

1A CC3 Mécanique du point (2h)

Lundi 9 janvier 2023

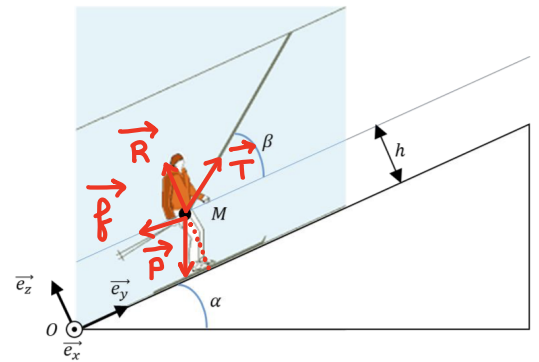
- Répondre sur le sujet, penser à simplifier au maximum vos résultats et à utiliser les résultats des questions précédentes même si n'avez pas réussi leur démonstration.
- Aucun document n'est admis, une calculatrice est autorisée.
- Vous serez évalués sur les acquis de l'apprentissage suivants :

MP1 : Connaître les concepts généraux de la mécanique du point

MP2 : Résoudre un problème, calculer et analyser le résultat en mécanique du point.

Le télési

On se propose d'étudier le mouvement d'un skieur qui remonte, à l'aide d'un télési, une piste dont l'angle de plus grande pente considéré constant sera noté α . On assimile le skieur à un point matériel M de masse m , situé en son centre de gravité à une hauteur h qui reste constante par rapport au sol. Le mouvement du skieur sera étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On le décrit en coordonnées cartésiennes à l'aide du repère orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. On suppose que le skieur reste en permanence en contact avec le sol et que son mouvement est rectiligne selon le vecteur unitaire \vec{e}_y .



En plus de son poids et de la réaction normale de la piste, le skieur est soumis à la traction du câble, dont la norme est supposée constante et notée T , la force étant colinéaire au câble qui forme un angle β constant par rapport à la piste (voir figure). Le skieur est également soumis au frottement de l'air selon une force $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$ (où λ est une constante positive). On suppose la piste suffisamment verglacée pour négliger le frottement solide du support.

1. Exprimer le vecteur position \overrightarrow{OM} , le vecteur vitesse \vec{v} et le vecteur accélération \vec{a} du point M .
(MP1 : 1 pt)

$$\overrightarrow{OM} = y(t) \vec{e}_y + h \vec{e}_y$$

$$\vec{v} = \dot{y}(t) \vec{e}_y = v(t) \vec{e}_y$$

$$\vec{a} = \ddot{y}(t) \vec{e}_y = \dot{v}(t) \vec{e}_y$$

2. Représenter, sur le schéma ci-dessus, toutes les forces agissant sur le skieur. (MP1 : 0.5 pt)

3. Donner, dans le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, les expressions des forces qui s'exercent sur le skieur, en fonction de $m, g, T, \alpha, \beta, \lambda$, de la seule composante non nulle de la vitesse qui sera notée $v(t)$ et de la norme de la réaction notée R . (MP1 : 1 pt)

$$\vec{P} = m \vec{g} = -m g \sin \alpha \vec{e}_y - m g \cos \alpha \vec{e}_y$$

$$\vec{R} = R \vec{e}_y$$

$$\vec{f} = -\lambda v(t) \vec{e}_y$$

$$\vec{T} = T \cos \beta \vec{e}_y + T \sin \beta \vec{e}_y$$

4. Justifier que pour que le skieur, initialement immobile démarre, il faut que la traction vérifie :

$$T > mg \frac{\sin \alpha}{\cos \beta}. \text{ On supposera cette condition vérifiée dans la suite. (MP2 : 1 pt)}$$

Il faut que la résultante des forces selon \vec{e}_y soit positive pour donner au point M une accélération positive $a(t=0) > 0$

De plus $v(t=0) = 0$ donc il faut $-mg \sin \alpha + T \cos \beta > 0$

ce qui donne bien $T > mg \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} = m a(t=0)$

5. Démontrer que l'équation différentielle du mouvement est de la forme :

$$\frac{dv(t)}{dt} + C_1 v(t) = C_2, \text{ avec } C_1 \text{ et } C_2 \text{ des constantes à exprimer en fonction de } m, \lambda, g, T, \alpha, \beta. \text{ (MP2 : 1 pt)}$$

D'après le TRC : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} + \vec{T} = m \vec{a}$

$$\begin{cases} -mg \sin \alpha - \lambda v(t) + T \cos \beta = m \frac{dv(t)}{dt} \\ -mg \cos \alpha + R + T \sin \beta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dv(t)}{dt} + \underbrace{\frac{\lambda}{m} v(t)}_{C_1} = \underbrace{-g \sin \alpha + \frac{T}{m} \cos \beta}_{C_2 > 0} \\ R = mg \cos \alpha - T \sin \beta \end{cases}$$

6. Résoudre l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $v(t)$, en se rappelant que la vitesse initiale est nulle. (MP2 : 1.5 pt)

Equation Sans Second Membre (ESSM) : $\frac{dv_1(t)}{dt} + \frac{\lambda}{m} v_1(t) = 0$
 $v_1(t) = K \exp\left(-\frac{\lambda}{m} t\right)$ avec $K \in \mathbb{R}$

Solution Particulière : $v_2(t) = \frac{C_2}{C_1} = -\frac{mg}{\lambda} \sin \alpha + \frac{T}{\lambda} \cos \beta$

Solution Générale : $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$ avec $v(t=0) = 0$

$$v(t) = K \exp\left(-\frac{\lambda}{m} t\right) - \frac{mg}{\lambda} \sin \alpha + \frac{T}{\lambda} \cos \beta$$

donc $K = -\left(-\frac{mg}{\lambda} \sin \alpha + \frac{T}{\lambda} \cos \beta\right)$ et

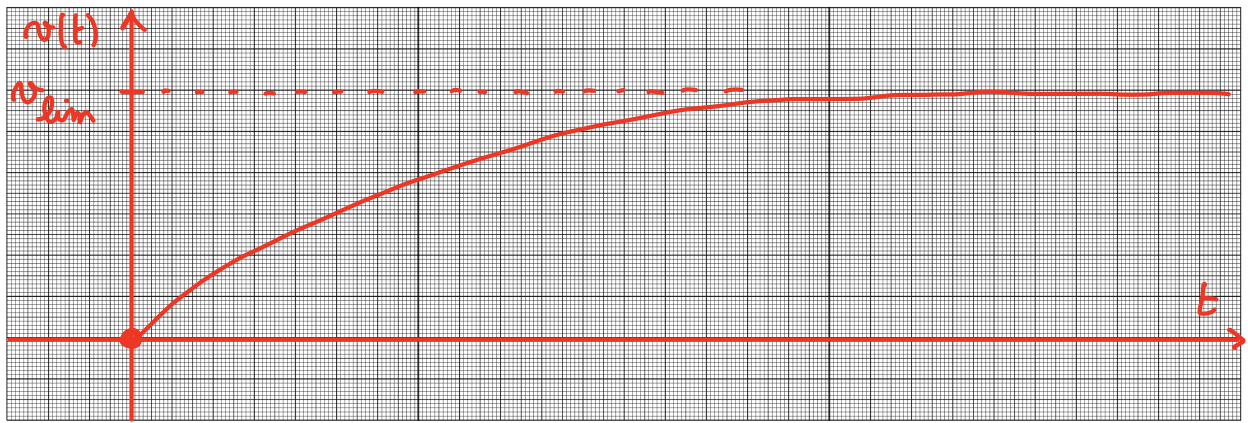
$$v(t) = \left(-\frac{mg}{\lambda} \sin \alpha + \frac{T}{\lambda} \cos \beta\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{m} t\right)\right)$$

7. Justifier que la vitesse tend vers une valeur limite v_{\lim} et donner son expression en fonction de $m, g, T, \lambda, \alpha, \beta$. (MP2 : 1 pt)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{\lambda}{m} t\right) = 0$$

donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = v_{\lim} = -\frac{mg}{\lambda} \sin \alpha + \frac{T}{\lambda} \cos \beta$

8. Tracer $v(t)$ sur le graphe ci-dessous en faisant clairement apparaître v_{lim} . (MP2 : 1 pt)



9. A quelle condition sur $v(t)$ le skieur remonte-t-il la piste ? En déduire la valeur minimale du module T de la force de traction exercée par la perche pour remonter le skieur en fonction de m, g, α, β . Faire l'application numérique pour $m = 85 \text{ kg}$, $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$, $\alpha = \beta = 30^\circ$. (MP2 : 1 pt)

Il faut avoir $v(t) > 0$ soit $-\frac{mg}{\lambda} \sin \alpha + \frac{T}{\lambda} \cos \beta > 0$

$$-mg \sin \alpha + T \cos \beta > 0$$

ce qui équivaut à la condition de la question 4

$$T > mg \frac{\sin \alpha}{\cos \beta}$$

(AN)

$$T > 481 \text{ N}$$

On suppose que le skieur a atteint la vitesse limite et qu'il est désormais en mouvement de **translation rectiligne uniforme** à la vitesse v_{lim} .

10. Justifier, sans calcul, que le travail $W_{\vec{R}}$ de la réaction de la piste sur le skieur entre les points $A(0, y_A, 0)$ et $B(0, y_B, 0)$ est nul. (MP1 : 1 pt)

La force de réaction est orthogonale à la piste, donc orthogonale au mouvement. Elle ne travaille donc pas.

11. Exprimer le travail $W_{\vec{P}}$ du poids du skieur entre les points $A(0, y_A, 0)$ et $B(0, y_B, 0)$, en fonction de m, g, α, y_A, y_B . Expliquer le signe de ce travail. (MP1 : 1 pt)

$$W_{\vec{P}} = \int_A^B \vec{P} \cdot d\vec{l} = \int_{y_A}^{y_B} (-mg \sin \alpha \vec{e}_y - mg \cos \alpha \vec{e}_z) \cdot (dy \vec{e}_y)$$

$$W_{\vec{P}} = \int_{y_A}^{y_B} -mg \sin \alpha dy$$

$$W_{\vec{P}} = -mg \sin \alpha (y_B - y_A) < 0$$

Ce travail est négatif car le poids s'oppose au mouvement de "remontée" de la piste.

12. Exprimer le travail $W_{\vec{f}}$ de la force de frottement de l'air entre les points $A(0, y_A, 0)$ et $B(0, y_B, 0)$, en fonction de $\lambda, v_{\text{lim}}, y_A, y_B$. Expliquer le signe de ce travail. (MP1 : 1 pt)

$$W_{\vec{f}} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{e} = \int_{y_A}^{y_B} -\lambda v_{\text{lim}} \vec{e}_y \cdot dy \vec{e}_y$$

$$W_{\vec{f}} = -\lambda v_{\text{lim}} (y_B - y_A) < 0$$

Ce travail est négatif, ce qui est logique puisque les frottements s'opposent toujours au mouvement !

13. A partir du théorème de l'énergie cinétique, déterminer le travail $W_{\vec{T}}$ de la force de traction de la perche entre les points $A(0, y_A, 0)$ et $B(0, y_B, 0)$, en fonction $m, g, \alpha, \lambda, v_{\text{lim}}, y_A, y_B$. Expliquer le signe de ce travail. (MP2 : 1 pt)

D'après le TEC : $\Delta E_c = \sum_i W_{\vec{F}_i}$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = 0 = W_{\vec{R}} + W_{\vec{P}} + W_{\vec{f}} + W_{\vec{T}}$$

(car $v_B = v_A = v_{\text{lim}}$) ($W_{\vec{R}} = 0$)

$$W_{\vec{T}} = -W_{\vec{P}} - W_{\vec{f}}$$

$$\text{soit } W_{\vec{T}} = mg \sin \alpha (y_B - y_A) + \lambda v_{\text{lim}} (y_B - y_A)$$

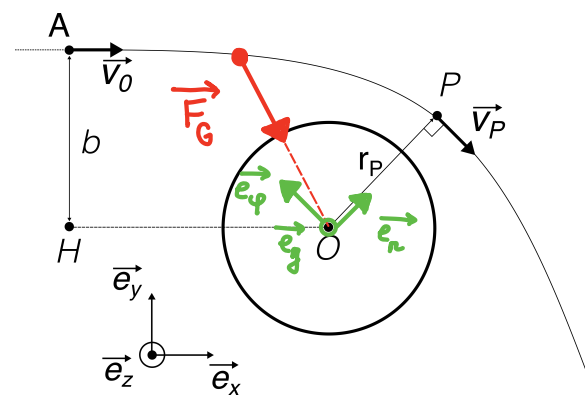
$$W_{\vec{T}} = (mg \sin \alpha + \lambda v_{\text{lim}}) (y_B - y_A) > 0$$

positif car la perche tire le skieur dans son mouvement de montée !

Astéroïde géocroiseur

Les astéroïdes dont l'orbite s'approche de celle de la Terre sont nommés géocroiseurs. Lorsqu'ils sont trop proches, ils s'échauffent dans les hautes couches de l'atmosphère et se désintègrent en donnant naissance à des étoiles filantes. S'ils sont plus proches encore, ils peuvent donner lieu à un impact avec la Terre.

On considère, dans le référentiel géocentrique \mathcal{R} supposé galiléen, un astéroïde de masse m , initialement très éloigné de la Terre, de masse M_T ($5,97 \cdot 10^{24}$ kg), de rayon R_T ($6,37 \cdot 10^3$ km) et de tout autre astre, si bien qu'il est en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse \vec{v}_0 . Cet astéroïde n'est soumis qu'à la gravitation de la Terre pendant tout son mouvement et on admet que sa trajectoire est incluse dans le plan (xOy) . Le prolongement de sa trajectoire rectiligne passe à une distance b du centre O de la Terre, appelée paramètre d'impact. Cependant, lorsqu'il se rapproche de la Terre, l'attraction gravitationnelle dévie l'astéroïde et sa trajectoire devient hyperbolique. On appelle le point P , le périégée de cette trajectoire, c'est à dire le point le plus proche du centre de la Terre. On notera r_P la distance OP . L'astéroïde a alors une vitesse \vec{v}_P , orthogonale à la droite (OP) . Le schéma n'est pas à l'échelle.



On rappelle que la force de gravitation entre deux objets massifs est donnée par $\vec{F}_G = -G \frac{M_T m}{r^2} \vec{e}_r$, avec $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ et \vec{e}_r le vecteur unitaire entre O et le géocroiseur.

L'objectif de l'exercice est de déterminer l'expression de la distance d'approche r_P en fonction de paramètres connus de l'orbite lointaine (b et \vec{v}_0).

1. Représenter, sur le schéma ci-dessus, la force attractive de la Terre sur l'astéroïde en un point quelconque de la trajectoire entre A et P . (MP1 : 0.5 pt)

2. Justifier, sans calcul, que l'énergie mécanique de l'astéroïde est conservée lors de son mouvement. (MP1 : 1 pt)

D'après le TEM : $\Delta E_M = \sum_i W(\vec{F}_i \text{ non conservatives})$

L'astéroïde n'est soumis qu'à la force de gravitation qui est conservative donc son énergie mécanique est conservée.

3. Montrer que l'énergie potentielle de l'astéroïde s'écrit $E_p = -\frac{GM_T m}{r}$. (MP1 : 1 pt)

On sait que $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_G) = -\Delta E_p = E_p(A) - E_p(B)$

$$\begin{aligned} \text{Exprimons : } W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_G) &= \int_A^B \vec{F}_G \cdot d\vec{\ell} = \int_{r_A}^{r_B} \left(-\frac{GM_T m}{r^2} \vec{e}_r \right) \cdot (dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi) \\ &= \int_{r_A}^{r_B} -\frac{GM_T m}{r^2} dr = \int_{r_B}^{r_A} \frac{GM_T m}{r^2} dr = \left[-\frac{GM_T m}{r} + \text{cte} \right]_{r_B}^{r_A} \\ &= \left(-\frac{GM_T m}{r_A} + \text{cte} \right) - \left(-\frac{GM_T m}{r_B} + \text{cte} \right) \quad \text{cte} = 0 \text{ pour avoir } \lim_{r \rightarrow +\infty} E_p(r) = 0 \\ &= E_p(A) - E_p(B) \end{aligned}$$

4. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique entre une situation initiale (l'astéroïde en $x = -\infty$) et le point P , déterminer une expression de v_P^2 en fonction de r_P , v_0 , G et M_T . (MP1 : 1.5 pt)

$$\Delta E_M = 0 \quad \text{avec} \quad E_M = E_C + E_p$$

On écrit que $E_M(r = -\infty) = E_M(P)$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + 0 = \frac{1}{2} m v_P^2 - \frac{GM_T m}{r_P}$$

$$v_P^2 = v_0^2 + \frac{2GM_T}{r_P}$$

5. En appliquant le théorème du moment cinétique, justifier que le moment cinétique de l'astéroïde par rapport à O est également constant. (MP1 : 1 pt)

$$\text{TMC : } \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F}_G \quad \text{avec} \quad \vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m \vec{v}$$

$$\vec{OM} \wedge \vec{F}_G = (r \vec{e}_r) \wedge \left(-\frac{GM_T m}{r^2} \vec{e}_r \right) = \vec{0}$$

$$\text{donc } \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0} \quad \text{ce qui veut dire que } \vec{L}_O \text{ est un vecteur constant.}$$

6. Montrer que le moment cinétique de l'astéroïde en A est donné par $\vec{L}_O(A) = -mbv_0 \vec{e}_z$. (MP1 : 0.5 pt)

$$\vec{L}_O(A) = \vec{OA} \wedge (m \vec{v}_A) = (x_A \vec{e}_x + b \vec{e}_y) \wedge (m v_0 \vec{e}_x)$$

$$\vec{L}_O(A) = -m b v_0 \vec{e}_z$$

7. Montrer que le moment cinétique de l'astéroïde en P est donné par $\vec{L}_O(P) = -mr_P v_P \vec{e}_Z$. (MP1 : 0.5 pt)

Dans la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ représentée en vert sur le schéma

$$\vec{L}_O(P) = \vec{OP} \wedge (m \vec{v}_P) = (r_P \vec{e}_r) \wedge (-m v_P \vec{e}_\varphi)$$

$$\vec{L}_O(P) = -m r_P v_P \vec{e}_z$$

8. En déduire une relation entre b , r_P , v_0 et v_P . (MP2 : 1 pt)

Comme $\vec{L}_O(A) = \vec{L}_O(P)$, on a $b v_0 = r_P v_P$

9. En vous servant des réponses aux questions 4 et 8, montrer que r_P satisfait une équation du type : $r_P^2 + B_1 r_P + B_2 = 0$, avec B_1 et B_2 deux constantes dépendantes de b , v_0 , G , M_T et dont on donnera les expressions. (MP2 : 1.5 pt)

$$v_P^2 = v_0^2 + \frac{2GM_T}{r_P} \quad \text{et} \quad v_P^2 = \frac{b^2}{r_P^2} v_0^2 \quad \text{d'où} \quad v_0^2 + \frac{2GM_T m}{r_P} = \frac{b^2}{r_P^2} v_0^2$$

$$r_P^2 v_0^2 + 2GM_T r_P - b^2 v_0^2 = 0$$

$$r_P^2 + \underbrace{\frac{2GM_T}{v_0^2}}_{B_1} r_P - \underbrace{b^2}_{+B_2} = 0$$

10. En sélectionnant la seule solution physiquement pertinente, en déduire l'expression de la distance minimale d'approche r_P uniquement en fonction de b , v_0 , G et M_T . (MP1 : 1 pt)

$$\Delta = B_1^2 - 4B_2 \quad \text{et} \quad r_{P,1,2} = \frac{-B_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\Delta > B_1^2 \text{ car } B_2 < 0$$

donc la seule solution physiquement pertinente est $r_{P,1}$ qui est positive

$$r_{P,1} = \frac{\frac{2GM_T}{v_0^2} + \sqrt{\frac{4G^2 M_T^2}{v_0^4} + 4b^2}}{2} \quad \text{soit} \quad r_{P,1} = \frac{GM_T}{v_0^2} + \sqrt{\left(\frac{GM_T}{v_0^2}\right)^2 + b^2}$$

11. Le système de surveillance de la NASA vient de détecter un astéroïde de vitesse estimée à $v_0 = 2,0 \text{ km.s}^{-1}$ et de paramètre d'impact $b = 1,0 \cdot 10^5 \text{ km}$. Doit-on s'attendre à une collision ? À des étoiles filantes ? Ou à rien de particulier ? On considèrera que l'atmosphère s'étend entre R_T et $R_T + h$ avec $h = 100 \text{ km}$, ou au delà d'une altitude de 100 km on considère que l'atmosphère est suffisamment ténue pour ne plus jouer aucun rôle. (MP2 : 1.5 pt)

Application numérique : $r_P \approx 4,1 \cdot 10^4 \text{ km} > R_T + h$

Il n'y aura donc ni collision, ni étoiles filantes.

Changement de référentiel

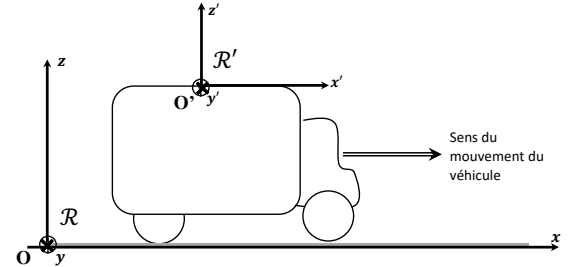
Dans \mathcal{R} le référentiel terrestre, matérialisé par (O, x, y, z) , que l'on suppose galiléen, on se propose d'étudier le mouvement d'un véhicule qui se déplace sur une route rectiligne et horizontale. Le mouvement se fait suivant (Ox) toujours dans le sens positif. On notera $\mathcal{R}'(O', x', y', z')$ le référentiel lié au véhicule et \vec{g} l'accélération de la pesanteur. On distingue 3 phases du mouvement du véhicule.

On rappelle les expressions des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis :

$$\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e = -m \left[\vec{a}_{O'/\mathcal{R}} + \frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} \right) \right]$$

$$\vec{f}_{iC} = -m\vec{a}_c = -2m \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$$

- **Phase 1** : le véhicule initialement immobile accélère selon un vecteur accélération de norme constante avec $\|\vec{a}\| = a_0$,
- **Phase 2** : le véhicule se déplace à vitesse constante : $\|\vec{v}\| = v_0$,
- **Phase 3** : le véhicule freine avec une accélération de norme constante $\|\vec{a}\| = a_0$.



Pendant chacune de ces phases, on étudie un pendule simple suspendu au plafond du véhicule. On s'intéresse aux états d'équilibre relatif, c'est-à-dire tels que le pendule est immobile par rapport au camion.

- Les trois schémas du tableau page suivante représentent la situation du véhicule et du pendule dans l'une des trois phases. Compléter le tableau de la page suivante en indiquant pour chaque situation :
 - La phase **1**, **2** ou **3** du mouvement du véhicule (**MP1** : 0.5 pt)
 - La nature galiléenne ou non de \mathcal{R}' (**MP1** : 0.5 pt)
 - Les forces extérieures qui s'exercent sur la masse suspendue au fil (on ne demande pas leur expression) (**MP1** : 0.5 pt)
 - Les forces d'inertie qui sont à considérer selon la situation : lorsque ces forces sont non nulles donner leur expression en fonction des données du problème (**MP2** : **1** pt)
 - Sur chaque schéma représenter l'accélération du véhicule et les forces qui s'exercent sur le pendule représenté par le point M . (**MP1** : **1** pt)
- Déterminer l'angle α , en exprimant $\tan(\alpha)$ en fonction de g et a_0 . Le résultat doit être justifié par un raisonnement clair dans le référentiel \mathcal{R}' . (**MP2** : 1.5 pt)

Dans \mathcal{R}' : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{ie} = m \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = \vec{0}$

$-mg\vec{e}_y + T\cos\alpha\vec{e}_y - T\sin\alpha\vec{e}_x + m a_0\vec{e}_x = \vec{0}$

↑ en phase 3 par exemple

$$\begin{cases} T\cos\alpha - mg = 0 \\ m a_0 - T\sin\alpha = 0 \end{cases} \quad T = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{m a_0}{\sin\alpha} \quad \text{d'où } \tan\alpha = \frac{a_0}{g}$$

- On écarte le pendule de sa position d'équilibre et on le laisse osciller. Répondre dans le tableau page suivante.
 - Indiquer dans chaque cas si la force d'inertie d'entraînement est modifiée et si oui de quelle manière. (**MP2** : **0,5**pt)
 - Indiquer dans chaque cas si la force d'inertie de Coriolis est modifiée et si oui de quelle manière. (**MP2** : **0,5**pt)

Question 1 : Equilibre du pendule			
a) - Phase 1, 2 ou 3	3	1	2
b) - \mathcal{R}' galiléen (oui ou non) ?	<i>non</i>	<i>non</i>	<i>oui</i>
c) - Forces extérieures	<i>poids tension du fil</i>	<i>poids tension du fil</i>	<i>poids tension du fil</i>
d) - Force d'inertie d'entrainement	$\vec{F}_{ie} = + m a_o \vec{e}_x'$	$\vec{F}_{ie} = - m a_o \vec{e}_x'$	$\vec{F}_{ie} = \vec{0}$
- Force d'inertie de Coriolis	$\vec{F}_c = \vec{0}$	$\vec{F}_c = \vec{0}$	$\vec{F}_c = \vec{0}$
e) - Schéma			
Accélération du véhicule			
Forces extérieures ●			
Forces d'inertie ●			
Question 3 : Oscillations du pendule			
a) - Modification de la force d'inertie d'entrainement	<i>non</i>	<i>non</i>	<i>non</i>
b) - Modification de la force d'inertie de Coriolis	<i>non</i>	<i>non</i>	<i>non</i>

Si le pendule oscille $\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$ devient non nulle mais $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ reste nul !