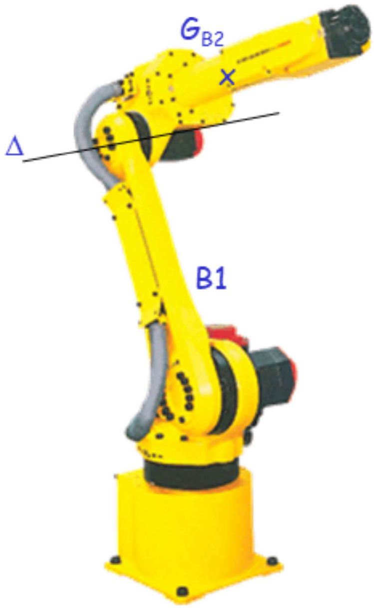
- l'équivalent de la quantité de mouvement est le moment cinétique
- l'équivalent de la somme des efforts extérieurs est la somme des moments de ces efforts

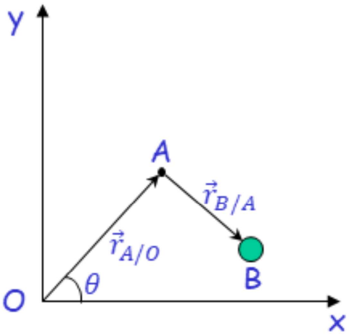
Cette réécriture est faite ici dans le cas (général) où la variation de moment cinétique est exprimée par rapport à un point A potentiellement mobile.

La quantité de mouvement s'obtient par produit de la masse du solide et de la vitesse de son centre de gravité G <u>par rapport au centre du repère</u>.

Mes commentaires

FPD en rotation: cas particuliers





$$\sum \vec{M}_{B/A} = \frac{d\vec{h}_{B/A}}{dt} + \cancel{\vec{V}_{A/O} \wedge \vec{P}_{B/O}}$$

Cas 1: $\vec{V}_{A/O}\, colinéaire\ à\ \vec{P}_{B/O}$

Cas 2: $\vec{V}_{A/O} = \vec{0}$

Les figures ci-dessus représentent deux exemples :

Cas 1:

- Pour l'attraction de fête foraine, on cherche à exprimer les moments mis en jeux pour mettre en rotation une cabine C mobile sur un support tournant.

Le PFD en rotation peut se simplifier si **l'axe de rotation de C passe par son centre de gravité** (A=G). En effet dans ce cas $V_{A/0}=V_{G/0}$ et $P_{B/0}=M.V_{G/0}$ sont colinéaires à $V_{G/0}$

- Attention: Pour un bras de robot (B2), il ne sera pas possible de simplifier l'équation car le centre de gravité de G_{B2} n'est pas sur l'axe de rotation Δ

Mes commentaires

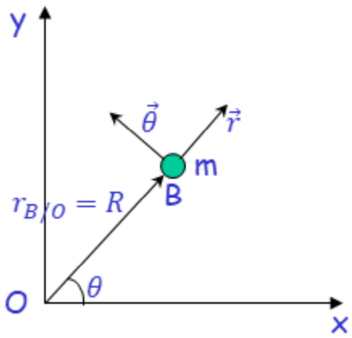
Déplacement linéaire | **Déplacement angulaire**

TRANSLATION

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\sum F_{ext} = m\ddot{x}$$



ROTATION

$$\vec{h}_{B/O} = \vec{r}_{B/0} \wedge \vec{p}_{B/O}$$

$$\sum \vec{M}_{B/O} = \frac{d\vec{h}_{B/O}}{dt}$$

$$\sum M_{B/O} = I\ddot{\theta}$$

Démonstration: $\vec{h}_{B/O} = \vec{r}_{B/O} \wedge \vec{P}_{B/O} = R\vec{r} \wedge m\vec{v} = R\vec{r} \wedge mR\dot{\theta}\vec{\theta} = mR^2\dot{\theta}\vec{k}$

$$\sum \vec{M}_{B/O} = \frac{d\vec{h}_{B/O}}{dt} = \frac{dmR^2\dot{\theta}\vec{k}}{dt} = mR^2\ddot{\theta}\vec{k} \qquad I = mR^2$$

Lorsque le mouvement de rotation se fait **autour d'un axe fixe**, le PFD en rotation se simplifie.

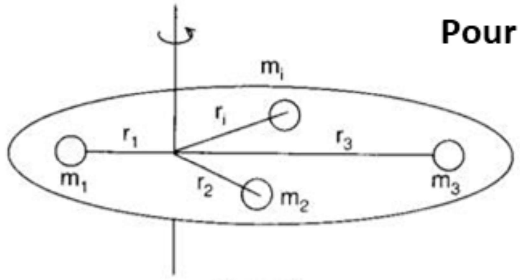
Le calcul du moment cinétique fait apparaître une grandeur équivalente à la masse en translation: le **moment d'inertie I**.

I=mR² pour une masse ponctuelle ou un volant de matière regroupé à une distance R de l'axe de rotation.

Plus le moment d'inertie est important, plus il faut exercer un moment important pour l'accélérer.

Mes commentaires

Moment d'inertie



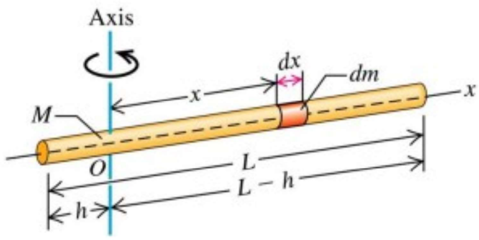
Pour un solide élémentaire:

$$I = \iiint r^2 dm$$

Pour un ensemble de solides:

$$I = \sum m_i r_i^2$$

Application:



$$I = \frac{1}{3} M(L^2 - 3Lh + 3h^2)$$

Cas 1: h=L/2

$$I_G = \frac{1}{12} ML^2$$

Cas 2: h=0

$$I = \frac{1}{3} ML^2$$

Le **moment d'inertie** est une grandeur physique qui caractérise *la répartition de la matière* dans la géométrie d'un solide.

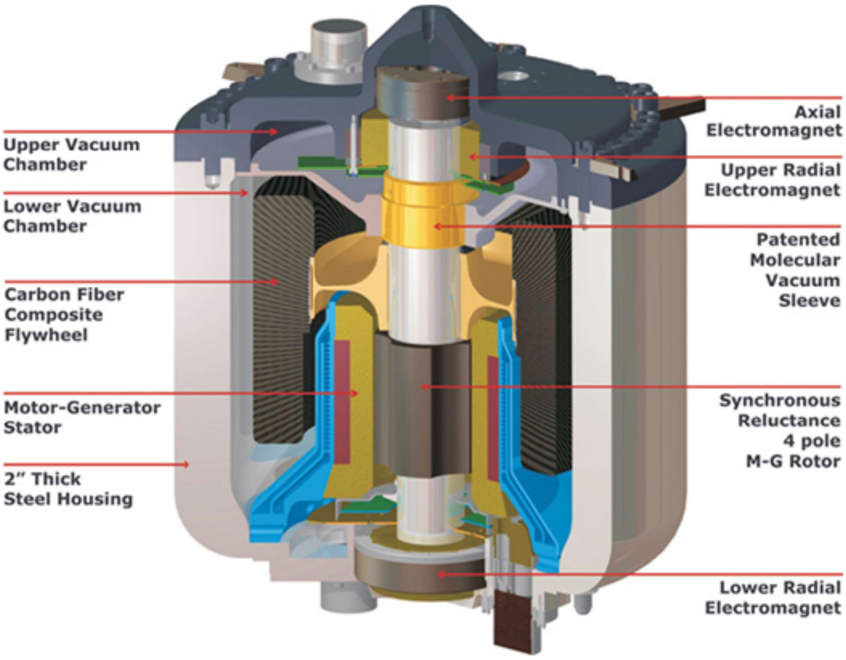
Il quantifie la *résistance* à une mise en rotation de ce solide, et a pour dimension M·L² (le produit d'une masse et du carré d'une longueur) qui s'exprime en kg·m² .

C'est l'analogue pour un solide de la **masse inertielle** qui, elle, mesure la *résistance* d'un corps soumis à une accélération linéaire.

Exercice : Vérifier à partir de la définition, l'expression du moment d'inertie d'une tige de masse *M* et de longueur *L* autour d'un axe situé à une distance *h* de son bout.

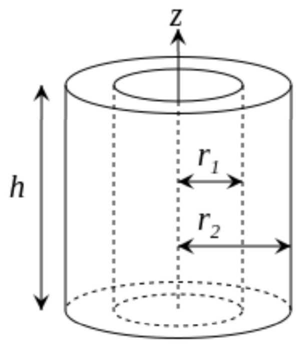
Mes commentaires

Moment d'inertie – Exemple



Moment d'inertie d'un cylindre creux:

$$I_G = \frac{1}{2} M (r_1^2 + r_2^2)$$

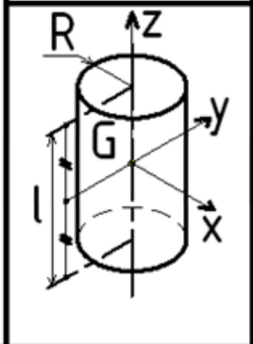
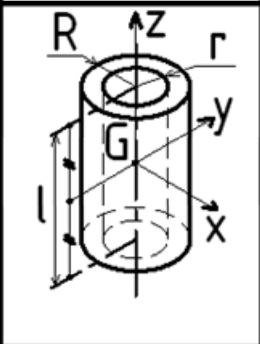
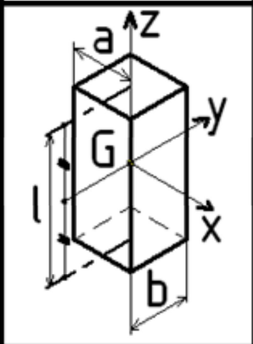
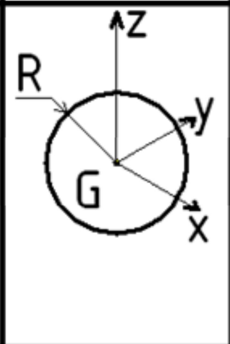
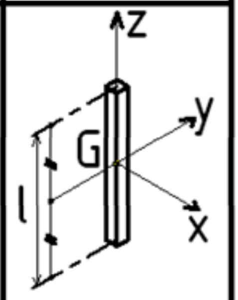


Exercice :

Retrouver la formule du moment d'inertie d'un cylindre creux de masse M et de diamètre intérieur r_1 et diamètre extérieur r_2 autour de son axe.

Mes commentaires

Moment d'inertie dans les cas usuels:

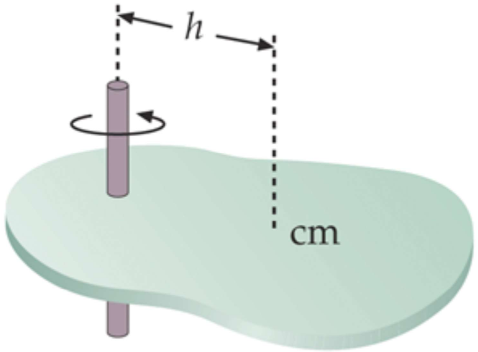
	CYLINDRE	TUBE	PARALLELEPIPEDE RECTANGLE	SPHERE	TIGE
SOLIDES					 Section négligeable
INERTIE	$I_{Gx}=\frac{m.R^2}{4}+\frac{m.l^2}{12}$	$I_{Gx}=\frac{m.(R^2+r^2)}{4}+\frac{m.l^2}{12}$	$I_{Gx}=\frac{m.(b^2+l^2)}{12}$	$I_{Gx}=\frac{2}{5}.m.R^2$	$I_{Gx}=\frac{m.l^2}{12}$
	$I_{Gy}=\frac{m.R^2}{4}+\frac{m.l^2}{12}$	$I_{Gy}=\frac{m.(R^2+r^2)}{4}+\frac{m.l^2}{12}$	$I_{Gy}=\frac{m.(a^2+l^2)}{12}$	$I_{Gy}=\frac{2}{5}.m.R^2$	$I_{Gy}=\frac{m.l^2}{12}$
	$I_{Gz}=\frac{m.R^2}{2}$	$I_{Gz}=\frac{m.(R^2+r^2)}{2}$	$I_{Gz}=\frac{m.(a^2+b^2)}{12}$	$I_{Gz}=\frac{2}{5}.m.R^2$	$I_{Gz}\approx 0$
Unités	I=Inertie (en $kg.m^2$)	m=masse(en kg)	Dimensions (en m)		

Il est important de savoir retrouver ces formules de moment d'inertie.

Attention d'être vigilant à **l'axe par rapport auquel le moment d'inertie est calculé**. Son expression ne sera pas la même!

Mes commentaires

Théoréme de transport (axes paralléles)

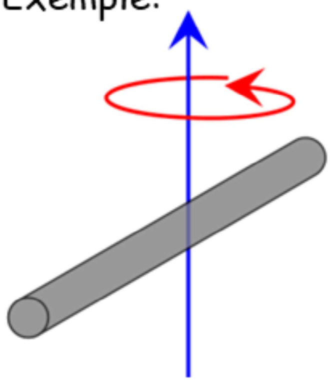


$$I = mh^2 + I_G$$

On a démontré précédement:

$$I = \frac{1}{3}M(L^2 - 3Lh + 3h^2)$$

Exemple:



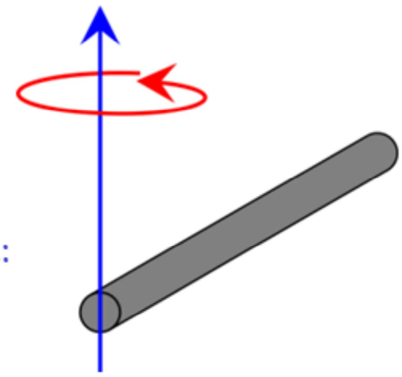
Pour: $h = \frac{L}{2}$ On a:

$$I_G = \frac{1}{12}ML^2$$

Théorème de transport

On obtient à l'extrémité de la barre:

$$I = \frac{1}{3}ML^2$$



Exercice:

Retrouver la formule du moment d'inertie I d'une tige de masse *M* et de longueur *L* <u>autour d'une extrémité</u> en utilisant le théorème de transport.

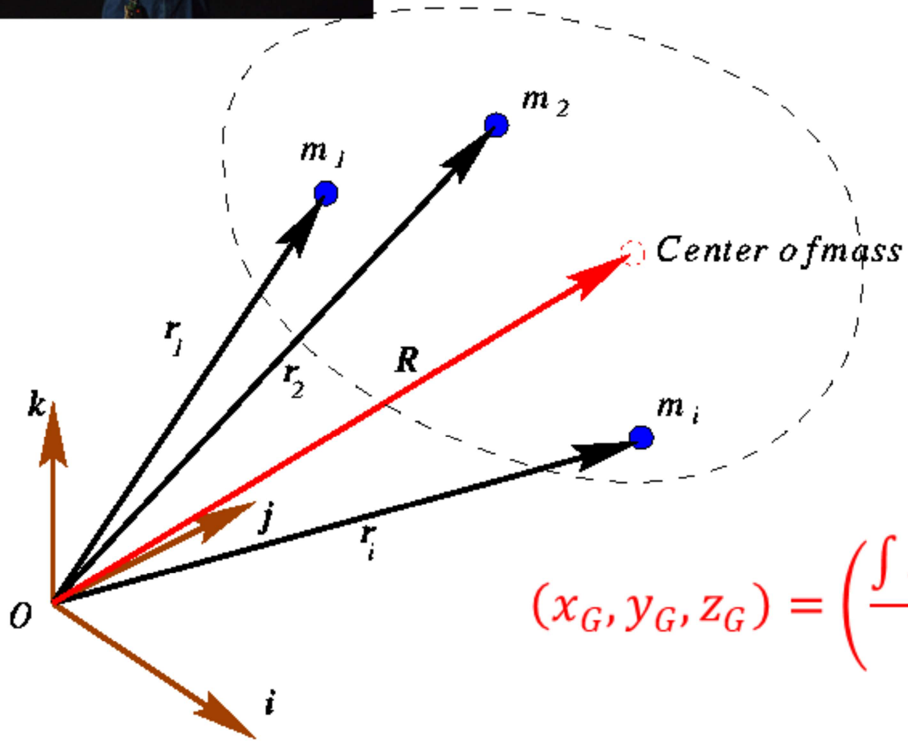
Mes commentaires

Centre de masse

$$\sum m_i R_G = \sum m_i r_i$$

$$R_G = \frac{\sum m_i r_i}{M}$$

$$R_G = \frac{\int r\, dm}{M}$$

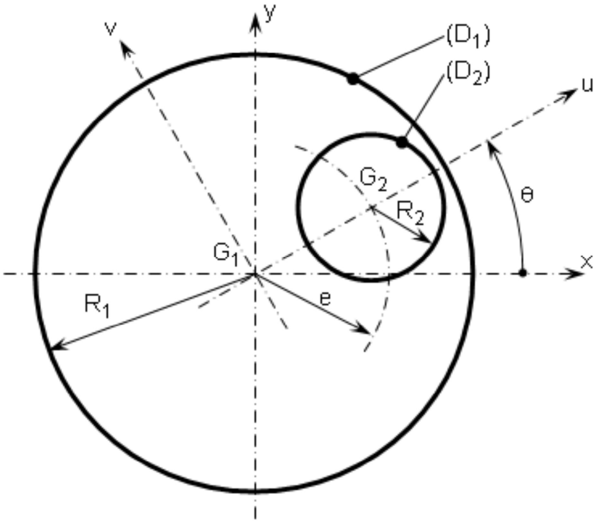


$$(x_G, y_G, z_G) = \left(\frac{\int x\, dm}{M}, \frac{\int y\, dm}{M}, \frac{\int z\, dm}{M}\right)$$

Le centre de masse représente *le barycentre* des masses d'un solide. Il est important de le connaître afin de pouvoir exprimer simplement le PFD en rotation.

On peut l'assimiler au **centre de gravité lorsque le champ de gravitation** auquel le corps est soumis peut être considéré comme **uniforme**.

Mes commentaires



On obtient donc: $\overrightarrow{G_1G} = -\dfrac{R_2^{\,2}}{R_1^{\,2} - R_2^{\,2}}\, e\, \vec{u}$

Exercice:

Soit un solide (D), homogène, d'épaisseur négligeable, de masse surfacique ρ et de masse totale m. Ce solide est formé d'un disque plein (D_1) percé d'un disque (D_2).

Déterminer la position du centre d'inertie G de ce solide.

Remarque: Attention aux signes!

Le centre de masse G du solide (D) est le barycentre des centres de masse des disques (D_1) et (D_2) affectés respectivement des coefficients $+m_1$ et $-m_2$

Mes commentaires