4AE-SE INSA TOULOUSE
6 JANVIER 2023

DS Analyse des Systèmes Non-Linéaires

1h15 - seules une feuille A4 manuscrite recto-verso et une calculatrice de base sont autorisées
Il sera tenu compte dans la notation des justifications apportées

---

Exercice 1

Soit le système non-linéaire d'ordre deux

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 - x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = ax_1^2 - x_2 \end{cases}$$

avec $a < 0$ un paramètre constant.

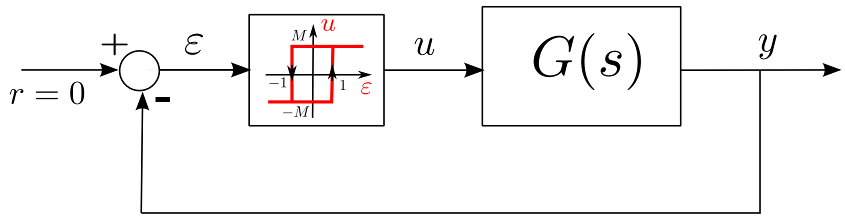
1. Déterminer les points d'équilibres, ainsi que leur nature, en fonction de a.
2. L'origine est un point d'équilibre. Que pouvons-nous dire de la stabilité de cet équilibre pour le système nonlinéaire d'après la première méthode de Lyapunov (ou méthode indirect) ?
3. Que peut-on affirmer ?
   - l'origine est globalement asymptotiquement stable
   - l'origine est asymptotiquement stable mais pas globalement
   - on ne peut rien conclure sur la globalité du résultat
4. Montrer à nouveau la stabilité de l'origine à partir de la fonction de Lyapunov candidate

   $$V(x) = \frac{1}{2}p_1x_1^2 + \frac{1}{2}p_2x_2^2$$

   avec p_1 et p_2 des constantes strictement positives à choisir.
5. Considérons le cas où $a = -2$. On choisit $p_1 = p_2 = 1$. Ce choix vérifie-t-il la condition de stabilité précédente ? Déterminer l'équipotentielle $V(x) = c$ la plus grande. En déduire une estimation de la région d'attraction.
6. Donner une représentation graphique dans le plan de phase $x_1 - x_2$ des précédents résultats.

Exercice 2

Considérons l'asservissement illustré sur la figure ci-dessous



avec la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{4}{s(s+3)}$$

La nonlinéarité est de type hystérésis avec des seuils à -1 et 1, une valeur à l'état bas de $-M$ et une valeur à l'état haut de M.

1. Lorsqu'on fait l'hypothèse d'une entrée sinusoïdale pour le bloc nonlinéaire : $\varepsilon(t) = A\sin(\omega t)$, quelle est la forme de sa sortie $u(t)$? Tracer les courbes de ε et u.

L'hystérésis peut-être approximée par son gain équivalent au premier harmonique (ou describing function)

$$N(A) = \frac{4M}{A\pi}\left(\sqrt{1 - \frac{1}{A^2}} - j\frac{1}{A}\right) \qquad \text{pour } A > 1$$

2. Calculer l'expression $C(A) = -1/N(A)$.
3. Tracer l'allure dans le plan complexe du lieu de transfert $G(j\omega)$ et le lieu critique $C(A)$.
4. Est-ce qu'il existe des cycles limites ? Si oui, quels seraient les calculs à réaliser pour trouver la fréquence ω_0 et l'amplitude A_0 de ces auto-oscillations. Détailler la démarche et les équations qu'il faudrait résoudre.
5. S'il existe des cycles limites, sont-ils stables ?