NOM-Prénom : . . . . Groupe : . . . . . .

1A CC1 Mécanique du point (45 min)

Lundi 17 octobre 2022

- Aucun document n'est admis. Aucun appareil électronique n'est autorisé.
- Préparez votre carte d'étudiant.
- Pensez à simplifier au maximum vos résultats.
- Vous serez évalués sur les acquis de l'apprentissage suivants :

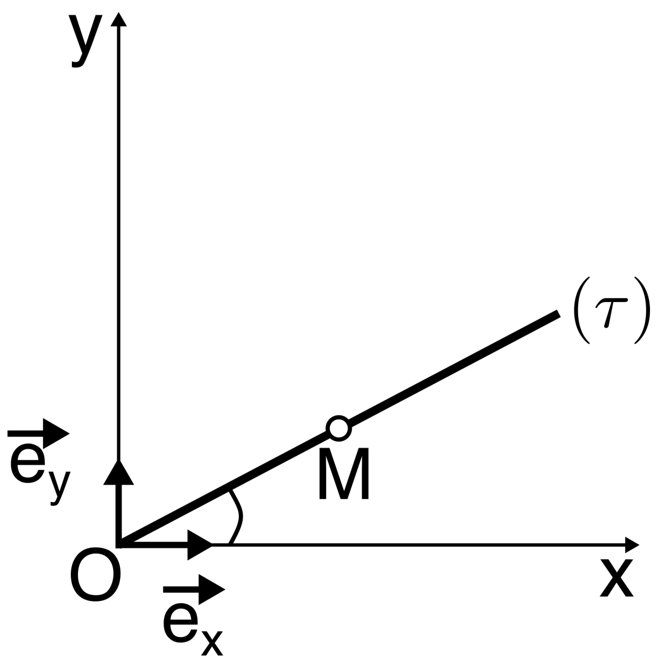
  MP1 : Connaître les concepts généraux de la mécanique du point

  MP2 : Résoudre un problème, calculer et analyser le résultat en mécanique du point.

La spirale d'Archimède

Une tige τ dont une des extrémités est fixée en O tourne dans le plan (xOy), autour de l'axe (Oz). Le point O est fixe dans le référentiel terrestre auquel est associé le repère d'observation cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. L'angle orienté entre l'axe (Ox) et la tige est noté θ. On considère le mouvement d'un anneau de masse m, enfilé sur la tige, représenté par le point M qui sera repéré par ses coordonnées polaires (ρ, θ). À $t = 0$, l'anneau se trouve au point O. Il s'agit d'étudier la trajectoire décrite par le point M dans le repère cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ vu par un observateur placé en O.

1. Compléter soigneusement le schéma suivant pour un point M quelconque de la trajectoire, en plaçant correctement (ρ, θ) ainsi que les vecteurs de la base cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. (**MP1** : 2 pts)



2. Donner l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$, dans le repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, en fonction de ρ et θ. (**MP1** : 2 pts)

3. Donner l'expression du vecteur vitesse du point M en fonction de $(\rho, \dot{\rho}, \theta, \dot{\theta})$ dans le repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. (**MP2** : 2 pts)

4. Donner l'expression du vecteur position du point M en fonction de (ρ, θ) dans le repère cylindrique $(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. (**MP2** : 1 pts)

5. Donner l'expression du vecteur vitesse du point M en fonction de $(\rho, \dot{\rho}, \dot{\theta})$ dans le repère cylindrique $(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. (**MP2** : 2 pts)

6. Quel repère d'espace vous paraît le plus pratique pour décrire le mouvement ? Justifier votre réponse. (**MP2** : 1 pts)

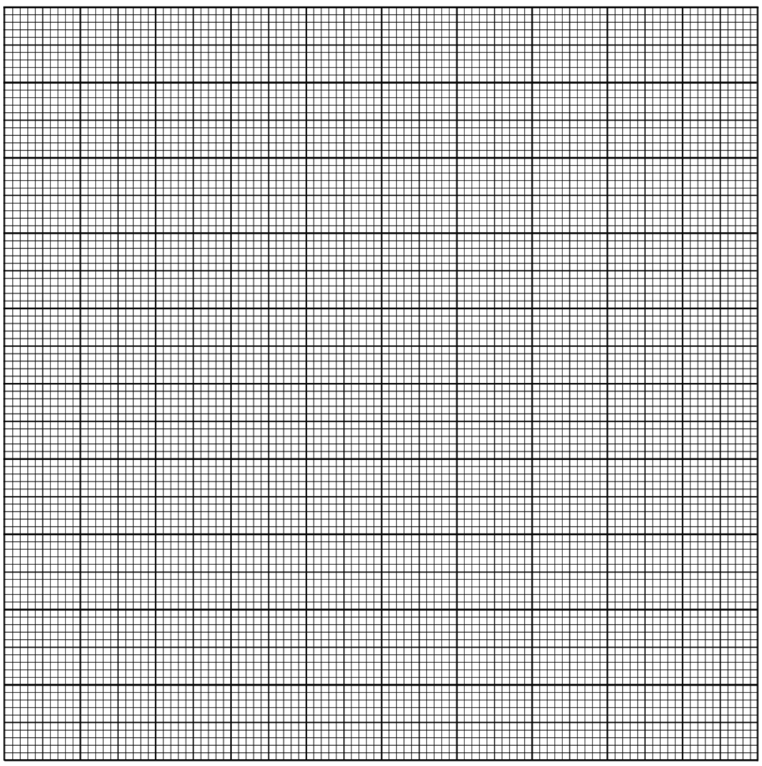
À présent on considère que le point M, se déplace à une vitesse constante v_o le long de la tige (τ) et que celle-ci tourne autour de l'axe (Oz) avec une vitesse angulaire constante $\omega > 0$.

7. Donner les expressions de $\rho(t)$ et $\theta(t)$, en fonction de v_0 et ω. (**MP1** : 2 pts)

8. Montrer que l'équation de la trajectoire s'écrit $\rho(\theta) = \dfrac{v_0}{\omega}\theta$. (**MP1** : 1 pts)

9. La coordonnée ρ est incrémentée d'une longueur constante d à chaque tour de la tige. Calculer l'expression de d en fonction de v_0 et ω. (**MP2** : 1 pts)

10. Représenter, le plus fidèlement possible, l'allure de la trajectoire dans le plan (xOy), on pourra par exemple faire apparaitre des valeurs d'angle particulières et la longueur constante d pour aider le tracé. (**MP2** : 3 pts)



11. Donner l'expression du vecteur vitesse du point M, dans le repère cylindrique, en fonction de t, ω et v_0. (**MP1** : 2 pt)

12. Donner l'expression du vecteur accélération du point M, dans le repère cylindrique, en fonction de t, ω et v_0. (**MP1** : 2 pt)

13. En imaginant que l'observateur est maintenant assis en O sur la tige en mouvement, que devient la trajectoire du point M ? (**MP1** : 1 pt)