NOM-Prénom : . . . . Groupe : . . . . . .

1A CC1 Mécanique du point (45 min)

Lundi 17 octobre 2022

- Aucun document n'est admis. Aucun appareil électronique n'est autorisé.
- Préparez votre carte d'étudiant.
- Pensez à simplifier au maximum vos résultats.
- Vous serez évalués sur les acquis de l'apprentissage suivants :

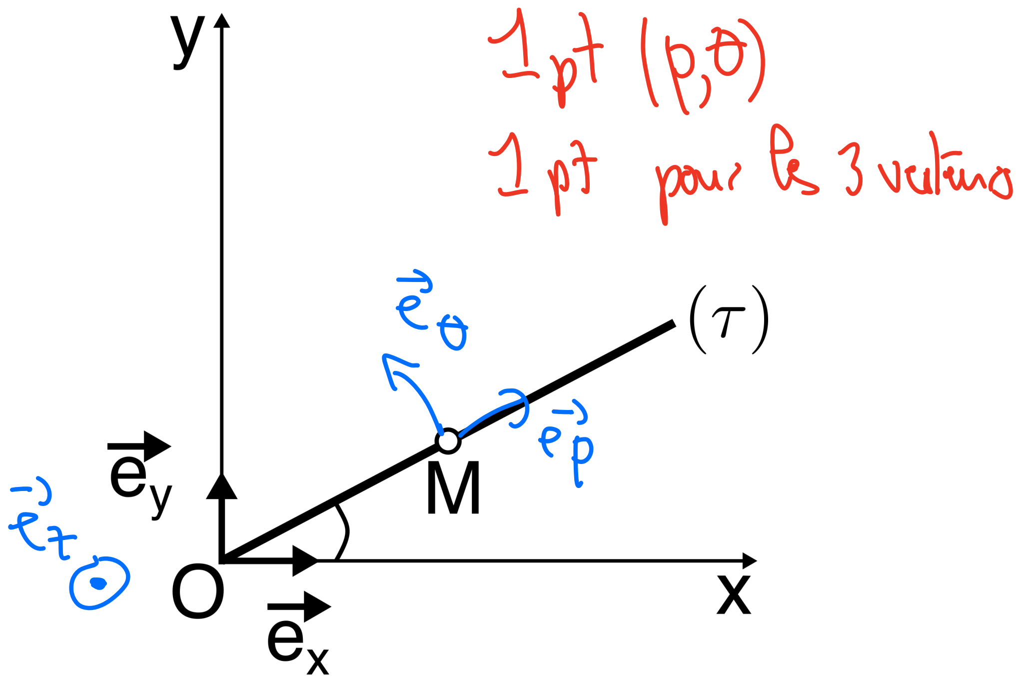
  MP1 : Connaître les concepts généraux de la mécanique du point

  MP2 : Résoudre un problème, calculer et analyser le résultat en mécanique du point.

La spirale d'Archimède

Une tige τ dont une des extrémités est fixée en O tourne dans le plan (xOy), autour de l'axe (Oz). Le point O est fixe dans le référentiel terrestre auquel est associé le repère d'observation cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. L'angle orienté entre l'axe (Ox) et la tige est noté θ. On considère le mouvement d'un anneau de masse m, enfilé sur la tige, représenté par le point M qui sera repéré par ses coordonnées polaires (ρ, θ). À $t = 0$, l'anneau se trouve au point O. Il s'agit d'étudier la trajectoire décrite par le point M dans le repère cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ vu par un observateur placé en O.

1. Compléter soigneusement le schéma suivant pour un point M quelconque de la trajectoire, en plaçant correctement (ρ, θ) ainsi que les vecteurs de la base cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.
   (**MP1** : 2 pts)



2. Donner l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$, dans le repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, en fonction de ρ et θ. (**MP1** : 2 pts)

$$\overrightarrow{OM} \begin{vmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \end{vmatrix} \quad (1) \; (1)$$

3. Donner l'expression du vecteur vitesse du point M en fonction de $(\rho, \dot{\rho}, \theta, \dot{\theta})$ dans le repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. (**MP2** : 2 pts)

$$\vec{v} \left| \begin{array}{l} \dot{\rho}\cos\theta - \rho\dot{\theta}\sin\theta \quad 1 \\ \dot{\rho}\sin\theta + \rho\dot{\theta}\cos\theta \quad 1 \end{array} \right.$$

4. Donner l'expression du vecteur position du point M en fonction de (ρ, θ) dans le repère cylindrique $(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. (**MP2** : 1 pts)

$$\vec{OM} = \rho\vec{e}_\rho \quad 1$$

5. Donner l'expression du vecteur vitesse du point M en fonction de $(\rho, \dot{\rho}, \dot{\theta})$ dans le repère cylindrique $(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. (**MP2** : 2 pts)

$$\vec{v}_M = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} \quad 1$$

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_\rho = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad 0{,}5$$

$$\vec{v}_M \left| \begin{array}{l} \dot{\rho} \\ \rho\dot{\theta} \end{array} \right. \quad 0{,}5$$

6. Quel repère d'espace vous paraît le plus pratique pour décrire le mouvement ? Justifier votre réponse. (**MP2** : 1 pts)

le cylindrique 0,5

expression (+) simple et interprétation physique plus évidente 0,5

À présent on considère que le point M, se déplace à une vitesse constante v_o le long de la tige (τ) et que celle-ci tourne autour de l'axe (Oz) avec une vitesse angulaire constante $\omega > 0$.

7. Donner les expressions de $\rho(t)$ et $\theta(t)$, en fonction de v_0 et ω. (**MP1** : 2 pts)

$\dot{\rho} = v_0 \Rightarrow \rho(t) = v_0 t + \rho_0$ avec $\rho(0) = 0$ $\quad \rho(t) = v_0 t$ (1)

$\dot{\theta} = \omega \Rightarrow \theta(t) = \omega t + \theta_0$ avec $\theta(0) = 0$ $\quad \theta = \omega t$ (1)

8. Montrer que l'équation de la trajectoire s'écrit $\rho(\theta) = \dfrac{v_0}{\omega}\theta$. (**MP1** : 1 pts)

$t = \dfrac{\theta}{\omega} \Rightarrow \rho = \dfrac{v_0}{\omega}\theta$ (1)

9. La coordonnée ρ est incrémentée d'une longueur constante d à chaque tour de la tige. Calculer l'expression de d en fonction de v_0 et ω. (**MP2** : 1 pts)

$\rho(\theta + 2\pi) = \dfrac{v_0}{\omega}(\theta + 2\pi) = \rho(\theta) + \dfrac{v_0}{\omega} \times 2\pi$

$= \rho(\theta) + d \qquad d = \dfrac{v_0}{\omega} 2\pi$ (1)

10. Représenter, le plus fidèlement possible, l'allure de la trajectoire dans le plan (xOy), on pourra par exemple faire apparaitre des valeurs d'angle particulières et la longueur constante d pour aider le tracé. (**MP2** : 3 pts)

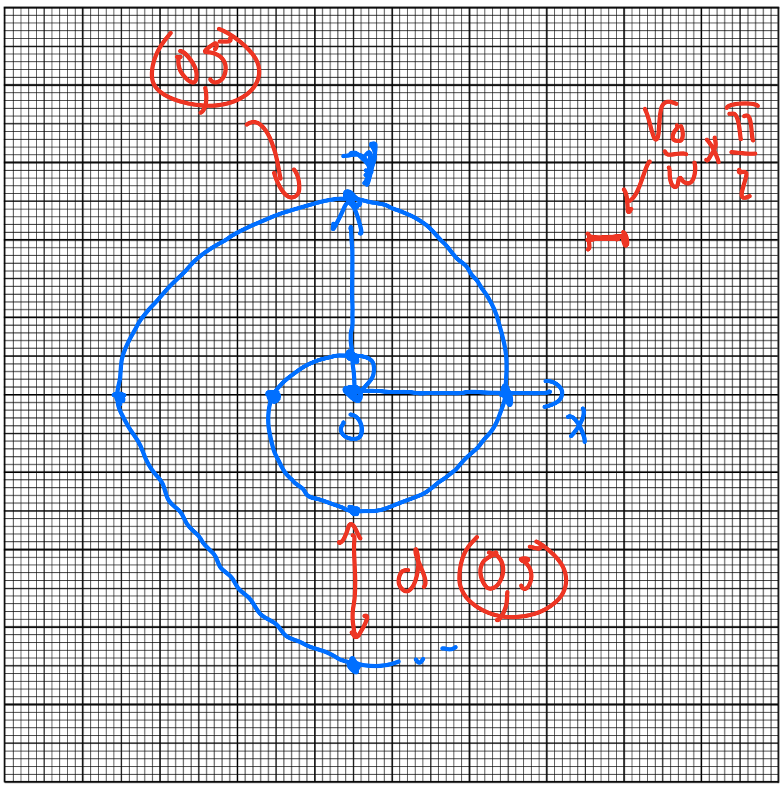
$\theta = \dfrac{\pi}{2} \rightarrow \dfrac{v_0}{\omega}\dfrac{\pi}{2}$

$\theta = \pi \rightarrow \dfrac{v_0}{\omega}\pi$

$\theta = \dfrac{3\pi}{2} \rightarrow \dfrac{v_0}{\omega} \times \dfrac{3\pi}{2}$

$\theta = 2\pi \rightarrow \dfrac{v_0}{\omega} \times 2\pi$

(1)



tracé + respect de l'échelle (1)

11. Donner l'expression du vecteur vitesse du point M, dans le repère cylindrique, en fonction de t, ω et v_0. (**MP1** : 2 pt)

$$\vec{v} \left| \begin{array}{l} v_0 \quad 1 \\ v_0 \omega t \quad 1 \end{array} \right.$$

12. Donner l'expression du vecteur accélération du point M, dans le repère cylindrique, en fonction de t, ω et v_0. (**MP1** : 2 pt)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_0 \vec{e}_\rho\right) + \frac{d}{dt}\left(v_0 \omega t\, \vec{e}_\theta\right) \quad 0{,}5$$

$$= v_0 \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + v_0 \omega \vec{e}_\theta + v_0 \omega t \frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\, \vec{e}_\rho = -\omega \vec{e}_\rho \quad 0{,}5$$

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} -v_0 \omega^2 t \\ 2 v_0 \omega \quad 1 \end{array} \right.$$

13. En imaginant que l'observateur est maintenant assis en O sur la tige en mouvement, que devient la trajectoire du point M ? (**MP1** : 1 pt)

Dans ce référentiel $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$ sont fixes 0,5

$\vec{v} = v_0 \vec{e}_\rho$ mouvement rectiligne uniforme

$\rightarrow$ droite 0,5