NOM-Prénom : . . . .   Groupe : . . . . . .

1A CC2 Mécanique du point (1h)

Lundi 28 novembre 2022

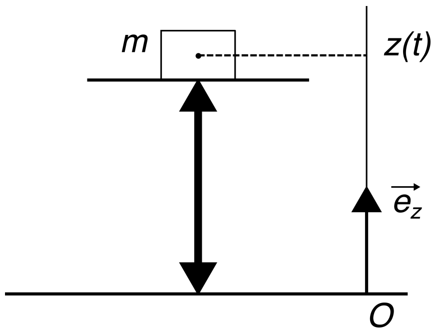
- Répondre sur le sujet, penser à simplifier au maximum vos résultats et à utiliser les résultats des questions précédentes même si n'avez pas réussi leur démonstration.
- Aucun document n'est admis, une calculatrice est autorisée.
- Vous serez évalués sur les acquis de l'apprentissage suivants :

  MP1 : Connaître les concepts généraux de la mécanique du point

  MP2 : Résoudre un problème, calculer et analyser le résultat en mécanique du point.

Masse sur un support oscillant

On considère, dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen, le montage ci-contre, dans lequel une masse m repose sur un plateau, lui-même monté sur un actionneur qui impose un mouvement sinusoïdal de va-et-vient vertical de sorte que la coordonnée $z(t)$ de la masse s'écrit : $z(t) = z_0 + A\cos(\omega t)$, avec A une constante positive. Il n'existe aucun frottement dans ce système. Le système évolue dans le champ de pesanteur terrestre dirigé selon $-\vec{e}_z$, avec $g = 9,81$ m.s^{-2}.



1. Faire le bilan des forces qui s'appliquent sur la masse m, et donner leurs expressions. (**MP1** : 2 pts)

$\vec{P} = -mg\vec{e_t}$ (1) $\vec{R} = R\vec{e_z}$ (1)

2. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la masse m, et en détaillant la démarche, déterminer l'expression de composante selon $\vec{e}_z$ de la force de réaction du support, en fonction de $m,\ g,\ A,\ \omega$ et t. (**MP1** : 2 pts)

$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$ $-mg + R = m\frac{d^2}{dt^2}[z_0 + A\cos(\omega t)]$ (0,5)

$-mg + R = -mA\omega^2\cos(\omega t)$ (0,5)

(1) $\boxed{R = m[g - A\omega^2\cos(\omega t)]}$

3. Dans les expressions des forces, comment se traduit le fait que le masse reste en contact avec le plateau et ne décolle pas ? (**MP2** : 1 pt)

$R > 0$ (1)

4. Déterminer les valeurs minimale et maximale de la composante selon $\vec{e}_z$ de la force de réaction du support. (**MP2** : 1 pt)

R_{max} pour $\cos(\omega t) = -1$ (0,5)

R_{min} ——— $= +1$ (0,5)

5. En déduire que la pulsation des oscillations (ω) ne doit pas dépasser une valeur limite pour s'assurer que la masse reste au contact du plateau. (**MP2** : 1 pt)

$R_{min} = m(g - A\omega^2) > 0$ (0,5) $g > A\omega^2$

$\omega < \sqrt{\frac{g}{A}}$ $\omega_p = \sqrt{\frac{g}{A}}$ (0,5)

6. Calculer numériquement la valeur de la fréquence limite pour $A = 5$ cm et $m = 500$g. (**MP2** : 1 pt)

$\omega \simeq 14$ rad/s (0,5) $\Rightarrow f = \frac{14}{2\pi} \sim 2$ Hz (0,5)

Une bille dans une gouttière circulaire

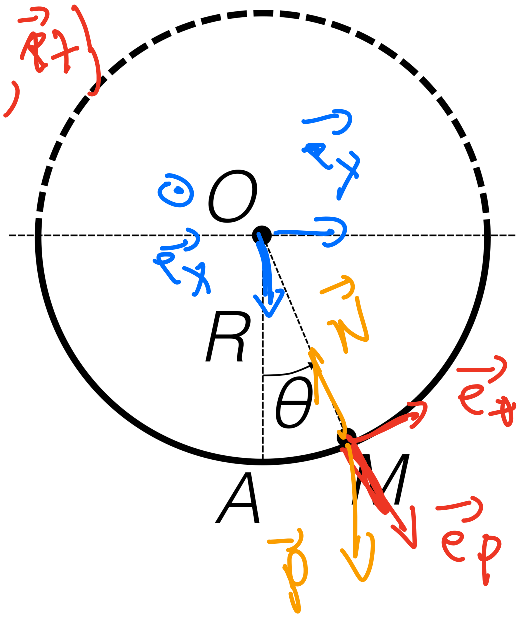
On étudie dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen, le mouvement d'une petite bille de masse m, modélisée par un point matériel ramené à son centre d'inertie noté M. Elle peut glisser sans frottement dans une gouttière circulaire de rayon R. On décrit son mouvement à l'aide de l'angle θ repéré par rapport à la verticale comme sur le schéma. Initialement en A, l'objet est lancé avec une vitesse horizontale vers la droite de valeur v_0. On admet que le mobile demeure dans le plan de la figure pendant tout son mouvement. La bille est soumise au champ de pesanteur $\vec{g} = g\vec{e}_x$.

1. Compléter le schéma ci-dessous, en faisant apparaître clairement et sans se soucier de l'échelle, les vecteurs du repère cartésien et de la base cylindrique, ainsi que les forces extérieures agissant sur la masse m. (**MP1** : 2 pts)

0,5 par $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$

0,5 par $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta$

(1) pour les forces



2. En tenant compte de sa trajectoire, établir les expressions des vecteurs position $\overrightarrow{OM}$, vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ du mobile selon les vecteurs de la base cylindrique. (**MP2** : 1 pt)

$\overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} R \\ 0 \end{array} \right.$ $\vec{v} \left| \begin{array}{l} 0 \\ R\dot{\theta} \end{array} \right.$ $\vec{a} \left| \begin{array}{l} -R\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} \end{array} \right.$

0,5 0,5

3. Établir le bilan des forces appliquées au point M et les exprimer dans la base cylindrique. (**MP1** : 1 pt)

$\vec{N} \left| \begin{array}{l} -N \\ 0 \end{array} \right.$ $\vec{P} \left| \begin{array}{l} mg\cos\theta \\ -mg\sin\theta \end{array} \right.$

0,5 0,5

4. A l'aide du principe fondamental de la dynamique, établir l'équation différentielle du mouvement. (**MP1** : 1 pt)

proj sur $\vec{e}_\theta$: $-mg\sin\theta = mR\ddot{\theta}$ 0,5

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0}$$

0,5

5. On se place dans le cadre des "petites oscillations". En détaillant la démarche, indiquer ce que cela signifie et écrire l'équation différentielle en tenant compte de cette approximation. (**MP2** : 1 pt)

$\theta \ll 1$ $\sin\theta \sim \theta$ $\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0$

0,5 0,5

6. Donner la forme générale de la solution de l'équation différentielle dans le cadre de l'approximation précédente. La résoudre complètement pour obtenir $\theta(t)$. (**MP2** : 3 pts)

Eq diff 2nd ordre à coeff. constant homogène.

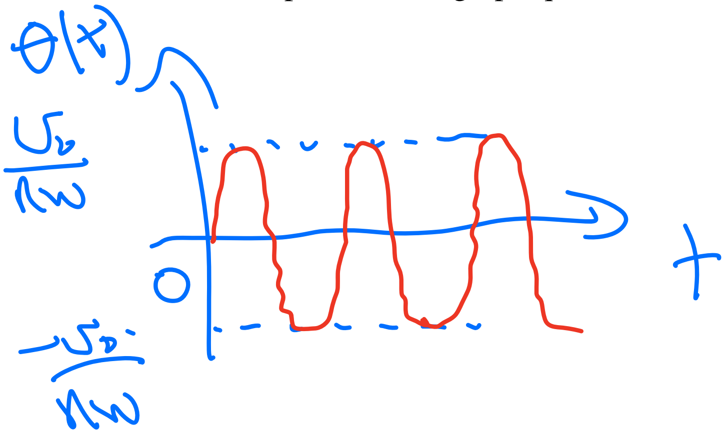
Eq caract $r^2 + \omega^2 = 0$ $\quad \Delta < 0$ $\quad$ 0,5 $\quad \omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$ $\quad$ 0,5

$\theta(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ $\quad$ 0,5

$\theta(0) = 0 \Rightarrow A = 0$ $\quad$ 0,5

$R\dot{\theta}(0) = v_0$ $\quad$ 0,5 $\quad \Rightarrow B = \frac{v_0}{R\omega}$ $\qquad \theta(t) = \frac{v_0}{R\omega} \sin(\omega t)$

7. Faire une représentation graphique de la fonction $\theta(t)$. (**MP1** : 1 pt)



8. Exprimer la période du mouvement en fonction des paramètres du problème. Calculer numériquement cette période, avec $R = 10$ cm ; $g = 9,81$ m.s^{-2}. (**MP1** : 1 pt)

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ $\quad$ 0,5 $\qquad$ A.N : $T = 0,63$

9. La solution obtenue conduit à un mouvement perpétuel. En quoi ce modèle n'est-il pas réaliste ? Décrire qualitativement et sans calcul comment se produit le mouvement réel. (**MP2** : 1 pt)

On a négligé les frottements $\Rightarrow$ atténuation des amplitudes avec le temps

régime pseudo-oscillant