Nom Prénom : Lettre du groupe de TD :

EXAMEN Mécanique 3 IMACS - I3MAPH31
INSA 2021 – 2022 Durée : 1h30

/23

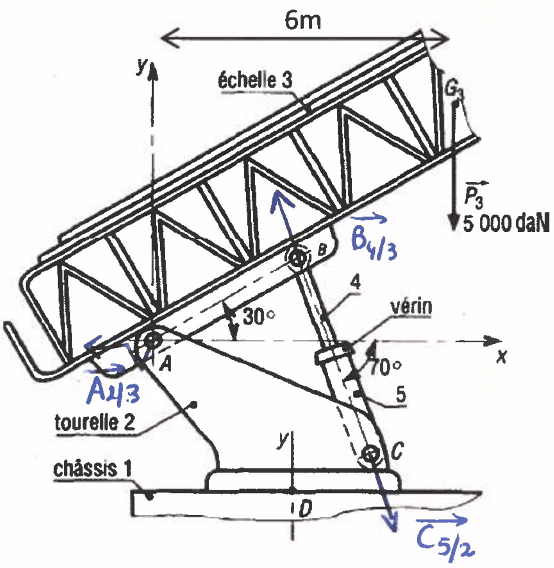
L'usage de tout document est formellement interdit. Les calculatrices sont autorisées pour un usage personnel.
Vous porterez une attention particulière à la rédaction, l'application des théorèmes et unités.

6 **PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE**

Une échelle de pompier 3, partiellement représentée, est articulée en A (pivot d'axe $(A, \vec{z})$) sur une tourelle 2. La tourelle peut pivoter (rotation d'axe $(D, \vec{y})$) par rapport au châssis du camion 1.

Le levage est réalisé par un vérin hydraulique {4 + 5} (4 : tige, 5 : corps) articulé en B sur l'échelle et en C sur la tourelle. Les liaisons en B et C sont des liaisons rotules de centres B et C (ou des articulations de centre B et C).

L'étude est réalisée dans le plan de symétrie du dispositif. L'ensemble est en équilibre.
La tourelle est à l'arrêt et le vérin est bloqué en position.
$\vec{P3}$ modélise le poids de l'échelle ; le poids du vérin est négligé.



1 **Question 1 :** Effectuer l'inventaire des forces (point, direction, sens, intensité)

0,25 $\vec{P_3}$: en G3, verticale, vers le bas $P_3 = 5000$ daN

0,25 $\vec{B_{4/3}}$: en B, selon (BC), vers le haut.

0,25 $\vec{C_{5/2}}$: en C, selon (BC), vers le bas

0,25 $\vec{A_{2/3}}$: en A, direction & sens inconnu

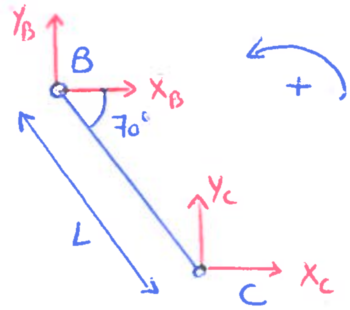
En isolant (4+5), solide soumis à 2 forces $\vec{B_{3/4}}$ et $\vec{C_{2/5}}$ donc forces ayant même direction (BC), même norme mais sens opposé.

(4) **Question 2 :** A l'aide d'une démarche rigoureuse et du PFS, calculer les efforts suivants :
- Force au point A
- Force au point B
- Force au point C

Aide au raisonnement : Il vous sera nécessaire de procéder à deux isolements

• Isolons le vérin (4+5)

NB : le poids est négligé



(0,5) PFS : $\sum \overrightarrow{F_{ext}}/(4+5) = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \cdot \vec{x} & X_B + X_C = 0 \\ \cdot \vec{y} & Y_B + Y_C = 0 \end{cases}$ ($\overrightarrow{B_{3/4}}$, $\overrightarrow{C_{5/5}}$)

$\sum \overrightarrow{M_{\overrightarrow{Fext}/(4,5),C}} = \vec{0}$ $\Rightarrow \cdot \vec{z}$: $-X_B \sin(70°) \cdot \cancel{L} - Y_B \cos(70°) \cdot \cancel{L} = 0$ (0,5)

$\Leftrightarrow$ $X_B = -Y_B \times \dfrac{\cos(70°)}{\sin(70°)} = -\dfrac{Y_B}{\tan(70°)}$

• Isolons l'échelle (3)

PFS : $\sum \overrightarrow{F_{ext}}/3 = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \cdot \vec{x} & X_A - X_B = 0 \\ \cdot \vec{y} & Y_A - Y_B - P_3 = 0 \end{cases}$ ($\overrightarrow{A_{2/3}}$, $\overrightarrow{B_{4/3}} = -\overrightarrow{B_{3/4}}$ ⚠) (0,5)

$\sum \overrightarrow{M_{\overrightarrow{Fext}/3,A}} = \vec{0}$ $\Rightarrow \cdot \vec{z}$ $-X_B \times 1{,}65 + Y_B \times 2{,}85 - P_3 \times 6 = 0$. (0,5)

$\Leftrightarrow$ on remplace Y_B par $-X_B \tan(70°)$:

$X_B(1{,}65 + \tan(70°) \times 2{,}85) = -6 \cdot P_3$

$X_B = -\dfrac{6 P_3}{1{,}65 + \tan(70°) \times 2{,}85} = -31{,}64$ kN (0,5)

- $Y_B = 86{,}94$ kN (0,5)
- $X_A = X_B = -X_C = -31{,}36$ kN (0,5)
- $Y_C = -Y_B = -86{,}94$ kN (0,5)

Question 3 : Le vérin peut développer une poussée de 110 kN. Est-il bien dimensionné ? (1)

$B_{4/3} = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = \sqrt{31{,}64^2 + 86{,}94^2} \simeq 92{,}5 \text{ kN} < 110 \text{ kN}$ (0,5)

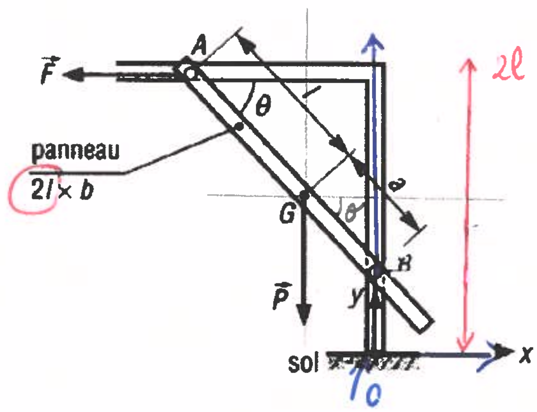
(0,5)

↪ dimensionnement OK !

4 **THEOREME DES TRAVAUX VIRTUELS**

Un panneau de porte de garage coulisse en A (glissière horizontale) et en B (glissière verticale) sous l'action de la charge F appliquée au milieu du panneau.

Le poids P du panneau est schématisé ci-dessous.



Question 4 : Exprimez à l'aide du théorème des travaux virtuels, la valeur de la force F (toujours horizontale) en fonction de P si la porte est supposée en équilibre.

Aide au raisonnement :

- Définir le système à isoler
- Répertorier les forces extérieures et leur point d'application
- Déterminer les coordonnées des points d'application des forces
- Calculer les variations élémentaires de ces positions
- Appliquer le théorème des travaux virtuels

- Isolons le panneau. (0,5)
- BAME : $\vec{F}$ en A et $\vec{P}$ en G (0,5)
- Coordonnées : $A \begin{pmatrix} -\cos\theta \times (l+a) \\ +\sin\theta \times (l+a) \end{pmatrix}$ (0,5) $G \begin{pmatrix} -\cos\theta \times a \\ +2l - l\sin\theta \end{pmatrix}$ (0,5)
- $\delta x_A = (l+a)\sin\theta \cdot \delta\theta$ (0,5)

  $\delta y_G = -l\cos\theta \cdot \delta\theta$ (0,5)

(0,5) • TTV : $-F(-\delta x_A) - P\cdot\delta y_G = 0 \iff -F\cdot(l+a)\sin\theta + Pl\cos\theta = 0$

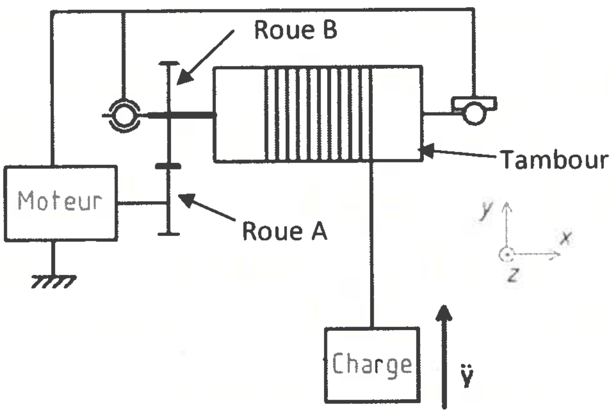
D'où : $F = P \times \frac{\ell}{\ell + a} \times \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = P \times \frac{\ell}{(\ell+a) \cdot \tan\theta}$ (0,5)

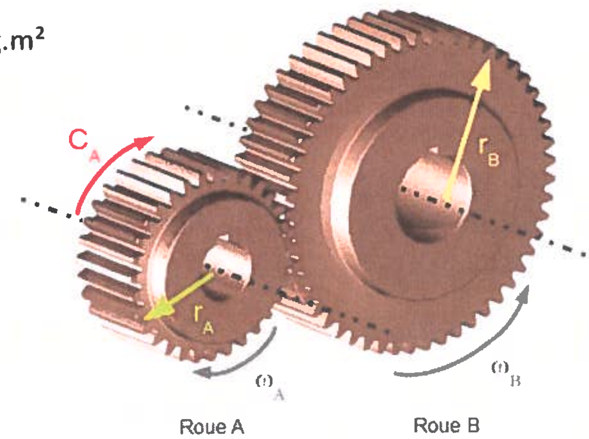
5 **THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE EN PUISSANCE**

Le relevage d'une charge de masse m = 6.8 kg est assuré par un moteur électrique et d'un réducteur composé de deux roues dentées de rapport de réduction 2.5. Le fil est considéré inextensible.

Données : Roue A : rayon r_A = 150 mm ; inertie I_A = 0.0576 kg.m²

Roue B + tambour : rayon r_B = 375 mm ; inertie I_B = 1.08 kg.m²





Question 5 : A l 'aide du théorème de l'énergie cinétique en puissance, calculer le couple C_A en sortie de moteur permettant de générer une accélération de levée de la charge de 12 m/s²

$E_c = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} I_A \cdot \dot{\theta}_A^2 + \frac{1}{2} I_B \cdot \dot{\theta}_B^2$ (0,5)

or $\dot{\theta}_B = \frac{\dot{\theta}_A}{2,5}$ (0,5)

et $\dot{\theta}_B = \frac{\dot{y}}{r_B}$ (0,5)

$= \frac{1}{2} m \left(r_B \frac{\dot{\theta}_A}{2,5} \right)^2 + \frac{1}{2} I_A \cdot \dot{\theta}_A^2 + \frac{1}{2} I_B \left(\frac{\dot{\theta}_A}{2,5} \right)^2$

$= \frac{1}{2} \dot{\theta}_A^2 \left(\frac{m\, r_B^2}{2,5^2} + I_A + \frac{I_B}{2,5^2} \right)$ (0,5)

$$\frac{dE_c}{dt} = \dot{\theta}_A \ddot{\theta}_A \left(\frac{m\, r_B^2}{2,5^2} + I_A + \frac{I_B}{2,5^2} \right) \qquad (0,5)$$

- $E_p = mgy$ (0,5)

$$\frac{dE_p}{dt} = mg\,\dot{y} = mg\,\frac{\dot{\theta}_A}{2,5}\, r_B \qquad (0,5)$$

- $\sum P_{Fext} = C_A \cdot \dot{\theta}_A = \frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt}$ (Th. NRJ cinétique).

$$\ddot{\theta}_A \left(\frac{m\, r_B^2}{2,5^2} + I_A + \frac{I_B}{2,5^2} \right) + \frac{mg\, r_B}{2,5} = C_A . \qquad (1).$$

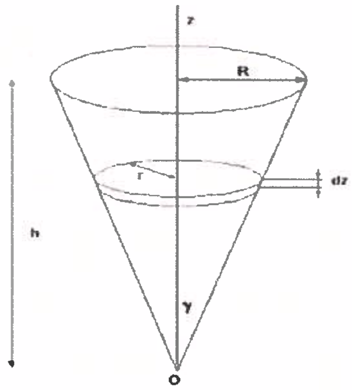
- A.N : $\boxed{C_A = 14,6\ N.m}$ (0,5)

3

MOMENT D'INERTIE

Question 6 : Déterminer le moment d'inertie selon z d'un cône creux de masse m, hauteur H, rayon à la base R.

Vous prendrez comme approximation : S = Π R H



$I_z = \int_S r^2\, dm$ or $\rho_S = \frac{dm}{dS}$ avec $dS = r.\, d\theta .\, dz$

0,5   ⚠ r dépend de z

Th. de Thalès : $\tan\alpha = \frac{R}{r} = \frac{h}{z}$ $\Rightarrow$ $r = \frac{z.R}{h}$ (0,5)

Donc $I_z = \int_S \left(\frac{z.R}{h}\right)^2 \rho_S\, \frac{z.R}{h}\, dz\, d\theta$ (0,5)

$$= \rho_S \frac{R^3}{h^3} \int_S z^3\, dz\, d\theta = \rho_S \frac{R^3}{h^3} \left[\frac{z^4}{4}\right]_0^h \left[\theta\right]_0^{2\pi}$$

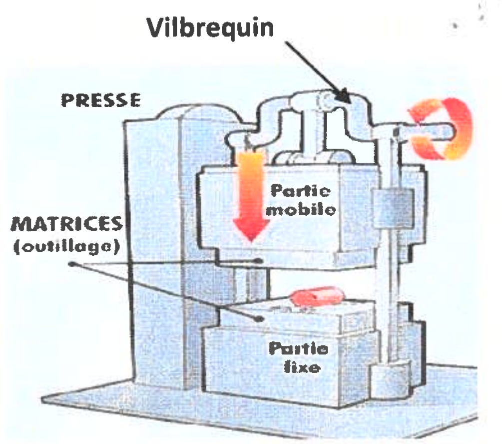
$$= \rho_S \frac{R^3}{\cancel{h^3}} \times \frac{h^{\cancel{4}}}{\cancel{4}\,2} \times \cancel{2}\pi = \frac{\rho_S . R^3 h \pi}{2}$$

or $\rho_S = \frac{M}{S} = \frac{M}{\pi R H.}$ (0,5)   D'où $\boxed{I_z = \frac{MR^2}{2}}$ (1)

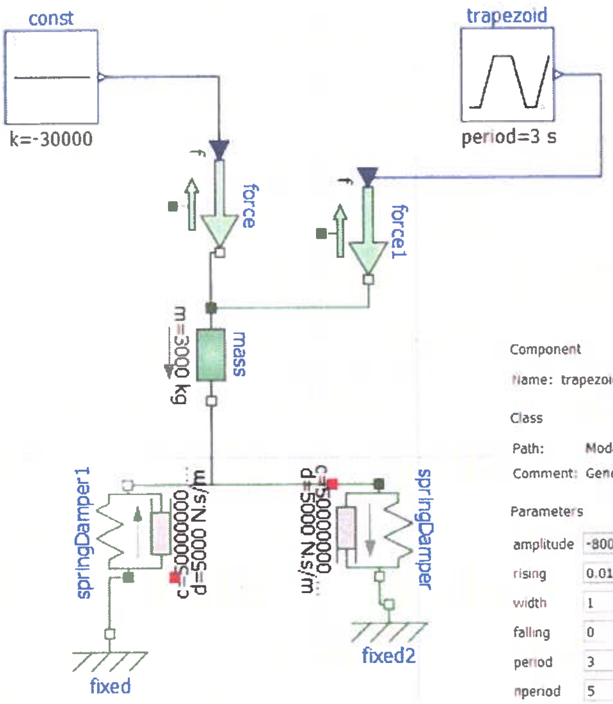
MODELISATION NUMERIQUE

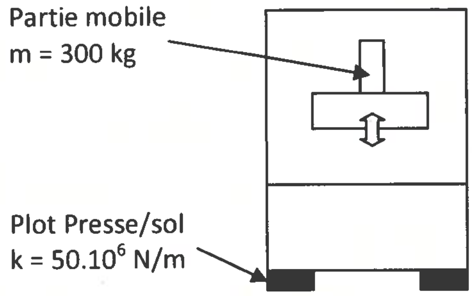
On étudie une presse mécanique permettant de déformer des tôles par choc, à l'aide de matrices dont l'une est montée sur une partie mobile de masse m.

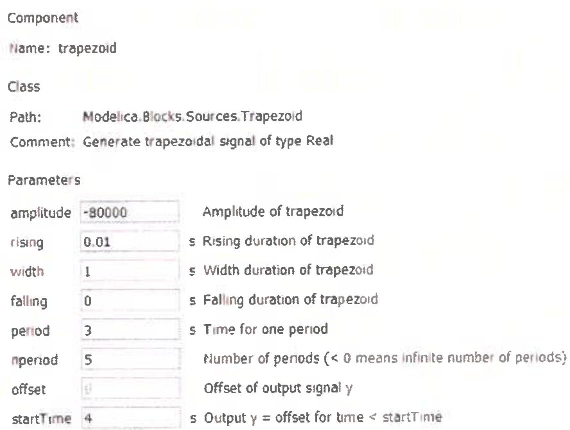
Pour amortir les vibrations permettant la déformation de la pièce, des plots sont installés sous la presse, en contact avec le sol. On étudie le problème plan avec deux plots de raideurs équivalentes.



Le modèle associé, réalisé sur Dymola est le suivant :






Component

Name: trapezoid

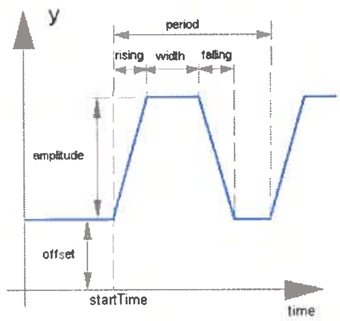
Class

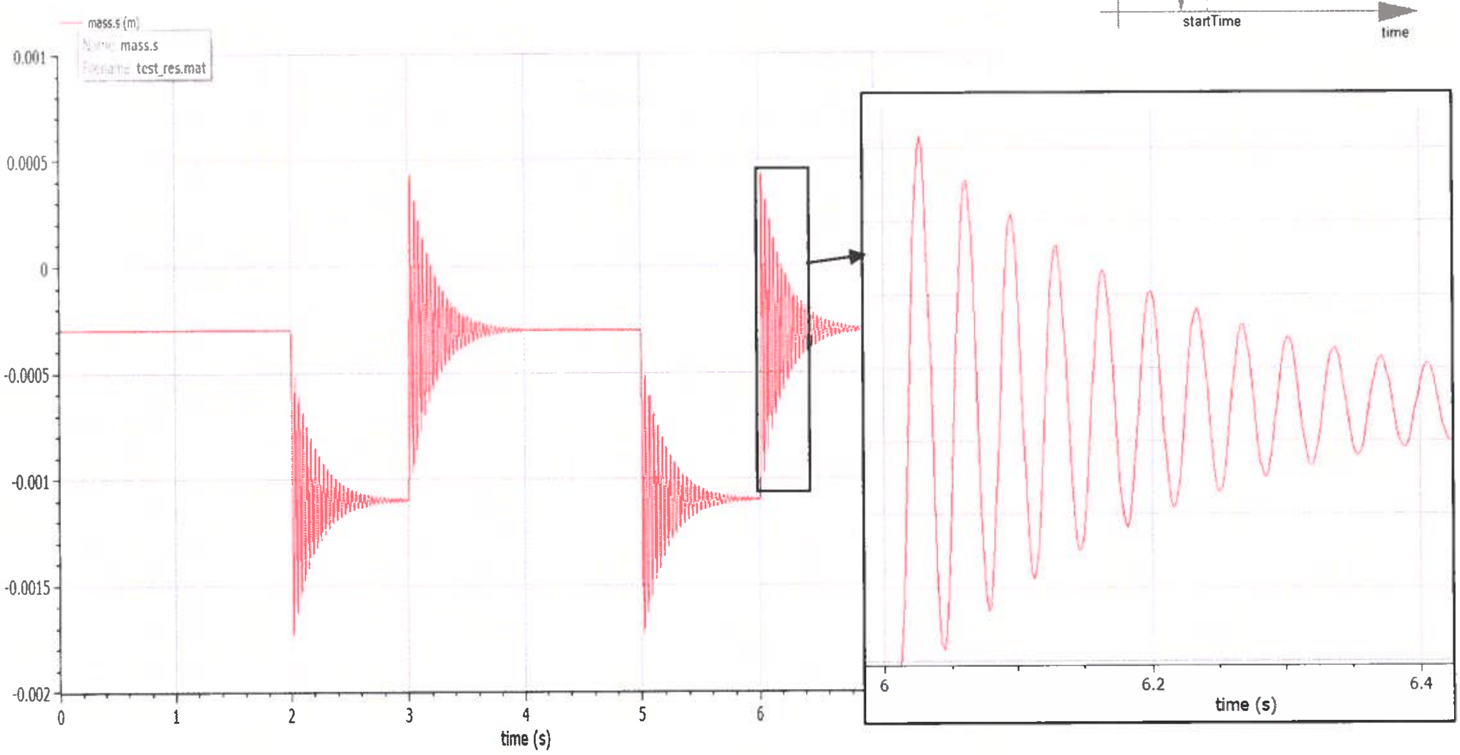
Path: Modelica.Blocks.Sources.Trapezoid

Comment: Generate trapezoidal signal of type Real

Parameters

amplitude	-80000		Amplitude of trapezoid
rising	0.01	s	Rising duration of trapezoid
width	1	s	Width duration of trapezoid
falling	0	s	Falling duration of trapezoid
period	3	s	Time for one period
nperiod	5		Number of periods (< 0 means infinite number of periods)
offset	0		Offset of output signal y
startTime	4	s	Output y = offset for time < startTime





1,5

Question 7: Que représentent les forces « Const » et « trapezoid » ? Par quels composants sont modélisés les plots ?

0,5 - "const" : poids de la partie mobile : 30 000 N

0,5 - "trapezoid" : effort généré par le choc de la matrice mobile sur la pièce à déformer

0,5 - les plots sont modélisés par des ensembles ressort + amortisseur

1,5 **Question 8 :** Vers quelle valeur converge la compression des plots lors d'un choc ? Retrouver cette valeur à l'aide d'un PFS appliqué sur la masse.

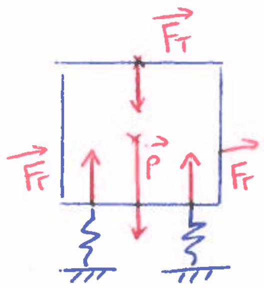
la compression converge vers $-0{,}0011$ m 0,5

On isole la masse :

$F_r = -k \cdot \Delta x$

$F_T = 80\ 000$ N

$P = 30\ 000$ N



PFS : $2F_r - F_T - P = 0$ 0,5

$-2k\Delta x - 80\ 000 - 30\ 000 = 0$.

$\Leftrightarrow \Delta x = -\dfrac{110\ 000}{2k} = -0{,}0011$ m. 0,5

(2) **Question 9 :** Calculer la fréquence de la zone transitoire et la comparer à la fréquence propre de ce s

Expliquer pourquoi il serait dangereux de faire tourner le vilebrequin (voir photo en page 6) à une vitesse
tr/s.

- 10 périodes ≃ 0,33 s = 10 T

  donc T = 0,033 s $\longrightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,033} = 30$ Hz (0,5)

- fréquence propre : $f_p = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}}$ (0,5)

A.N. $f_p = 29$ Hz $\Rightarrow$ simulat° même résultat (0,5)

- N = 28 tr/s ≃ f_p $\Rightarrow$ Risque de resonance
  (0,5) La vibrat° liée au choc sera amplifiée
  ↳ Risque de détérioration prématurée.

Nota : La raideur équivalente de deux ressorts en série vaut : $1/K_{eq} = 1/K_1 + 1/K_2$

La raideur équivalente de deux ressorts en parallèle vaut $K_{eq} = K_1 + K_2$